教材研究

関数の凸性について

－Jensenの不等式の紹介－

育英西高等学校　富永　雅

1. はじめに

高等学校において本稿タイトルにある「関数の凸性」は，どの程度意識的に用いられているだろうか。有効的に用いられている一例として，見慣れない関数式の概形を調べるときが挙げられるだろうが，その一方で，相加平均・相乗平均の不等式は凸（凹）性を利用したものであるにもかかわらず，学習者はそのことを実感していないと考えられる。そこで，以下では，高等学校において関数の凸性を意識し意味あるものとして扱う一機会を設ける事を目標に，本稿を展開させる。

高等学校における関数の凸性の定められ方は，２次関数ではグラフの形状からなされ，３次関数をはじめとするその他の指数関数等に対しては，次のように定義される：

区間 $I \subset R$ で定義された関数 $f(x)$ が I で C^2 級であるとき，$f''(x) \geqq 0$ ならば，関数 $f(x)$ は凸関数である。

我々は，ここでの定義が狭義なものであることに注意する。よく知られているように本来，凸性を表すために関数 $f(x)$ が C^2 級であることは必ずしも必要な条件ではない。ところで，この定義による学習者の反応について，関数の凸性を表す不等式とそのグラフとがうまく結びついていない，つまり，$f''(x) \geqq 0$ と凸関数 $f(x)$ のグラフとの結びつきが学習者には弱いと感じるのは筆者だけであろうか。そこで，関数の凸性を表す一般的な定義不等式を確認し，その定義不等式とグラフとの結びつきの強さを指摘する。また，その定義不等式の拡張としてJensenの不等式を紹介し，その証明についてもグラフを利用して考えることにする。

2. 関数の凸性とその応用

まずはじめに，一般的な凸関数 $f(x)$ の定義不等式を紹介する：

区間 $I \subset R$ で定義された関数 $f(x)$ が I の任意な点 $x_1 < x_2$ と任意の数 $\lambda(0 < \lambda < 1)$ に対して次の不等式を満たすとき，関数 $f(x)$ は凸関数であると定義される：

（１）$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

ここで，定義不等式（１）において不等号が逆向きな不等式が成り立つとき関数 $f(x)$ は凹関数であると定義されることと，与えられた関数 $f(x)$ は開区間上で連続であることに注意する。次に，下の図１を用いて不等式（１）とそのグラフとの関連付けを行う。

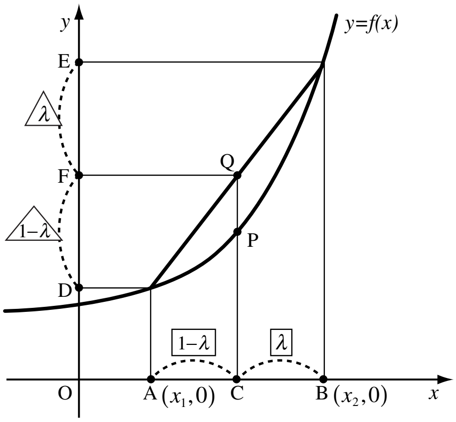

図　１

不等式（１）の左辺は，図１において関数 $f(x)$ のグラフ上の点P，つまり，線分ABを $(1-\lambda):\lambda$ に内分する点Cにおける関数 $f(x)$ の値に相当する。また，不等式（１）の右辺は，図中の点Q，つまり，線分DEを $(1-\lambda):\lambda$ に内分する点Fにおける値に相当する。（左辺は，x 軸上で，右辺は，y 軸上で内分する。）この定義によると，不等式（１）と関数 $f(x)$ のグラフとの結びつきが学習者にもよくわかると考えられる。ここで，C^2 級であることを関数 $f(x)$ の条件に加えると，導関数 $f'(x)$ の単調増加性と $f''(x) \geqq 0$ との同値性により「１．はじめに」で述べた高等学校での凸関数の定義が得られる。

次に，上の事実を凹関数 $f(x) = \log x$ に応用させる。このとき，定義不等式から得られる不等式

（２） $\log(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqq \lambda \log x_1 + (1-\lambda)\log x_2$

は，不等式 $\log(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqq \log x_1^{\lambda} x_2^{1-\lambda}$ に式変形でき，更に，対数平均の単調増加性により加重 λ のついた相加平均・相乗平均の不等式

（３） $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geqq x_1^{\lambda} x_2^{1-\lambda}$

と同値であることがわかる。特に，$\lambda = \dfrac{1}{2}$ のとき，これは明らかに相加平均・相乗平均の不等式を表し，また，等号条件の $x_1 = x_2$ もグラフから明らかになる。関数 $f(x) = \log x$ の凹性を表す不等式（２）や加重 λ のついた相加平均・相乗平均の不等式（３）は，学校数学において指摘されることは少なく残念である。

3. Jensenの不等式とその応用

前節で取り上げた２変数 x_1, x_2 による不等式（１）は，一般に n 変数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n でも成り立つことが知られている。本節では，その n 変数による不等式"Jensenの不等式"とその証明を紹介する。

まず，Jensenの不等式についてであるが，それは次のようなものである：

区間 $I \subset R$ で定義された凸関数 $f(x)$ に対して，加重 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_k \geqq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, ベクトル $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $x_k \in I$ とすると

（４） $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$

この不等式は，$f(x)$ が凸関数ならば，任意個の点の凸結合 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ の関数値 $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)$ が，各関数値 $f(x_k)$ の凸結合 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$ でおさえられることを表す不等式であり，先の不等式（１）と同様にグラフにおいて図形的な意味を持っている。また，Jensenの不等式（４）からは，前節で取り上げた加重 λ のついた相加平均・相乗平均の不等式等は勿論のこと，Schwarzの不等式やHölderの不等式などを導くことができ,「基本となる不等式」と表現してよいと考えられる。次に，この基本不等式，Jensenの不等式（４）の証明を紹介する。一般には，帰納法による証明など種々知られているようだが，ここでは，実に単純な下の図２ひとつからごく自然な物理的感覚で導き出せる証明を取り上げることにする。（定義域を m から M に限っておく。）

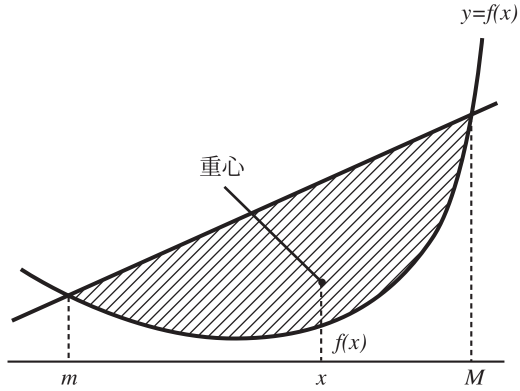

図　2

図２のように曲線と割線で囲まれた凸集合の周辺の曲線部に質点が分布しているとき，その重心は凸集合内にある。図２の x を重心の x 座標 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ だとすると，その関数値 $f(x)$ は左辺の値となり，それより上の重心の y 座標 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$ は不等式の右辺に対応する。以上により，証明を終えることが出来る。

このJensenの不等式については応用が多く，入試問題においてもよく見られる。本節の最後に，その例として次の問題１，２を挙げる。

問題１　$\lambda + \mu = 1$, $0 < \lambda < 1$, $0 \leqq x < y \leqq \pi$ であるとき，任意の実数 λ, μ, x, y に対して，不等式 $\sin(\lambda x + \mu y) > \lambda \sin x + \mu \sin y$ が成り立つことを証明せよ。 [横浜市大]

問題２　$p + q + r = 1$ ならば，不等式 $\dfrac{p}{a} + \dfrac{q}{b} + \dfrac{r}{c} \geqq \dfrac{1}{ap + bq + cr}$ を証明せよ。ただし，文字は全て正数であるとする。 [福井工大]

4. おわりに

本稿では，関数の凸性について，その定義から話をはじめ，凸性を表す不等式を拡張させたJensenの不等式とその証明についての紹介をした。学校教育現場において，これらを取り上げることは可能であり，凸関数を表す定義不等式とそのグラフとの図形における結びつきを強めるためにも，多くの場面で意識していきたいと考えている。