ワンポイント教材

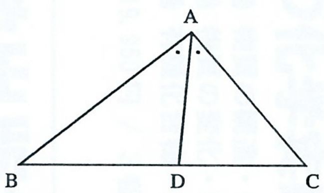
三角形の角の二等分線・内心・内分点 外分点までの長さの美しさ

北杜市立甲陵高等学校　八巻　専文

三角形の角の二等分線の長さを求める方法は，かなり計算が複雑である。でもその結果はとてもきれいな形をしている。その延長として内心Iまでの距離と，$m:n$に内分・外分した点までの距離もとても興味ある結果である。

◎三角形の角の二等分線の長さ

角の二等分線の長さの求め方は面積の和か余弦定理を２回使うかのいずれかであるが，結構複雑である。辺の長さが $AB=c, BC=a, CA=b, \angle A$ の二等分線と BC との交点を D とする。AD の長さが三辺の長さで表されるのには生徒も驚きである。



三角形ABDの余弦定理より

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B$$

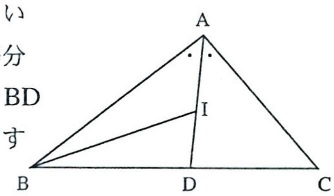
$$=c^2+\left(\frac{ca}{c+b}\right)^2-2c\frac{ca}{c+a}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=\frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

よって $AD=\dfrac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}$

◎三角形の頂点から内心までの長さ

二等分線に関連して頂点から内心までの距離もきれいな形をしている。BIは∠Bの二等分線よりAI: ID = AB: BDと余弦定理を利用する。



$$AI:ID=AB:BD$$

$$=c:\frac{ca}{c+b}=b+c:a$$

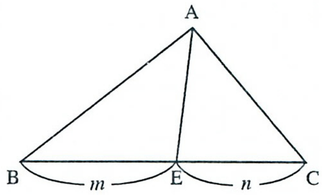
$$AI=\frac{b+c}{a+b+c}\cdot AD$$

$$=\frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{a+b+c}$$

◎三角形の頂点から$m:n$に内分した点までの長さ

$m:n$に内分した点と頂点までの距離を求めるには結構面倒な計算が必要である。

内分点をEとしたときAEの長さを求める。少々複雑でも規則正しく文字が配置されている。



$$AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cos B$$

$$=c^2+\left(\frac{ma}{m+n}\right)^2-2c\cdot\frac{ma}{m+n}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

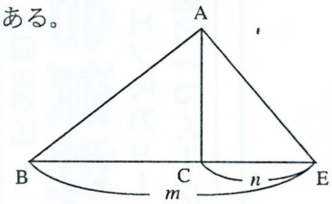
$$=\frac{(m+n)(mb^2+nc^2)-mna^2}{(m+n)^2}$$

よって $AE=\dfrac{\sqrt{(m+n)(mb^2+nc^2)-mna^2}}{m+n}$

◎三角形の頂点から$m:n$に外分した点までの長さ

生徒にとって内分は親しみやすいが外分は少々とっつきにくい点がある。

$m:n$に外分した点をEとしたときAEの長さに挑戦したところ内分点までの長さの式においてnを$-n$にするとよいことがわかった。



理屈からすると納得するがなんとも不思議だし数学の美しさがわかる。

$BE:EC=m:n \quad BE=\dfrac{ma}{m-n}$

$$AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cos B$$

$$=c^2+\left(\frac{ma}{m-n}\right)^2-2c\cdot\frac{ma}{m-n}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=\frac{(m-n)(mb^2-nc^2)+mna^2}{(m+n)^2}$$

よって $AE=\dfrac{\sqrt{(m-n)(mb^2-nc^2)+mna^2}}{m-n}$

（外分点の座標の公式と同様に内分のnを$-n$に置き換えればよい。）