「流体力学」　第4章　問題の解答

４－１　ドリル問題

問題１　式4-12から式4-13，4-14が導出できることを確認せよ．

（略解）省略

問題２　断面が一定である水平方向の管路内を流体が一定流量で流れる場合を考える．流体のエネルギー損失が無視できる場合，管路内の圧力は変化しないことについてベルヌーイの式から説明せよ．

（略解）省略

問題３　水面から水深 h[m]地点での圧力は $\rho_w gh$[Pa]で与えられることをベルヌーイの式を用いて導出せよ． ρ_w[kg/m^3]は水の密度である．

（略解）省略

問題４　図4-6の円管には水が流れており，質量流量は m=10 kg/s（一定）である．A点での質量流量 m あたりの運動エネルギーE_{aA}[J/s]，圧力エネルギーE_{bA}[J/s]，位置エネルギーE_{cA}[J/s]を計算せよ．密度を 1000kg/m^3 とする。

（略解）

$m = \rho A q = \rho \pi \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 q$ より，

流体の速度： $q = \dfrac{m}{\rho\pi(d/2)^2} = \dfrac{10}{1000 \times 3.14 \times (0.02)^2} = 7.96 \text{ m/s}$

$$E_{\mathrm{aA}} = \frac{1}{2}mq^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (7.96)^2 = 317 \text{ J/s}$$

$$E_{\mathrm{bA}} = Apq = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 pq = 3.14 \times (0.02)^2 \times 80 \times 10^3 \times 7.96 = 800 \text{ J/s}$$

$$E_{\mathrm{cA}} = mgz = 10 \times 9.8 \times 6 = 588 \text{ J/s}$$

問題５　図4-6の管路の流れにエネルギー損失がないとき，B点での圧力 p_B[Pa]を求めよ．

（略解）

ベルヌーイの式より，

$$\frac{\rho q_{\mathrm{A}}{}^2}{2} + p_{\mathrm{A}} + \rho g z_{\mathrm{A}} = \frac{\rho q_{\mathrm{B}}{}^2}{2} + p_{\mathrm{B}} + \rho g z_{\mathrm{B}}$$

q = q_A = q_B であるので，

$$p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{A}} + \rho g(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}) = 80 \times 10^3 + 1000 \times 9.8 \times (6-8) = 60.4 \times 10^3 \text{ Pa}$$

問題６　図 4-6 の管路の流れにおいて，A 点での速度ヘッド h_{vA}[m] ，圧力ヘッド h_{pA}[m]，位置ヘッド z_{A}[m]を求めよ．

（略解）

$$\text{速度ヘッド：} h_{v\mathrm{A}} = \frac{q^2}{2g} = \frac{(7.96)^2}{2\times 9.8} = 3.23\ \mathrm{m}$$

$$\text{圧力ヘッド：} h_{p\mathrm{A}} = \frac{p}{\rho g} = \frac{80\times 10^3}{1000\times 9.8} = 8.16\ \mathrm{m}$$

$$\text{位置ヘッド：} z_{\mathrm{A}} = 6\ \mathrm{m}$$

問題７　図 4-6 の管路の流れにおいて，A 点での全ヘッド H [m]を求めよ．

（略解）

$$\text{全ヘッド：} H = x_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{A}} = 3.23 + 8.16 + 6 = 17.4\ \mathrm{m}$$

問題８　図 4-6 の管路の流れにエネルギー損失がないとき，B 点での圧力ヘッド h_{pB} [m]を求めよ．

（略解）

A，B 点の速度ヘッドは等しく（$x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}}$)，全ヘッド H=17.4 m であるので，

$$h_{p\mathrm{B}} = H - (x_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{B}}) = 17.4 - (3.23 + 8) = 6.17\ \mathrm{m}$$

４－２　ドリル問題

問題１　図 4-13 の水平方向の拡がり管路の流れにおいて，管路径 d_1= 90 mm，d_2= 120 mm である．体積流量 Q = 1 m^3/min で水を流したときの圧力差(p_1 ▪▪ p_2) [Pa]を算出せよ．

（略解）

$$\text{流速の関係：} Q = \pi d_1^2 u_1 = \pi d_2^2 u_2$$

$$u_1 = \frac{Q}{\pi d_1^2} = \frac{1/60}{3.14\times(0.045)^2} = 2.62\ \mathrm{m/s}\text{，同様にして，} u_2 = 1.47\ \mathrm{m/s}$$

ベルヌーイの式より

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(u_2^2 - u_1^2\right) = \frac{1000}{2}\left(1.47^2 - 2.62^2\right) = -2352\ \mathrm{Pa}$$

問題２　図 4-14 の鉛直方向の水の流れにおいて，v_1=6 m/s，v_2=8 m/s，h=3 m であるとき，圧力差は($p_1 - p_2$) [Pa]を求めよ．

（略解）

式４－26 より圧力差は,

$$p_1 - p_2 = \rho g h + \frac{\rho}{2}\left(v_2{}^2 - v_1{}^2\right) = 1000 \times 9.8 \times 3 + \frac{1000}{2}\left(8^2 - 6^2\right) = 43400 \text{ Pa}$$

問題３　図 4-9 の先細ノズルにおいて，p_1=0.2 MPa のとき，噴流の到達高さ h［m］はいくらになるか算出せよ.

（略解）

式４－31 より噴流の到達高さは,

$$h = \frac{v_2{}^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} = \frac{0.2 \times 10^6}{1000 \times 9.8} = 20.4 \text{ m}$$

問題４　吐出圧力 p=0.3 MPa のポンプに断面が一定である管路を接続する．何 m まで水を汲み上げられるかを算出せよ．ただし，管路内の流体のエネルギー損失は無視できるものとする.

（略解）

管路内の流速は一定であり，最高点 $h_{\max}$ に汲み上げたときの圧力は 0 とみなせるので，ベルヌーイの式に当てはめると次式が成り立つ.

$$\frac{q^2}{2g} + \frac{p}{\rho_w g} = \frac{q^2}{2g} + h_{\max}$$

$$h_{\max} = \frac{p}{\rho_w g} = \frac{0.3 \times 10^6}{1000 \times 9.8} = 30.6 \text{ m}$$

問題５　図 4-11 のタンクにおいて，小孔出口での流速 q_2=10 m/s を得るために，水深 h［m］はいくら必要か算出せよ．ただし，小孔出口での損失は無視できるとする.

（略解）

式４－34 より，$q_2 = \sqrt{2gh}$ である．これより，

$$h = \frac{q_2{}^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \times 9.8} = 5.1 \text{ m}$$

問題６　水が満たされたタンクにホースを接続して，水面から 20 m 下から放出する．ホース内のエネルギー損失は無視できるとし，放出される水の流速 q [m/s]を算出せよ.

（略解）

タンク内の水の速度は 0 であり，タンク水面およびホース出口の圧力は大気に等しいと考えられるので，ベルヌーイの式に適用する.

$$\frac{0^2}{2g}+\frac{0}{\rho_w g}+h=\frac{q^2}{2g}+\frac{0}{\rho_w g} \quad \rightarrow \quad q=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times 9.8\times 20}=19.8 \text{ m/s}$$

問題７　図 4-15 に示すとおり，管路の途中で断面積が 1/10 に縮小するように喉部を設けた流路について考える．入口から大気圧状態の空気を速度 u=20 m/s で封入した場合の喉部で発生する負圧を算出せよ．空気密度 ρ_{air} = 1.3 kg/m^3 とする．

（略解）

空気を非圧縮性流体であるとし，管路入口と喉部の状態をベルヌーイの式に適応する．

$$\frac{\rho_{\mathrm{air}}{u_1}^2}{2}+0=\frac{\rho_{\mathrm{air}}\left(u_2\right)^2}{2}+p_2$$

u_2 =10 u_1 であるので，

$$p_2=-\frac{99}{2}\rho_{\mathrm{air}}{u_1}^2=-\frac{99}{2}\times 1.3\times\left(20\right)^2=-2.57\times 10^4 \text{ Pa}$$

４－３　ドリル問題

問題１　図 4-16 に示す水平管路において h_1= 360 mm，h_2 = 520 mm である．静圧 p_1 [Pa]，全圧 p_2 [Pa]，動圧 p_{D} [Pa]を算出せよ．

（略解）

静圧： $p_1=\rho_w g h_1=1000\times 9.8\times 0.36=35\times 10^2$ Pa

全圧： $p_2=\rho_w g h_2=1000\times 9.8\times 0.52=51\times 10^2$ Pa

動圧： $p_{\mathrm{D}}=p_2-p_1=5100-3530=16\times 10^2$ Pa

問題２　空気の流れる管路内に標準型ピトー静圧管を挿入したところ動圧が 512 Pa であった．管路内の空気の流速 u を算出せよ．空気密度 ρ_{air} = 1.3 kg/m^3 とする．

（略解）

動圧： $\dfrac{\rho_{\mathrm{air}}u^2}{2}=p_2-p_1=512$ Pa

$$u=\sqrt{\frac{2\left(p_2-p_1\right)}{\rho_{\mathrm{air}}}}=\sqrt{\frac{2\times 512}{1.3}}=28.1 \text{ m/s}$$

問題３　図 4-20 に示すように，水が流れる円管路内にオリフィスを設置して流量の測定を行った．結果および条件は図中に記載のとおりである．管路内のエネルギー損失は無視できるとして流出速度 u_2[m/s] および体積流量 Q[m^3/s]を算出せよ．

（略解）

式 4-48 より流出速度 u_2 は,

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(c_\mathrm{c} a / A\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho_w}\left(p_1 - p_2\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(0.8 \times 0.03 / 0.5\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{1000} \times 32 \times 1000} = 8.01\ \mathrm{m/s}$$

体積流量 Q は式 4-46 より,

$Q=Au_1=a_c u_2=ac_c u_2=$0.03×0.8×8.01=0.192m^3/s

問題４　前問において，速度定数 c_v= 0.7 であるとしたときの流出速度 u_2[m/s]および体積流量 Q[m^3/s]を算出せよ.

（略解）

速度定数が定義されたときの流出速度 u_2 は式 4-48 に c_v を乗じることにより求められる.

$$u_2 = \frac{c_\mathrm{v}}{\sqrt{1-\left(c_\mathrm{c} a / A\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho_w}\left(p_1 - p_2\right)}$$

$$= \frac{0.7}{\sqrt{1-\left(0.8 \times 0.03 / 0.5\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{1000} \times 32 \times 1000} = 5.61\ \mathrm{m/s}$$

体積流量 Q は式 4-46 より,

$Q=Au_1=a_c u_2=ac_c u_2=$0.03×0.8×5.61=0.134m^3/s

問題５　図 4-21 に示すように, 水が流れる円管路内にベンチュリ管を設置して流量の測定を行った. 結果および条件は図中に記載のとおりである. 管路内のエネルギー損失は無視できるとして流出速度 u_2[m/s] および体積流量 Q[m^3/s]を算出せよ.

略解

式 4-56 より流出速度 u_2 は,

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(A_2 / A_1\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho_w}\left(p_1 - p_2\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(0.1 / 0.4\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{1000} \times 18 \times 10^3} = 6.20\ \mathrm{m/s}$$

体積流量 Q は,

$$Q = A_2 u_2 = 0.1 \times 6.20 = 0.62\ \mathrm{m^3/s}$$

問題６　前問において，流量係数 ▪ = 0.8 であるとしたときの体積流量 Q[m^3/s]を算出せよ.

（略解）

式 4-60 より，

$$Q = \alpha A_2 \sqrt{2g\left(h_1 - h_2\right)} = \alpha A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho_w}\left(p_1 - p_2\right)}$$

$$= 0.8 \times 0.1 \times \sqrt{\frac{2}{1000} \times 18 \times 10^3} = 0.48 \ \mathrm{m^3/s}$$

４章演習問題

１．図 4-22 に示す円管内に水が下から上側に流れている．管内は損失がないとして以下の設問に答えよ．ただし，水の密度：ρ_w = 1000 kg/m^3 であるとする．

(1) ベルヌーイの式より，圧力 p_1，p_2, 流速 v_1，v_2，位置 Δh の関係を示せ．

(2) 流量 Q= 3 m^3/min のときの圧力差：$p_1 - p_2$ [Pa]を算出せよ．

(3) 流量 Q= 0 のときの圧力差：$p_1 - p_2$ [Pa]を算出せよ．

（略解）

ベルヌーイの式より，

$$\frac{v_1^{\ 2}}{2g} + \frac{p_1}{\rho_w g} = \frac{v_2^{\ 2}}{2g} + \frac{p_2}{\rho_w g} + \Delta h \ \rightarrow \ p_1 - p_2 = \rho_w g \Delta h + \frac{\rho_w}{2}\left(v_2^{\ 2} - v_1^{\ 2}\right)$$

流量 Q= 3 m^3/s のとき，

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{3/60}{3.14 \times (0.1)^2} = 1.59 \ \mathrm{m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{3/60}{3.14 \times (0.2)^2} = 0.398 \ \mathrm{m/s}$$

$$p_1 - p_2 = \rho_w g \Delta h + \frac{\rho_w}{2}\left(v_2^{\ 2} - v_1^{\ 2}\right) = 1000 \times 9.8 \times 0.4 + \frac{1000}{2}\left\{(0.398)^2 - (1.59)^2\right\} = 2735 \,\mathrm{Pa}$$

流量 Q= 0 のとき，

$$p_1 - p_2 = \rho_w g \Delta h = 1000 \times 9.8 \times 0.4 = 3920 \,\mathrm{Pa}$$

２．管径 30cm の管内に標準型ピトー静圧管（図 4-17）を挿入して管内を流れる空気の流速測定を行った. 全圧管, 静圧管にU字形マノメータを接続したところ, 両者の差圧: $p_2 - p_1$ = 5 mmHg となった．このときの流速はいくらか．また，管内の空気の流速が一様であるとし，体積流量，質量流量を導出せよ．ただし，水銀の密度：ρ_{Hg} = 13.6×10^3 kg/m^3，空気の密度：ρ_{air} = 1.3 kg/m^3 とする．

（略解）

$$p_2 - p_1 = \rho_{\mathrm{Hg}} g \Delta h = 13.6 \times 10^3 \times 9.8 \times 5 \times 10^{-3} = 666.4 \ \mathrm{Pa}$$

式 4-45 より

$$u_0 = \sqrt{\frac{2\rho_{\mathrm{Hg}} g \Delta h}{\rho_{\mathrm{air}}}} = \sqrt{\frac{2\times 13.6\times 10^3 \times 9.8\times 5\times 10^{-3}}{1.3}} = 32.0\,\mathrm{m/s}$$

$$Q = Au_0 = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 u_0 = 3.14\times\left(\frac{0.3}{2}\right)^2 \times 32.0 = 2.26\ \mathrm{m^3/s}$$

$$m = \rho_{air} Q = 1.3\times 2.26 = 2.94\ \mathrm{kg/s}$$

３．図 4-23 に示すように，円管路内にオリフィスを設置し，管内に密度 ρ_{air} = 1.3 kg/m^3 の空気を流したところ，①，②の圧力差は水柱で Δh = 60 mm であった．管路内径 D = 100 mm，オリフィス部開口面積 a = 314 mm^2，収縮係数 c_{c}= a_{c} /a = 0.86，速度定数 c_{v}= 0.72，水の密度 ρ_{w} = 1000 kg/m^3 として以下の問に答えよ．

(1) ②の地点での速度 u_2 [m/s]を導出せよ．

(2) 流量 Q[m^3/s]を導出せよ．

（略解）

①，②の圧力差： $p_1 - p_2 = \rho_w g\Delta h = 1000\times 9.8\times 0.06 = 588\,\mathrm{Pa}$

速度 u_2 は，式 4-50 より　$h=p/(\rho_{\mathrm{air}} g)$ を考慮して次式で与えられるので，

$$u_2 = \frac{c_{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-(c_{\mathrm{c}} a/A)^2}}\sqrt{\frac{2}{\rho_{air}}(p_1 - p_2)}$$

$$= \frac{0.72}{\sqrt{1-\left(\left(0.86\times 314\times 10^{-6}\right)/\left(3.14\times 0.05\times 0.05\right)\right)^2}}\sqrt{\frac{2\times 588}{1.3}} = 21.7\ \mathrm{m/s}$$

$$Q = c_{\mathrm{c}} a u_2 = 0.86\times 314\times 10^{-6}\times 21.7 = 5.86\times 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$$

４．図 4-24 に示すベンチュリ管に密度 ρ_{air} = 1.3 kg/m^3 の気体を流したところ，①，②点における圧力差は水柱で Δh = 20 mm であった．ベンチュリ管には損失がないものとし以下の問に答えよ．ただし，水の密度： ρ_{w} = 1000 kg/m^3 とする．

(1) ベルヌーイの式より①，②点における圧力と速度の関係を導出せよ．

(2) ②点における流速 u_2 [m/s]を導出せよ

(3) 流量 Q[m^3/s]を導出せよ．

(4) ①，③点における圧力差を求めよ．

（略解）

(1)ベルヌーイの式より， $\dfrac{u_1^2}{2g} + \dfrac{p_1}{\rho_{air} g} = \dfrac{u_2^2}{2g} + \dfrac{p_2}{\rho_{air} g}$ （答）

(2) 連続の式より，$Q=\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 u_1=\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 u_2 \ \rightarrow \ u_1=u_2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$

連立して，

$$u_1{}^2-u_2{}^2=\frac{2}{\rho_{\mathrm{air}}}\left(p_2-p_1\right) \ \rightarrow \ \frac{d_2{}^4-d_1{}^4}{d_1{}^4}u_2{}^2=\frac{2}{\rho_{\mathrm{air}}}\left(p_2-p_1\right)$$

$$u_2=\sqrt{\frac{d_1{}^4}{d_2{}^4-d_1{}^4}\frac{2\left(p_2-p_1\right)}{\rho_{air}}}=\sqrt{\frac{d_1{}^4}{d_2{}^4-d_1{}^4}\frac{2\rho_w g\left(-\Delta h\right)}{\rho_{air}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(0.08)^4}{(0.04)^4-(0.08)^4}\frac{2\times1000\times9.8\times\left(-20\times10^{-3}\right)}{1.3}}=17.9\ \mathrm{m/s}$$ （答）

(3) $Q=\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 u_2=3.14\times\left(\frac{0.04}{2}\right)^2\times17.9=2.25\times10^{-2}\ \mathrm{m^3/s}$ （答）

(4) ①点と③点では流速は等しいので，ベルヌーイの式より圧力も等しい。従って，
$p_1-p_3=0$

５．図 4-25 の径が変化する（$d_1\rightarrow d_2$）管路において，下から上方向に気体（密度：ρ [kg/m^3]）を流す．①，②の地点の圧力差はマノメータの液注（密度：ρ’[kg/m^3]）でΔh[m]の示差となった．流量 Q[m^3/s]と液注差Δhの関係を整理して示せ．ただし，$\rho \ll \rho$’とする．

（略解）

連続の式より，$Q=\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 v_1=\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 v_2 \ \rightarrow \ v_1=v_2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$

気体なので位置エネルギーは無視し，ベルヌーイの式に当てはめる．

$$\frac{v_1{}^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}=\frac{v_2{}^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g} \ \rightarrow \ v_2{}^2-v_1{}^2=\frac{2}{\rho}\left(p_1-p_2\right)$$

連立して，

$$v_2{}^2-v_2{}^2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4=\frac{2}{\rho}\left(p_1-p_2\right) \rightarrow \ v_2=\sqrt{\frac{d_1{}^4}{d_1{}^4-d_2{}^4}\frac{2\left(p_1-p_2\right)}{\rho}}$$

圧力差：$p_1-p_2=\rho' g\Delta h$ であるので，

$$v_2=\sqrt{\frac{d_1{}^4}{d_1{}^4-d_2{}^4}\frac{2\rho' g\Delta h}{\rho}}$$

流量は，

$$Q=\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 v_2=\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2\sqrt{\frac{d_1{}^4}{d_1{}^4-d_2{}^4}\frac{2\rho' g\Delta h}{\rho}}=\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{d_1{}^4 d_2{}^4}{d_1{}^4-d_2{}^4}\frac{2\rho' g\Delta h}{\rho}}$$ （答）

6．狭まり管により管路径が縮小する（d_1→d_2）水平管路に気体（密度：ρ[kg/m^3]）を流す場合について考える．図 4-26 のとおり，ピトー管とマノメータを組み合わせて設置したところマノメータの液注（密度：ρ'[kg/m^3]）はΔh[m]の示差となった．流量 Q[m^3/s] と液注差▪hの関係を整理して示せ．ただし，u_1，u_2，は狭まり管前後の平均流速，p_1，p_2は圧力であり，密度の関係はρ<<ρ'とする．

（略解）

連続の式より，$Q=\pi\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 u_1=\pi\left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 u_2 \rightarrow u_1=u_2\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2$

ベルヌーイの式に当てはめる．

$$\frac{\rho u_1^{\;2}}{2}+p_1=\frac{\rho u_2^{\;2}}{2}+p_2 \rightarrow p_2-p_1=\frac{\rho}{2}\left(u_1^{\;2}-u_2^{\;2}\right)$$

②点での全圧：$\dfrac{\rho u_2^{\;2}}{2}+p_2$

①点での静圧と②点での全圧の差はマノメータの液注差に等しいので，

$$\left(\frac{\rho u_2^{\;2}}{2}+p_2\right)-p_1=\rho' g\Delta h>0 \rightarrow p_2-p_1=\rho' g\Delta h-\frac{\rho u_2^{\;2}}{2}$$

以上より，

$$\frac{\rho}{2}\left(u_1^{\;2}-u_2^{\;2}\right)=\rho' g\Delta h-\frac{\rho u_2^{\;2}}{2} \rightarrow \frac{\rho u_1^{\;2}}{2}=\rho' g\Delta h \rightarrow u_1=\sqrt{\frac{2\rho'}{\rho}g\Delta h}$$

よって，

$$Q=\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 u_1=\frac{\pi d_1^{\;2}}{4}\sqrt{\frac{2\rho'}{\rho}g\Delta h}$$

４章　ワークシート問題

1．図１に示す管内径が d_1→d_2 に変化する管路において，水が下から上側に流れているとき，以下の問に答えよ．ただし，圧力差：p_1－p_2 = 40 kPa，水の密度：ρ_W = 1000 kg/m^3 であるとする．

(1) 連続の式より，管内径 d_1，d_2 と流速 v_1，v_2 の関係を示せ．

(2) ベルヌーイの式より，圧力 p_1，p_2, 流速 v_1，v_2，位置 z_2 の関係を示せ．

(3) 流速 v_1 [m/s]を算出せよ．

(4) 流量 Q[m^3/s]を算出せよ．

（略解）

（１）連続の式より，$Q=\pi\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 v_1=\pi\left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 v_2 \rightarrow v_2=v_1\left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2$　　（答）

（２）ベルヌーイの式より， $\dfrac{v_1^{\,2}}{2g}+\dfrac{p_1}{\rho_w g}=\dfrac{v_2^{\,2}}{2g}+\dfrac{p_2}{\rho_w g}+z_2$ （答）

（３）連立して，

$$v_1^{\,2}-v_2^{\,2}=\frac{2}{\rho_w}\left(p_2-p_1\right)+2gz_2 \;\rightarrow\; \frac{d_2^{\,4}-d_1^{\,4}}{d_2^{\,4}}v_1^{\,2}=\frac{2}{\rho_w}\left(p_2-p_1\right)+2gz_2$$

$$v_1=\sqrt{\frac{d_2^{\,4}}{d_2^{\,4}-d_1^{\,4}}\left\{\frac{2}{\rho_w}\left(p_2-p_1\right)+2gz_2\right\}}$$

$$=\sqrt{\frac{(0.2)^4}{(0.2)^4-(0.3)^4}\left\{\frac{2}{1000}\left(-40\times10^3\right)+2\times9.8\times0.4\right\}}=4.21\ \mathrm{m/s}$$ （答）

（４） $Q=\pi\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 v_1=3.14\times\left(\dfrac{0.3}{2}\right)^2\times4.21=0.30\ \mathrm{m^3/s}$ （答）

２．図２に示す管路において①，②の地点にマノメータが設置され，圧力の測定が行える．管路内はエネルギー損失がなく，水の密度： ρ_w = 1000 kg/m^3 であるとし，次の問に答えよ．

(1) u_1， u_2 の関係を示せ．

(2) ①，②の地点での圧力 p_1， p_2 [Pa]を算出せよ．

(3) ベルヌーイの式から u_2 [m/s]を算出せよ．

(4) 流量 Q[m^3/s]を導出せよ．

（略解）

（１）連続の式より， $Q=\pi\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 u_1=\pi\left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 u_2 \rightarrow u_1=u_2\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2$ （答）

（２） $p_1=\rho_{\mathrm{w}} g h_1=1000\times9.8\times1=9800\ \mathrm{Pa}$ （答）

$p_2=\rho_{\mathrm{w}} g h_2=1000\times9.8\times0.6=5880\ \mathrm{Pa}$ （答）

（３）ベルヌーイの式より， $\dfrac{u_1^{\,2}}{2g}+\dfrac{p_1}{\rho_w g}=\dfrac{u_2^{\,2}}{2g}+\dfrac{p_2}{\rho_w g}$

連立して，

$$u_1^{\,2}-u_2^{\,2}=\frac{2}{\rho_w}\left(p_2-p_1\right)\rightarrow \frac{d_2^{\,4}-d_1^{\,4}}{d_1^{\,4}}u_2^{\,2}=\frac{2}{\rho_w}\left(p_2-p_1\right)$$

$$u_2=\sqrt{\frac{d_1^{\,4}}{d_2^{\,4}-d_1^{\,4}}\frac{2\left(p_2-p_1\right)}{\rho_w}}=\sqrt{\frac{(0.06)^4}{(0.03)^4-(0.06)^4}\frac{2\times\left(5880-9800\right)}{1000}}=2.89\ \mathrm{m/s}$$ （答）

（４） $Q=\pi\left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 u_2=3.14\times\left(\dfrac{0.03}{2}\right)^2\times2.89=2.04\times10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$ （答）

３．直線走行中のレーシングカーの車体に標準型ピトー静圧管を設置し，流速測定を試みた．全圧孔を走行方向に向けたところ，動圧は水銀柱で 15 mm となった．レーシングカーの時速を算出せよ．

（略解）

レーシングカーのスピードが流速 u_0 と等しいと考える．式４－４５より

$$u_2 = \sqrt{\frac{2\rho_{\mathrm{Hg}} g \Delta h}{\rho_{\mathrm{air}}}} = \sqrt{\frac{2 \times 13.6 \times 10^3 \times 9.8 \times 15 \times 10^{-3}}{1.3}} = 55.4 \text{ m/s}$$

時速に直すと，

$u_0 = 55.4 \times 3600 \text{ m/h} = 200 \text{ km/h}$　　（答）

４．図３に示す管径 0.04 m の管路において管路内は損失がなく，石油が流れている．h_1 = 0.42 m，h_2 = 0.65 m であるとし，次の設問に答えよ．ただし，石油の密度 ρ_{oil} = 850 kg/m^3 とする．

(1) ①，②点における流体のエネルギーの関係をベルヌーイの式で整理して示せ．

(2) 全圧，静圧，動圧を算出せよ．

(3) 流速 u_0[m/s]を算出せよ．

(4) 流量 Q[m^3/s]を導出せよ．

（略解）

（１）$\dfrac{\rho_{\mathrm{oil}} u_1^2}{2} + p_1 = \dfrac{\rho_{\mathrm{oil}} u_2^2}{2} + p_2$　　（答）

（２）$u_2 = 0$ より，

$$\frac{\rho_{\mathrm{oil}} u_1^2}{2} + p_1 = p_2$$

全圧：$p_2 = \rho_{\mathrm{oil}} g h_2 = 850 \times 9.8 \times 0.65 = 5410 \text{ Pa}$

静圧：$p_1 = \rho_{\mathrm{oil}} g h_1 = 850 \times 9.8 \times 0.42 = 3500 \text{ Pa}$

動圧：$\dfrac{\rho_{\mathrm{oil}} u_1^2}{2} = p_2 - p_1 = 5410 - 3500 = 1910 \text{ Pa}$　　（答）

（３）$u_0 = u_1 = \sqrt{\dfrac{2(p_2 - p_1)}{\rho_{\mathrm{oil}}}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 1910}{850}} = 2.12 \text{ m/s}$　　（答）

（４）$Q = \pi \left(\dfrac{D}{2}\right)^2 u_0 = 3.14 \times \left(\dfrac{0.04}{2}\right)^2 \times 2.12 = 2.66 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{/s}$　　（答）