報告

# 僕にとっての数学と，数学オリンピックでの体験

筑波大学附属駒場高等学校１年　尾高悠志

## １．数学との関わり合い

僕が数学オリンピックに興味を持ったのは，小学生高学年の頃。小５の終わりに日本に帰国（マレーシアにいた）し，中学受験のため，ある塾に入ったが，そこでは，雑誌で，数学オリンピックでスゴイ大活躍をした塾の先輩のＮさんが紹介されていた。その時は，「かっこいいなあ」という印象を受けたのを覚えている。と同時に，算数が好きだった僕は，「受けようかなあ」ぐらいに思った。「世界」大会というのが，Act Locally的な当時の自分には魅力だった。ちなみに，Ｎさんは中３で銀，高校に入ってからは３回連続の金メダルという偉人である！！

その後，僕は筑波大学附属駒場中学校に入学した。数学に関しては，第１に，おぼろげにも数学オリンピックという響きにあこがれていたこと，第２に，幼少のときに逝ってしまった大好きな祖父が数学関係の仕事をしていたことがあって，特別な意識をすでに持っていたと思う。

当時の僕は，中学の教科書ドリルをやっていた。他の人たちと差をつけたかった。目標は，中学に入学するまでに中学３年までをバーっと終らすこと！とにかく，ほかの人たちに比べて得意になるというのが目的で，数学をしていた。母に少し習ったりもしながら。カリカリ･･･。

しかし，つまらない。数学者って，毎日正の数や負の数の計算しているのか・・・。先が見えない。もうどうでもいいやこんなもん。やる気失せた～。そんなとき，母に「数学オリンピックメダリストが数学を教えてくれる所があるわよ。行かない？」と言われ，その「数学オリンピック」の言葉につられ，入ってみた。「数学オリンピックの対策とかしてる所とは違いますけど・・」って言われたが，とにかく入ってみた。４日間の講習を受けてみた。え？面白い！何これ？そこでの数学は，いままで家でしていたものとは違う。難しいことをやっていたが，なんとかわかる内容であった。群論の初歩を教えてくれたり，ゲームの必勝法を考えたり・・・自分で深く考えられるものばかり！

結局，そこには中３まで通っていたが，早すぎるぐらいの進度で，最終的には大学の数学科で専門的に習うようなものをやっていた。わかる率は非常に少ない。それは意味ないじゃんと思われるかもしれないが，僕は数学の「風景」を楽しんだし，「数学」を楽しめた。「数学」って，こんな凄いものなのか！僕は，その面白さを追及するのに必要な「道具」として，中高数学の大半を，そのときに一気にマスターした。そのとき，「教科書ドリル」だけで先取りした数学を学んだとしたら，間違いなく今の自分はない。そして，数学オリンピックも本大会などの深さまで頭をつっこんだ感じだったので，興味を持ち，いろいろな研究もしながら受け続けることができた。

「数学ほど，その学術的活動に自由さを持つものはない」というカントール（確か彼だった）の言葉も理解できるようになった。自然と，他人との相対的な実力差が目的の数学から，楽しむ数学をするようになった。未解決問題を何か月も考えたり，作ったりした。(P.S参照)

そして，遂に夢が実現する。数学オリンピック世界大会に行けることになった。

## ２．夢の舞台

このアメリカ大会は，僕にとって初めてのIMO Lifeでした（予選落ち，本選落ちを体験したが)。ここでは，日にちを追ってIMOを振り返ってみる。

ワシントンでは，コンテストの日までは，まだ時差（と酔い）の疲れがあってボーっと過ごしてしまった。

試験日１日目。試験は，１日４時間半で３問証明問題を解く。２日間で，計６問。

試験場は，ものすごく大きい体育館だった。

１日目は１・２を完全に，３の部分でも少し部分点を貰えると思った。２日目は４・６を完全に，５を部分的に解いたと思っていた。試験が終わってから最後までは結構交流もし，(最終日の夜なんかは1:

**第42回IMOアメリカ大会（2001）問題**

第１日目：７月８日（試験時間４時間30分　各題７点）

１．鋭角三角形 ABC の外心を O とする。 A から辺 BC に引いた垂線の足を P とする。 $\angle BCA = \angle ABC + 30^\circ$のとき， $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$を示せ。

２．任意の正の実数 $a$， $b$， $c$ に対し，

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} = 1$$

を示せ。

３．21人の女子と21人の男子が数学のコンテストに参加した。その結果は以下のようになった。

- どの参加者も高々６題の問題を解いた。
- どの女子１人と男子１人の組についても，その女子と男子の両方が解いた問題が少なくとも１題あった。

このとき，３人以上の女子と３人以上の男子が解いた問題が，少なくとも１題は存在することを示せ。

第２日目：７月８日（試験時間４時間30分　各題７点）

４． $n$ を１より大きな奇数とし， $k_1, k_2, \cdots, k_n$ を与えられた整数とする。 $n$ ！個の1, 2, …, $n$ の順列 $a = (a_1, a_2, \cdots a_n)$ に対し，それぞれ，

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$$

とおく。このとき， $S(b) - S(c)$が $n$ ！で割り切れるような， ２つの異なる順列 $b, c$ が存在することを示せ。

５．三角形 ABC において， P を BC 上の点で AP が $\angle BAC$の二等分線であるものとし， Q を CA 上の点で BQ が $\angle ABC$の二等分線であるものとする。

これらが， $\angle BAC = 60^\circ$， $AB + BP = AQ + QB$ をみたすとする。

このとき，この三角形の３つの角度としては，どのような角度があり得るか。

６． $a, b, c, d$ を整数とし， $a > b > c > d > 0$ とする。これらが

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

をみたすとする。このとき， $ab + cd$ は素数でないことを示せ。

**※（財）数学オリンピック財団より掲載許可を得ています。**

30〜6:00まで多国籍でサッカーをした。）英語力不足を悔やみもしたが，楽しかった。IMOは，やはり試験だけではない国際交流などの大きな価値があった。Act Globallyである。それに，輪の広い「数学仲間」を得られたことも最高の幸せである（数学的活動の孤独さから開放された！）。

## ３．最後に

やはり僕はツイていた。つまり，数学には教科書では絶対学べないような「自由に問題を考えたりするような楽しみのある数学の領域（それでいて微積なんかよりずっとわかりやすい。例えば初等整数論や離散数学など）」，あるいは「深い深い数学；現代数学」に触れることの影響が強いと思う。それには，そんな本を読むなりなんなりしなくちゃならない。

もっとも，うちの学校などは中学１年の時に，フェルマーの大定理解決に関するビデオを見せてもらったり，授業で整数論を扱ったり，難しい課題を与えられたりして，それも上記のようなものに触れる機会となっていてよかった。

「９月24日終了の人間講座『天才の栄光と挫折』(NHK教育）は，天才数学者の生き方がテーマ。情熱家だがおっちょこちょいのハミルトン，不運続きでも一途に研究を続けた関孝和。皆，何かに取り付かれたかのように打ち込む姿が美しかった。数学が大の苦手の自分だが，この番組を通して見て，数学に対する見方が変わったのは確かだ。」

これは，10月５日付けの朝日新聞朝刊「はがき通信」に山形の高校生が寄せたものだ。彼の文章に僕は深く共感した。

最後に，僕を支えてくださった方々に心からお礼を言いたいです。そして，この「数学オリンピックの場」がもっともっと広くなり，具体的に言えば，受験者が増えることを願っています。来年はイギリス大会，その後はなんと日本大会です。

P.S

今，解いてみたい問題：

$m$ を10の冪でない自然数とし， $f(x)$を $m$ の $x$ 乗の各桁の和とする。 $f$ は振動せずに発散すると言えるか？（ $m$ が10と互いに素でない場合は解けました）。

$x \in \boldsymbol{N}, f(x) = m^x$ で，例えば $m = 3$ のとき

$$f(1) = 3^1 = 3 \Rightarrow 3$$
$$f(2) = 3^2 = 9 \Rightarrow 9$$
$$f(3) = 3^3 = 27 \Rightarrow 2 + 7 = 9$$
$$f(4) = 3^4 = 81 \Rightarrow 8 + 1 = 9$$