実 践 記 録

「数学基礎」の効能－総合的な数学？の見地から

千葉県立千葉商業高等学校　田中直行

1．はじめに

新学習指導要領の新設科目「数学基礎」の教科書は，身近な話題をテーマにして生徒が主体的に学習できることを意図して編修された教科書である。

たとえば，実教版「数学基礎」は次のような構成になっている。

1章　数と人間
2章　図形と人間
3章　社会生活と数学
4章　身近な数学
5章　身近な統計
ひろば・工作室

この「数学基礎」は「数学Ⅰ」と選択的に履修できる必履修科目である。「数学Ⅰ」とはねらいが異なり，数学に対する興味・関心の部分にウェイトがおかれている。したがって，理論的な考察の面は利用者に委ねられている。

見方を変えれば，数学的な見方や考え方のよさの認識を一層深めるために「数学Ⅱ」などを履修してから「数学基礎」を履修させることも考えられる。このときには，数学的な道具を既に学んできているのであるから，発展的な学習も可能となる。本稿は後者の場合の例である。

2．年度途中の利息はいくら？

「数学基礎」の教科書には複利法による元利合計が懇切丁寧に示されている。

すなわち，簡単な例のあとに次の式がある。

［元利合計］=［元金］×（1+［利率］）$^{[期間]}$

元利合計を S，元金を A，利率を r，期間を n とすると

$$S = A(1+r)^n$$

と書いてきたのが従来の数学教育だったと思う（式を１つの文字に置き換えることによって思考や計算が容易に進められる良さを知らしめる）のだが，中学校の新学習指導要領の減量化に伴い，この辺にまで配慮されていることに感慨を覚えた。

では，期間の途中での元利合計 S は，どうなるのだろうか。

１つは，(現行の) 商業科の教科書にあるように，「貸借期間に，１期に満たない端数が含まれているときには，この端数の部分については単利法で計算する。」すなわち，端数期間が月数で示される場合の，S を求める式として次の式が示されている。

$$S = A(1+r)^n \times \left(1+[\text{年利率}]\times\frac{\text{端数月数}}{12}\right)$$

例１　40万円を年利率 6%，半年１期の複利で４年９か月間預ければ，元利合計はいくらか。
ただし，端数期間は単利法による。

解　半年１期であるから，１期の利率は $6\% \div 2 = 3\%$。
４年６か月は９期であり，端数月数は３か月。
よって

$$400{,}000 \times \left(1+\frac{0.06}{2}\right)^9 \times \left(1+\frac{0.06}{2}\times\frac{3}{6}\right)$$
$= 529{,}738$　　　L L ①

（「計算事務」下　実教出版　から）

3．数学的？利息の計算法

数学Ⅱの指数法則の拡張で，指数法則は有理数でも成り立つことを学んでいる。

このことから，例１で，ただし書きがないとき，

期数をと9.5する方が合理的（数学的）と考えれば，例１を（半年の）利率 3%で9.5期として

$$400,000\times(1+0.03)^{9.5}=529,680 \qquad \cdots\cdots②$$

これは①の計算より58円安くなる。

さらに，年利 6%で4.75年として計算すると

$$400,000\times(1+0.06)^{4.75}=527,549 \qquad \cdots\cdots③$$

これは①の計算より2,189円安くなる。

（注意　表計算ソフトや関数電卓ならば，4.75乗もそのまま求められるし，$\sqrt{\ }$ キーがあれば次のようにしても求められる。たとえば，1.03^{18}を廉価な，累乗計算機能のない電卓で計算するには，

$1.03\times=\times=\times=\times1.03\times=$と入力すればよい。

・ $400,000\times(1+0.03)^{9.5}$
$=400,000\times\sqrt{(1+0.03)^{18}}$

・ $400,000\times(1+0.06)^{4.75}$
$=400,000\times\sqrt{\sqrt{(1+0.06)^{19}}}$ ）

4. さらに細かく見ていくと“e”が現われてくる。

元金を A，年利率を12%とすると，

１年後の元利合計は

$$A(1+0.12)=1.12A$$

上記３の利息計算法では

・半年での利率を6%，１年を２期とすると

１年後の元利合計は

$$A(1+0.06)^2=1.1236A$$

・３か月での利率を3%，１年を４期とすると

１年後の元利合計は

$$A(1+0.03)^4=1.1255A$$

・１か月での利率を1%，１年を12期とすると

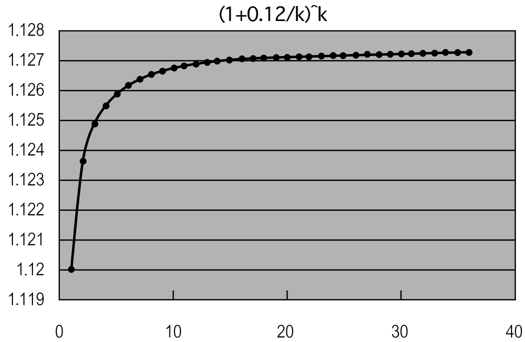
１年後の元利合計は

$$A(1+0.01)^{12}=1.1268A$$

・１日での利息を $\frac{12}{365}$%，１年を365期とすると

１年後の元利合計は

$$A\left(1+\frac{0.12}{365}\right)^{365}=1.1275A$$



このような方法で１年間の期数を増やしていくと，当然，１年後の元利合計も増えていく。ただ，その増え方はいつまでも増加するのではなく，上の図のようにある有限な値に収束することが予想できる。すなわち，１年でk回の複利法での元利合計

$$A\left(1+\frac{0.12}{k}\right)^k$$

の値は，kの値を限りなく大きくしたとき，ある定数に収束することが予想できる。

ここで，$n=\frac{k}{0.12}$とおくと

$$\left(1+\frac{0.12}{k}\right)^k=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{k}{0.12}}\right)^{\frac{k}{0.12}}\right]^{0.12}$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{0.12}$$

となるから，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$の値を求めることに帰結する。

二項定理（新課程でも数学 A；ただし，「順列と組合せ」の章で学ぶ）により

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n}+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+{}_n\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

よって，$n\to\infty$のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

は収束することが予想できるから，その値を定数$e(=2.7182\cdots)$とおくことができる。

（注意　二項展開 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ による収束は大変遅い。）

5. eの活躍

年利率12%，１年でk回の複利法での元利合計

$$A\left(1+\frac{0.12}{k}\right)^k=A\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{0.12}\quad\left(n=\frac{k}{0.12}\right)$$

は，$k\to\infty$　のとき　$n\to\infty$となるから

$$A\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{0.12}\to Ae^{0.12}$$

ここで，$e^{0.12}=1.1275$。すなわち，年利12%を$k\to\infty$として計算する連続的な複利法では，１年後には約12.75%に相当する。

利率 r，期数 k 回での複利法での元利合計

$$A\left(1+\frac{r}{k}\right)^k$$

において，$k \to \infty$ とすれば連続的な複利法での算式

$$Ae^r$$

を得る。

よって，利率 r，期数 t での元利合計

$$A(t)=A(1+r)^t$$

は，連続的な複利法では

$$A(t)=Ae^{r' t}$$

になる。

また，ここで，底 e を変換した次の形もよく用いられる。

$$A(t)=Ab^{\frac{t}{R}}$$

ただし，$A(0)=A$ が b 倍になる期間を R とする。

参考　$\varDelta=\exp(r)-(1+r)$ は次のようになる。

$1+r$	$\exp(r)$	$\varDelta$
1.01	1.0101	0.00004
1.02	1.0202	0.0002
1.03	1.0305	0.0005
1.04	1.0408	0.0008
1.05	1.0513	0.0013
1.06	1.0618	0.0018
1.07	1.0725	0.0025
1.08	1.0833	0.0033
1.09	1.0942	0.0042
1.10	1.1052	0.0052
1.12	1.1275	0.0075
1.15	1.1618	0.0118
1.16	1.1735	0.0135
1.18	1.1972	0.0172
1.20	1.2214	0.0214

例２　ある種のバクテリアは５日ごとに２倍になるとすると，

$$A(t)=Ab^{\frac{t}{R}}=A2^{\frac{t}{5}}$$
$$=A\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^t=A(1.15)^t \qquad \boxed{\sqrt[5]{2}=1.15}$$
$$=A(1+0.15)^t$$

よって，１日あたりの増加率は15%

逆に，１日あたりの増加率が r のとき，最初の量の２倍の量になる期間 t は

$$Ae^{rt}=2A$$
$$rt=\log_e 2$$

ゆえに　$t=\dfrac{\log_e 2}{r}=\dfrac{0.693}{r}$

例３　放射性同位元素の半減期が５日のとき，

$$A(t)=Ab^{\frac{t}{R}}=A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$$
$$=A\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\right\}^t=A(0.87)^t$$
$$=A(1-0.13)^t$$

よって，１日あたりの崩壊率は13%

６．新教育課程では

新課程では，「数列」は「数学Ｂ」であるから，「数学Ⅱ」→「数学Ｂ（数列）」→「数学Ⅲ」の順に指導すると，Napier数の導入が数列の項で可能となり，対数関数（指数関数）の微分法は，その説明に集中できるようになる（かもしれない）。

また，「数学基礎」は課題研究や総合的な学習の題材の宝庫としても，数学メインストリートの街路灯としても役立つのではないだろうか。例１は商業，例２は生物，例３は物理とまさに総合的な学習の形態になっているが，その底流にあるのは多様な現象面を表す数式であり，そこには商業も生物も物理もなく，１つの数式で表現される多様な世界である。このように端的な抽象化を生徒に経験させることもよいのではないだろうか。

本稿は，現行課程で昨年行った選択者向けの授業に基づいてまとめたものである。実際には，期数と数列の n とのズレの指導だけでも20分は費やしている。諸兄のご批評をお願いしたい。