

中学校から高等学校へ移行した内容

実教出版株式会社編修部編

じっきょう数学資料ではこれまでも、中学校から高等学校へ移行した具体的な内容や削除される内容について特集してきた。特集記事では、これらの内容の中学校における指導法を、多くの中学の先生方に熱き思いで寄せていただいた。どの指導法も、中学の先生方にとってはとても愛着のある内容であり、『高校の先生、どうかよろしくお願いしますね』という気持ちが読みとれた。

さて、これまでの日本の数学教育では、小学校、中学校、高等学校の各学校段階で教育内容がそれぞれの発達段階に合わせてスパイラルに重なり合うような指導を行ってきた。しかし、今回の改訂では、学校5日制による時間数の縮減と内容の厳選により、高等学校へ移行したものも多い。たとえば、「1次不等式の解法」では、中学校で数の大小関係を不等号で表すだけで、解法については高等学校で指導することになり、とぎれとぎれの指導になってしまうという感否めない。そのため、高校の教師は中学校での指導法について一層の研究を行う必要があり、生徒の発達段階や数学の習熟の違いが大きい高校では、新しい指導法の開発が急がれるだろう。

そこで本資料では、実施が目前に迫った新学習指導要領の内容のうち、中学から移行する内容をもう一度表で紹介し、現場の先生の視点に立ち、教科書

での扱いについて特集を組んでみた。

なお、次の表は、中学校から高等学校へ移行した内容と中学校で削除された内容である。

【中学校から高等学校へ移行した内容】

これまでの中学校で指導してきた内容	高等学校
数と集合と四則 (中1)	数学。
1元1次不等式 (中2)	数学。
有理数、無理数の用語 (中3)	数学。
2次方程式の解の公式 (中3)	数学。
三角形の重心 (中2)	数学A
円の性質 (中3)	数学A
<ul style="list-style-type: none"> • 2つの円の性質 • 円周角の定理の逆 • 円に内接する四角形など 	
相似な図形の面積比、体積比 (中3)	
球の体積、表面積 (中3)	数学。
資料の整理、標本調査 (中2)	数学基礎 数学B、数学C
いろいろな事象と関数 (中3)	数学。

() 内は現在の指導学年

【中学校で削除された内容】

平行移動、回転移動、対称移動 (中1)	(中1)
立体の切断、投影 (中1)	(中1)
条件を満たす図形 (中1)	(中1)
数の表現 (中2)	(中2)
<ul style="list-style-type: none"> • 近似値、2進法、流れ図 	
平方根表 (中3)	(中3)

() 内は現在の指導学年

も く じ

資料

中学校から高等学校へ移行した内容…………… 1

実践記録

数学基礎の内容について…………… 8

報告

僕にとっての数学と、数学オリンピックでの体験… 10

学校紹介

東京都立つばさ総合高等学校…………… 12

談話室

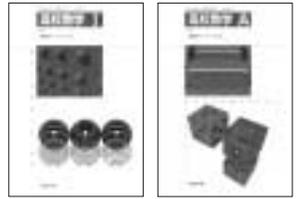
わたしの数学史 (中山千夏) …………… 15

ワンポイント教材

関数のグラフ…………… 16

[高校数学] の指導例

解の公式，発展教材の扱いについて



新教育課程に向けて，新しい教科書作りが進められている。

これからの学校教育の在り方として，[ゆとり] の中で自ら学び自ら考える力などの [生きる力] の育成を基本とした今回の改定では，学校5日制の導入とも関係して，内容を精選して，削減したことの影響は大きい。

中学校から高等学校へ移行した内容のおもなものは，「2次方程式の解の公式」と「1次不等式」である。これらの内容の指導については，つい今までのような気持ちで授業を進めてしまいがちなので，経験のある先生であっても，十分な注意が必要である。特に，不等式の指導については，入学してくる生徒は，単なる大小を表す記号としかとらえていないわけであるから，「不等式」としての考え方，扱い方，解の意味などについて，これまで中学校で教えていたように，丁寧に指導しなければならない。

次に，2次方程式の解の公式と，発展的な考え方の指導について一例を述べてみたい。

1. 2次方程式の解の公式

2次方程式の解の公式を暗記して， a ， b ， c に値を代入し，解を求める練習も大切である。しかし，なぜ公式を作るのか，どうやって作るのかということも「数学」の授業としては大変重要である。

中学校では，2次方程式の解き方について，

「 $ax^2 = b$ 及び， $x^2 + px + q = 0$ については左辺が公式を利用して因数分解して解くことのできるものを取り上げることを原則とする。因数分解を用いて解くことができないものについては， x の係数が，偶数である簡単な例を取り上げ，平方の形に変形して解く方法があることを知ることにとどめるものとする。」ということになっているので，「数学。」では，中学校の復習から入り， x の係数が奇数の場合でも同様に解けることを学び，練習を重ねているうちに，いっそうのこと公式を作っておけば便利であると，公式の必要性を感じさせ，解の公式を導くことになる。

係数が整数の場合から，文字係数の

$$ax^2 + bx + c = 0$$

に一般化するには大きな飛躍がある。

文字になると急に難しくなる。

係数が整数の場合から文字係数への一般化のギャップを少しでも小さくする一番良い方法は，数の場合をよく理解させたうえで，横に文字の場合を並べて示してやることである。

このときの係数は，3つの整数が異なっているほうがよく， x^2 の係数は1ではなく， x の係数は奇数がよいことなどを考慮すると(3, 5, 1)，(3, 7, 1)などが適当である。

まず $3x^2 + 5x + 1 = 0$ と $ax^2 + bx + c = 0$ を併記し，解の公式を作ることが目標であることを確認したうえで $3x^2 + 5x + 1 = 0$ を解き，復習しながらその横に解の公式を導いていく。

実教出版の「高校数学。」では，2次方程式の解き方について，中学校の復習とダブらせながら，3ページを費やしたあと，図1のようにB5判のページをいっぱいに使って，カラフルに示している。

このようにすれば，よほどのことがない限りつまづくことは考えられない。

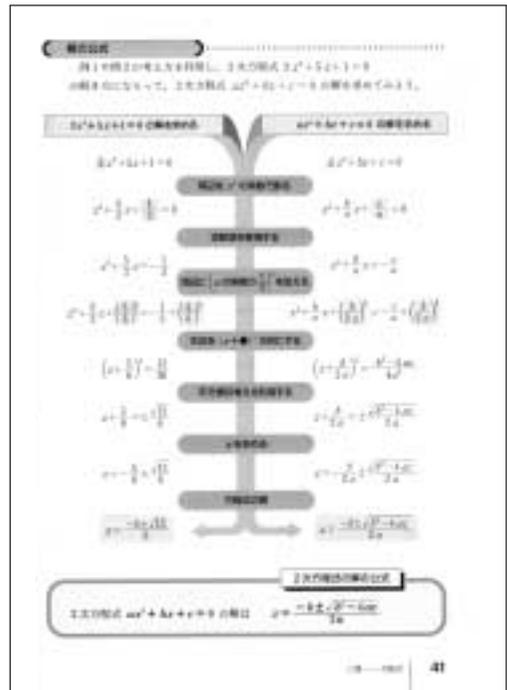


図 1

2. 発展的な考え方の指導

今回の改定で1つ心配なことは、学校5日制の導入その他の理由で、内容が精選、削減されたことである。

中学校の内容も、前記した2次方程式の解の公式、1次不等式をはじめ、数の集合と四則、三角形の重心、円の性質の一部、相似な図形の面積比、球の体積・表面積、資料の整理・標本調査その他いくつかの内容が高等学校に移行した。したがって、今までの高等学校の内容が減ることになるが、このことによって、単純に学力の低下に繋がるようなことがあってはならない。精選されたことによって内容は減っても、学力は落ちないようにするには、教材の取り上げ方とその扱い方に、いっそうの工夫が必要である。

実教出版の「高校数学」シリーズでは、随所に生徒が関心を示すような教材を取り上げたうえ、それが発展的に扱えるような工夫をした。

特に、各章の「とびら」は見開き2ページを使い、左ページにはその章に関係する興味ある話題を取り上げ、右ページでは、それを発展させたものやパズルなどを取り上げた。強い関心を示した生徒にはさらに深く学ぶことができるようにしてある。

また、各章末の「ひろば」も、その章の学習に関

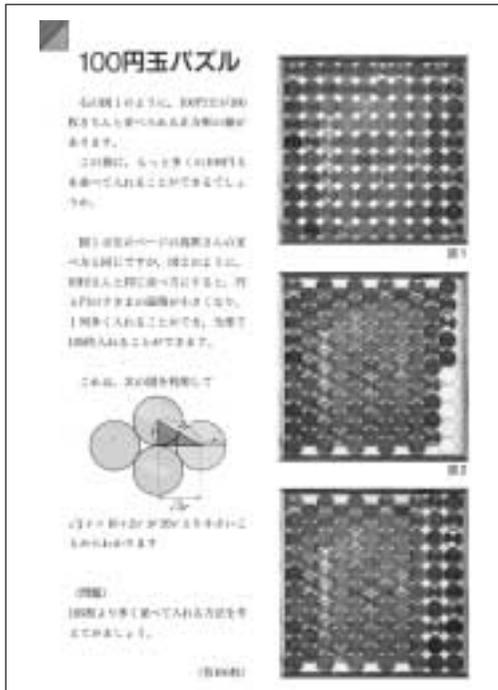


図 2 第1章 数と式のとびら右ページ

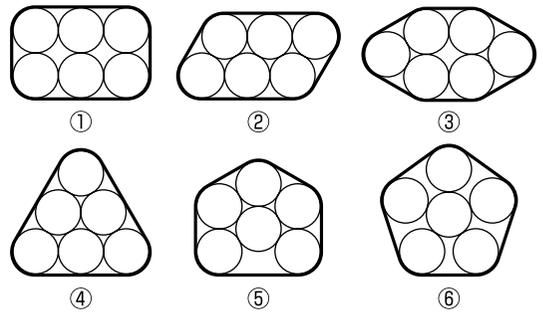


図 3

連した興味深いものを取り上げ、数学に対する興味や関心を引き出すような工夫をし、学ぶことの楽しさや充実感を味わいながら、考える力が伸びるようにした。

発展的な考え方の一例として、次に「高校数学I」1章 数と式の「とびら」を紹介する(図2)。

左ページでは「あき缶のしばり方」を取り上げ、4本のあき缶を縛るには、正方形に並べて縛ると、ひし形に並べて縛るのでは、どちらがしっかり縛れるかを式を使って調べさせた。これは、さらに6本のあき缶しばりへと発展させられる。

6本の場合、上記の図3の①、②、③、④などの縛り方が考えられるが、缶の半径を r として調べてみるといずれも縛る紐の長さは

$$2\pi r + 12r$$

となる。実際に紐を掛けて強く引っ張ってみると、なんと図⑤の形になったときが一番きちん縛れる。このときの紐の長さを調べると

$$2\pi r + 8r + 2\sqrt{3}r$$

で、こちらのほうが紐は短い。

一般の生徒には無理であるが、三角関数のサインの3倍角の公式が使える生徒がいれば、図⑥より図⑤の方が紐が短くて済むことも計算できる。

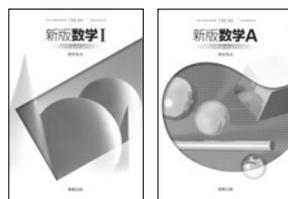
右ページは100円玉パズル。100円玉が縦横きちんと並べて100枚入る正方形の箱に、工夫すれば105枚、さらに工夫すればもっと多く入れられるパズル。

左ページの考え方を発展させれば100枚より多く入る理由を考えさせることができる。さらに、このように、きちんと並べたときよりも多く入れることができる箱は、最小でも、縦横それぞれ何枚入りの箱か。1次不等式の問題として考えさせることも楽しい。

このように、良い教材を取り上げ、対象とする生徒のレベルに合わせて発展的な指導を適切に行うことは非常に重要なことと考えている。

[新版数学] の指導例

不等式の扱いについて



1. 中学校での不等式の扱い

現行の指導要領では、小学校で不等号が扱われ、中学校2年で1元1次不等式が扱われていた。ところが、新指導要領では、不等号は小学校の内容から削除され、中学校では、数の大小関係に関連させて不等号を説明し、関数の変域を表すために不等号を用いる程度となった。現行中学校2年での1元1次不等式の解法は、全面的に高等学校に移行された。

新指導要領によれば、中学校第1学年の内容は次の通りである。

A. 数と式

[用語・記号]

自然数 符号 絶対値 $<$ $>$ \leq \geq

C. 数量関係

「比例・反比例と座標の意味」の中で

[用語・記号]

変数 変域

すなわち、中学校1年での扱いは a を整数の集合の要素とすると、

$a \geq 0$ は「 a は0以上の整数である。」

と読み取ることができ、また、

「3以下の整数」は $a \leq 3$

と表現することができることを示す程度になる。

2. 高等学校での不等式の扱い

新課程では、高等学校の「数学I」の1次不等式で、はじめて不等式を学ぶことになる。従って、高等学校では1次不等式の解法のみならず、不等式の性質、不等式とその解の意味などについて、中学校でなされてきたような丁寧な指導をする必要がある。特に、高等学校の教師にとって、今までは当然（中学校で学んできた学習内容）のこととして扱ってきた教材であるから、この点を特に留意して指導していただきたい。

週5日制の導入に伴い、中学校での数学の学習内容が約3割削減されたと言われている。その一方で、高等学校での数学の最終到達目標は現行の学習

指導要領とほぼ同じレベルに保たれている。このため、高等学校での学習内容は多くなっていることから、学習内容の精選と効率的な教材を配置した指導法が求められる。不等式については現行の中学校2年のレベルからはじめる必要がある、これを高等学校らしく学習内容を精選し、指導する必要がある。

上記のことをうけて、「新版数学I」では、2章の不等式で基礎的なことがらを丁寧に段階を踏んでいけるように、教材の配列に留意した。

以下、不等式についていくつかの例を順に示してみたい。

○不等号

数の大小関係に関連して、導入では不等号とその意味との対応関係を再確認させる必要がある。特に、不等号の意味については注意が必要である。

不等号	例	意味
$<$	$a < 120$	a は120より小さい a は120未満
\leq	$a \leq 120$	a は120以下
$>$	$a > 120$	a は120より大きい
\geq	$a \geq 120$	a は120以上

○不等式と大小関係

前項の不等式では「不等号の意味と用法」を確認したので、次は「不等式」の導入である。

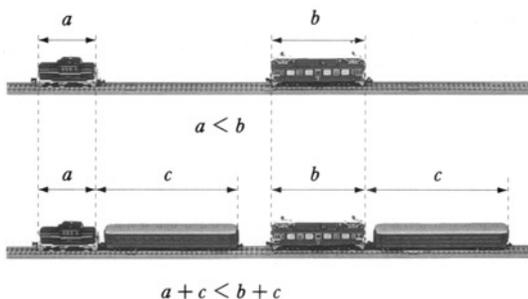


図1

大小関係についての条件を式に表したものの導入として、車両の長さの比較を取り上げた。

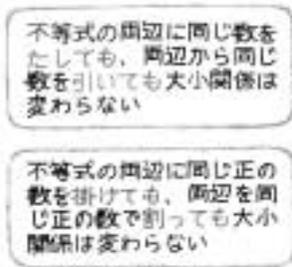
図1のような、身近な題材での導入によって、生徒の数学に対する興味の動機づけを図った。

○不等式の性質

- (1) $a+c < b+c$, $a-c < b-c$
 (2) $c > 0$ ならば $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
 (3) $c < 0$ ならば $ac > bc$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

不等式の性質は、一般的には上のように与えて議論を進めるのが普通である。しかし、教科書では次のような説明も加えた。

(1) (2) については



(3) については

$6 < 8$

の両辺に -2 を掛けると

$$6 \times (-2) = -12$$

$$8 \times (-2) = -16$$

よって、

$$6 \times (-2) > 8 \times (-2)$$

$6 < 8$

の両辺を -2 で割ると

$$\frac{6}{-2} = -3, \quad \frac{8}{-2} = -4$$

よって、

$$\frac{6}{-2} > \frac{8}{-2}$$

特に、(3) のような不等号の向きが逆になることの理解は、はじめて学ぶ生徒にとって、必ずしも容易ではないと考えられる。したがって、このように具体的な数値で計算してみせる丁寧な指導が必要である。

ここでは、是非こうした配慮によって、生徒が無理なく不等式の性質を理解できるように指導して欲しい。

○1次不等式

不等式の解は、次のような具体例を扱った。

「不等式 $x+3 > 5$ ……①

について

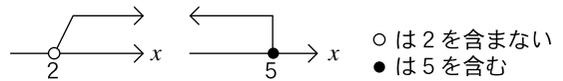
$x < 2$ のとき①を満たさない。

$x > 2$ のとき①を満たす。」

このことを、具体的には右の図のように示した。

x	$x+3 > 5$	
1.8	$4.8 < 5$	X
1.9	$4.9 < 5$	X
2.0	$5.0 = 5$	X
2.1	$5.1 > 5$	O
2.2	$5.2 > 5$	O

このような具体的な説明の後で、「一般に、不等式を満たす x の値を不等式の解といい、不等式のすべての解を求めることを不等式を解くという。」と定義すれば、生徒も理解しやすいのではないだろうか。



また、不等式を満たす x の値の範囲についても、たとえば、「2 より大きい」、「5 より小さい」を数直線上に図示するようにした。

このことは、現行では中学校ですでに学んだ内容であるため、教える側からは平易すぎるように感じるかも知れない。しかし、「有理数、無理数」という用語や「四則演算の可能性」も高等学校に移行される。1章の数と式でも数直線と実数との1対1対応の理解度を確認しながら指導する必要があるから、数直線の指導は丁寧にして欲しい。

移項についても同様である。



3. おわりに

「新版数学」シリーズでは、以上のように生徒にとって身近な題材を扱うとともに、なるべく具体的な数値で説明するなどの配慮をした。

なお、新指導要領では教科書もフルカラーとなるが、色の表現を有効に使い、不等式の理解がより一層図れるように編修した。



球の体積の扱いについて

新課程においては中学校から多くの内容が高等学校に移行してくる。これらの内容は、これまで高等学校では十分に実践されていないことから、各学校で工夫した指導が望まれる。また、理系進学者の高等学校数学の到達点は現行より下げないことを考慮すると多くの課題がある。

ここではまず、「球の体積」の指導について一例を述べてみたい。

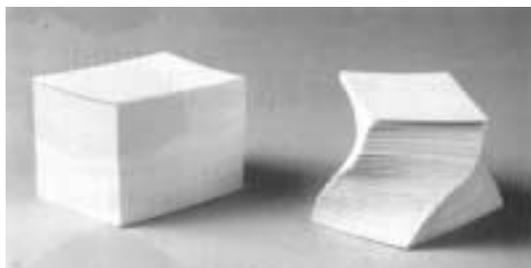
1. 球の体積

球の体積はこれまで中学校の学習内容として扱われてきた。そのため、多くの中学生は、球の体積が $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ であることは知っている。しかし「なぜ球の体積が $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ であるのか」は疑問を抱いていた。

今回の改定では、高等学校での学習内容として位置付けられたため、生徒の興味・関心に応じて、球の体積の指導方法は多様な試みがなされると思われる。

新教科書「数学Ⅰ」では、高校1年生が無理なく学習できる発展教材として、17世紀のイタリアの数学者カバリエリの原理を用いて、球の体積の求め方を紹介した。

カバリエリの原理は、「2つの立体図形を、一定な平面に平行な平面で切ったとき、切り口の図形の面積がつねに等しいならば、2つの立体の体積は等しい」という内容である。教科書では「研究」として、下のような写真で生徒にイメージしやすい工夫をした。



カバリエリの原理を用いると、球の体積を求める概要は図1のようになる。

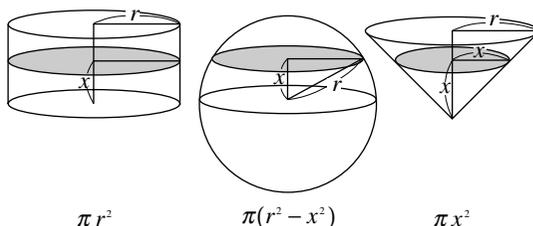


図 1

上のような直円柱、球（半球）、直円錐の断面積は

$$\text{直円柱} \quad \pi r^2$$

$$\text{球} \quad \pi(r^2 - x^2)$$

$$\text{直円錐} \quad \pi x^2$$

となる。このことから

$$\pi(r^2 - x^2) = \pi r^2 - \pi x^2$$

すなわち、球（半球）の断面積と直円柱から直円錐をくりぬいてできるすり鉢形の立体の断面積は、つねに等しいことになる。ここでカバリエリの原理を用いれば、この2つの立体の体積は等しくなるから（半球の体積）＝（直円柱の体積）－（直円錐の体積）

$$= \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

したがって、半径 r の球の体積は $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ となる。



図 2

教科書では扱わなかったが、参考としてアルキメデスの方法も紹介してみよう。

アルキメデス（Archimedes, ギリシア, シチリア, 前287?～前212?）は、区分求積的な極限の概念を用いて球の表面積を導いた後、球の体積を求めている。

彼は、自分の墓石に球の体積の定理を刻みたいと願ってそれが果たされたという。

まず、図3の球帯の曲面の面積を最初に公式化している。

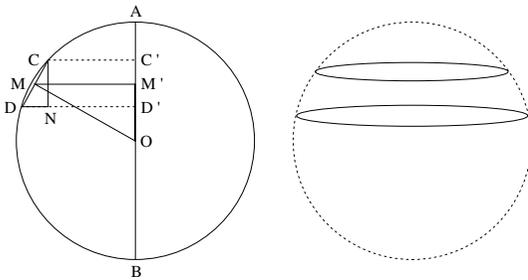


図 3

直径を AB とする球 O において、弧 AB を n 等分し、その1つの弧 CD を直径 AB のまわりに回転してできる球帯の面積を、弦 CD を直径 AB のまわりに回転してできる直円錐台の側面積 T に近似した。

弦 CD の中点を M とし、C, D, M から AB に引いた垂線との交点をそれぞれ C', D', M' とする。また、C から DD' に引いた垂線との交点を N とする。

ここで、 $\triangle CDN \sim \triangle M'OM$ よって、 $\frac{CN}{CD} = \frac{MM'}{MO}$
ゆえに、 $MM' \cdot CD = MO \cdot CN$

したがって、直円錐台の側面積 T は

$$\begin{aligned} T &= \pi(CC' + DD') \cdot CD \\ &= 2\pi MM' \cdot CD \\ &= 2\pi MO \cdot CN \\ &= 2\pi MO \cdot C'D' \quad \text{①} \end{aligned}$$

球の半径を r とすると

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき, } MO \rightarrow r$$

となり、 T は球帯の面積に近づく。以上の考察から、①より、「球帯の曲面の面積は、大円の周 $2\pi r$ と高さ $C'D'$ の積」となる。この結果から、球の表面積 S は

$$S = 2\pi r \cdot AB = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

として導いた。さらに、球の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}Sr = \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

として求めている。

2. 既存の内容での工夫

これまでは、「球の体積」について述べたが、新教科書では、これまで扱っていた内容を精査し、洗練したものに仕上げた。例えば、2次関数の定義域が与えられた グラフが変化する場合の最大・最小 では、一歩踏み込んだ説明が可能となる図4を用意している。

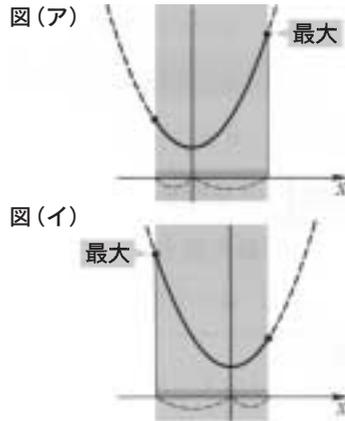


図 4

この図から、まとめとして、下に凸のグラフでは、軸から遠いところで最大となり、軸に近いところで最小となることが教師側で説明可能となるであろう。

今回の改定では、「学力水準をいかに維持するか」が課題とされている。生徒にとっては、基礎基本を習得するために、精選された問題の演習が不可欠である。そのため、これまでの教科書にあった章末問題A・章末問題Bに加えて、各章にわたって 例題チェック問題 のページを新設し、基本的な問題演習の充実が努めた。これにより、生徒が無理なく自己評価が可能となる。

10日あればいい2003大学入試短期集中ゼミシリーズ

5月発行予定

●最新数学。+A -必須例題99-
A5/84p (別解24p)

予価525円

●最新数学[-必須例題88-
A5/76p (別解24p)

予価525円

●最新数学B-必須例題69-
A5/68p (別解24p)

予価525円

●数学]+C -必須例題88-
A5/88p (別解32p)

予価714円

●受験の基礎最新数学。・A・[・B -必須例題122-
A5/96p (別解32p)

予価630円

●最新数学。+A演習
A5/60p (別解48p)

予価525円

●最新数学[+B演習
A5/64p (別解64p)

予価525円

※表示価格は5%税込です