応用授業

コーヒーカップが描く曲線で課題解決学習

東京都立瑞穂農芸高等学校　内藤康正

遊園地の「コーヒーカップ」の軌跡は単純な円運動の組合せだが，各円の半径や角速度を変えると思いがけない曲線が得られる。本稿では，図１左のようにコーヒーカップ C が乗っている円盤を「円盤２」，円盤２が乗っている円盤を「円盤１」，それぞれの中心と半径を O_2, R_2, そして O_1, R_1 とし，点 C の軌跡をいくつか追跡する。100%試行錯誤の課題にもなりうるが，ここではパソコンを用いた課題解決学習として多少の枠を設定してみようと思う。

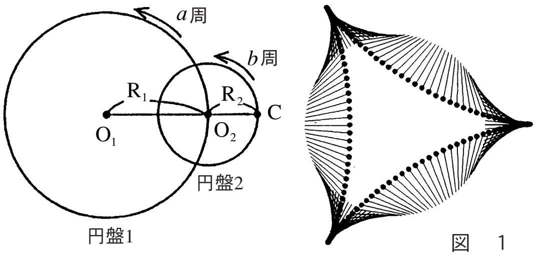


図　1

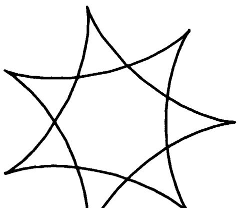
円盤１が a 周する間に円盤２が b 周するものとすると，点 C の軌跡はパラメータ表示で

$$x = R_1\cos a\theta + R_2\cos b\theta$$

$$y = R_1\sin a\theta + R_2\sin b\theta$$

である。この軌跡を $C(a, b, R_1, R_2)$ で表そう。図１右は $C(1, -2, 2, 1)$ で，線分 O_2C の動きとともに点 C を10度刻みに表している。以後は線分 O_2C を省いて，点 C の軌跡のみを描く。

課題：試行錯誤を通して a, b, R_1, R_2 と軌跡の形の関連を見つけて，右のような動きをするコーヒーカップを作れ。



作業にあたって大切なことは，試行錯誤と言っても行き当たりばったりの要素が強いと，はかどらないということである。多変数の常套手段は，動かす変数を限ることであろう。この点に留意して，課題解決のために考えやすい切り口を２例用意してみた。

まず，図２は $C(1, -3, 6, R_2)$ で R_2 を１から６まで動かしたものである。

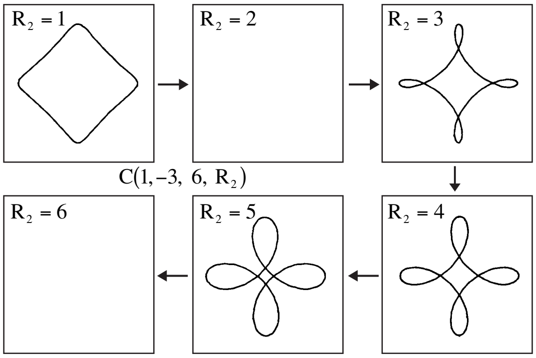


図　2

空欄は，軌跡を予想してからパソコン等で確認するのが楽しい。結論から言うと，$R_2 = 2$ のときはアステロイド，$R_2 = 6$ のときは正葉曲線である。

さて，この変化から

$\boxed{1}$ コーヒーカップが元の位置に戻るまでに何回同じ動きを繰り返すかの回数は，何に依存するか？

$\boxed{2}$ $R_2 = 2$ のように，尖点を持つのはどんなときか？

$\boxed{3}$ $R_2 = 6$ のように，O_1 を通るのはどんなときか？

をテーマに選んで，他の数値などで実験を繰り返して予想を立ててみると，

予想 $\boxed{1}$ ：$|a-b|$ 回繰り返す。

予想 $\boxed{2}$ ：$R_2 : R_1 = |a| : |b|$ のとき尖点を持つ。

予想 $\boxed{3}$ ：$R_2 = R_1$ のとき，O_1 を通る花弁型。

に達するだろう。ただ，実験をしていると $\boxed{1}$ は半分？マーク付であることに気づくし，繰返し方にもバリエーションがある。そこで，花弁型の $C(a, a-12, 1, 1)$ で a を１から６まで動かした図３で，も

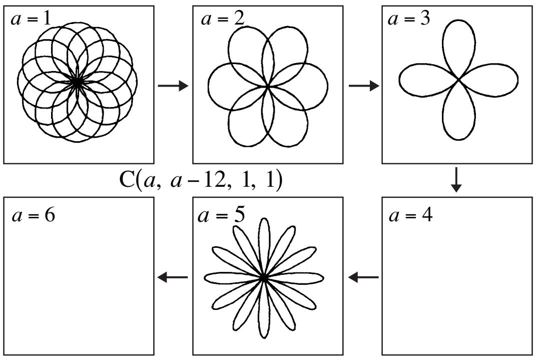


図　3

う一歩踏み込んでみる。予想$\boxed{1}$の通りなら全て12回の繰返しになるはずだが…空欄は埋まるだろうか？

実は，花弁の先端部分が円周の12等分点を

$a=1$のときは１つどなり，

$a=2$のときは２つどなりetc.

とつないでいるが，しかし「…」なのである。

予想$\boxed{4}$：上の予想を「…」部を含めて４番目の予想として各自の言葉で整理し，予想$\boxed{1}$にも触れながらまとめよ。

「じっきょう数学資料」バックナンバーの入試報告では，受験生の日本語による説明能力低下が嘆かれているようなので,「…」部を説明させる練習として，予想$\boxed{4}$をこうした形式にするのも手だと思う。

遠回しな表現が,「約数」「互いに素」などの用語や，オイラーの関数，あるいは自分が定義した記号を用いて，すっきり説明できるまで練習したい。

これで最初の課題の軌跡が

□２つどなりを結んでいるから$a=2$

□７回反復だから$b=-5$

□尖点を持つから$\mathrm{R}_2:\mathrm{R}_1=2:5$

の順に作れることになる。例えば，$\mathrm{C}(2,-5,5,2)$である。更に時間が許せば,

□７回反復だから$b=9$

□尖点を持つから$\mathrm{R}_2:\mathrm{R}_1=2:9$

ではどうか？とか，現実にはあり得ないがRを負にしてみるとか，遊ぶ材料はまだある。どれも，期待を裏切らない結果を見せてくれる。

＊　＊　＊　＊

遊びだけで終わるのはちょっと，という立場で，このあとに数式を持ち込んだ授業も当然可能である。以下にかいつまんで紹介する。

例えば，予想$\boxed{1}$や$\boxed{4}$は$r=\mathrm{O_1C}$として，

$$
\begin{aligned}
r^2 &= x^2+y^2 \\
&= \mathrm{R_1}^2+\mathrm{R_2}^2+2\mathrm{R_1R_2}(\cos a\theta\cos b\theta+\sin a\theta\sin b\theta) \\
&= \mathrm{R_1}^2+\mathrm{R_2}^2+2\mathrm{R_1R_2}\cos((a-b)\theta)
\end{aligned}
$$

から考察ができる（注：θは偏角ではない）。数BやⅢを学ばない生徒にとっては，加法定理の実用性を噛みしめる一例ではないだろうか。

予想$\boxed{2}$では，半径４の円の内側を半径１の円が内接しながら転がるときに得られる内サイクロイドとしてアステロイド

$x=3\cos\theta+\cos3\theta$

$y=3\sin\theta+\sin3\theta$

を別途導いてみて「なるほど」と頷く方法もある。

予想$\boxed{3}$では，$\mathrm{R}_1=\mathrm{R}_2=1$として

$x=\cos\theta+\cos n\theta$

$y=\sin\theta+\sin n\theta$

から，やはり加法定理を用いて

$r=2\cos\dfrac{(n-1)\theta}{2}$　‥‥＃　を導く。また

$\dfrac{y}{x}=\tan\dfrac{(n+1)\theta}{2}$から点Cの偏角$\dfrac{(n+1)\theta}{2}$

を得て，これを改めてθと置いて

＃‥‥　$r=2\cos\dfrac{n-1}{n+1}\theta$

などから，極方程式の学習にまで突入できる。等々。

＊　＊　＊　＊

実力派生徒にとっては，作業の段階で必要以上の誘導をすると，かえって楽しみを奪うこともあるだろう。他方，$\sin120°=?$の段階で悪戦苦闘の生徒たちには，後半の数式部分は，とても受け入れられない。その辺りのさじ加減が実際には難しく，時間のゆとりとも相談しなければならない。

それから，私がこれまで関わってきた生徒に共通していることに，自分の手で描いたり工作したりという体験に乏しいということがある。そこで，半径１，２，３の円盤を厚紙で作って，手作業を並行して行うのも大切なことだと思う。参考までに添えると，実際の遊園地では$\mathrm{C}(1,-2,2,1)$や，$\mathrm{C}(2,-3,3,2)$が多いと聞いたことがある。

いずれにしても，この課題学習を通して,「たった２つの円がこんなに見事な曲線を描くこと」をしみじみ振り返って，sin, cosも，なかなかやるじゃん，と締めくくりたいものである。

＊　＊　＊　＊

最後に残されたスペースを借りて，平成15年にちなんだ四則演算パズルを１つ。与えられた４数と加減乗除,（　）だけを用いて15を作ろうというもの。「10作り」は有名で，その二番煎じである。

といっても下記の２題はなかなか手強く，計算の腕に自身ありの生徒でも，素手でその日のうちに見つけられるかどうか。４数の順序は問わない。

（1）「3, 4, 7, 9」　４種類の解あり

（2）「1, 5, 6, 7」　解は１つ

４数を２回ずつ用いると，2003も作れる。先生方には，年賀パズルとしてお楽しみいただきたい。