教育実践

# 重力多体問題の計算機シミュレーション
## ——差分法による計算技術——

東京都立王子工業高等学校
電子科　山本義男

### 1．まえがき

重力多体問題とは，何もない宇宙空間に質点をばら撒いたとき，その後の運動が万有引力によってどう変化するかを問うものである。2体問題は数学的に簡単に解くことができるが，3体問題以上は簡単に解くことができない。そこで登場してくるのが，差分法による計算技術である。工業高校生にとっては，程度が高すぎることを承知している。しかし，感動が意欲を生みだす，と考えたとき，教材として取り上げてもよいのではないかと考えている。私自身，今回のプログラムを作るきっかけになったのは，二つの銀河の衝突をシミュレーションした映像（平成13年夏）をテレビで見たからであった。銀河といえば，天体の個数が膨大であるから，パソコンでは太刀打ちできないが，天体の個数を少数に限れば，できるはずである。このように考えて取り組んだところ，おおよそのプログラムを作ることができた。解法の手順は，大筋として以下のようになる。ただし，天体は質点と考えて計算する。

（1）ニュートンの運動方程式を質点の個数分だけ求める。
（2）2階微分方程式を1階微分方程式の連立と考えてオイラー法で差分化する。
（3）逐次代入法で解を求める。
（4）解を描画する。
（5）エネルギー保存則，運動量保存則，角運動量保存則でプログラムを評価する。

理科年表から太陽，水星，金星，地球，月，火星，木星，イオ，エウロパのデータを拾い出して軌道を計算してみたところ，描像がもっともらしいことがわかった。そこで今度は，定量的に調べてみるために力学的エネルギー，運動量，角運動量を計算してみたところ，おおよそ成り立っていることもわかった。ここまでくると，つぎつぎに試してみたい課題が頭にひらめいてくる。

差分法は，極限を導入しないので，微分法と違ってわかりやすいと考えている。物理法則は，微分方程式で表現されるので，差分法を使えば計算機で物理現象を模擬実験（シミュレーション）することができる。最近の高性能なパソコンを使えば，今回のような重力多体問題も差分法で比較的容易に計算することができる。土木，建築，機械，電気，情報，環境など工業技術の基盤は，物理学や化学などの自然科学にある。そして概ね，工業技術と自然科学の橋渡しは，差分法による計算技術にある，と私は考えている。このような考え方や感じ方をするのは，やはり私が応用物理の出身であるからかもしれない。シミュレーションは，実験，理論についで第三の科学的手法である，と述べている人もいる。理工

系離れが心配されている中，工業高校の教育にも，差分法による計算技術を少しでも導入して面白く学習させることができないものか，と考えている。

## 2．2体問題の差分方程式

まず2体問題を考える。二つの質点1と質点2が3次元直交座標系で，

$m_1$ [kg]；$(x_1,y_1,z_1)$，$m_2$ [kg]；$(x_2,y_2,z_2)$ にあるとき $m_1$ に働く力は $m_2$ からの万有引力である（図1）。

その x 成分は，

（万有引力の x 成分）

＝ {万有引力の大きさ}・{x の方向余弦}

＝ $\{G\cdot(m_1 m_2/r_{12}^2)\}\cdot\{(x_1-x_2)/r_{12}\}$ —①

と書くことができる。ここで，Gは万有引力定数。$r_{12}$は質点1と質点2の距離。

万有引力の x 成分を$fx_{12}\cdot m_1$と置けば，

$fx_{12}=G\cdot(m_2/r_{12}^2)\cdot(x_1-x_2)/r_{12}$ ——②

これを$fx=fx_{12}$ ——③

と置き換えておく。y，z 方向についても同様。これから，質点1について，x 方向のニュートンの運動方程式を作ると，

$d^2x_1/dt^2=-fx$ —④

となる。これは座標を計算したいために変形した式であって

$m_1\cdot d^2x_1/dt^2=-m_1\cdot fx$

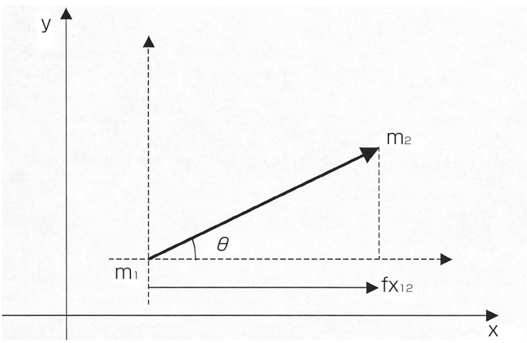


図1　2体問題

と同じ式である。

次に，④式の2階微分を二つの1階微分の連立として

$dx_1/dt=v_1$ —— ⑤

$dv_1/dt=-fx$ —⑥

と置き換えておく（「数値計算演習」戸川隼人，共立出版，1980）。時間の刻み幅を$\Delta t$として，⑤⑥式を前進差分で近似すると

$\{x_1(t+\Delta t)-x_1(t)\}/\Delta t=v_1(t)$ —⑦

$\{v_1(t+\Delta t)-v_1(t)\}/\Delta t=-fx(t)$ —⑧

⑦⑧式は，kを整数として漸化式にすると

$x_{1k+1}=x_{1k}+\Delta t\cdot v_{1k}$ —⑨

$v_{1k+1}=v_{1k}-\Delta t\cdot fx_k$ —⑩

⑨⑩式を使って実際にプログラムを組み上げる。y，z 方向についても同様に求めておく。

質点2についても，同様に差分化した運動方程式を求めることができる。

## 3．N体問題の差分方程式

3体問題は，省略。N体問題では，3体問題を延長して$m_i$に着目する（図2）。ただし$i=1,2,\cdots N$。

質点 j が質点 i に及ぼす万有引力の x 成分を$fx_{ij}\cdot m_i$とすれば，

$fx_{ij}=G\cdot m_j\cdot(1/r_{ij}^2)\cdot(x_i-x_j)/r_{ij}$

ここで，$r_{ij}$は質点 i と質点 j の距離。また$m_j$は質点 j の質量，Gは万有引力定数。これから単位質量（質点 i のこと）あたり，質点 i が受ける万有引力の x 成分の合計fxは，

$fx=fx_{i1}+fx_{i2}+\cdots+fx_{iN}$

となる。これは⑪式の延長。これから質点 i が受ける万有引力の x 成分の合計を求める関数は，関数名をaccx() として以下のようになる。

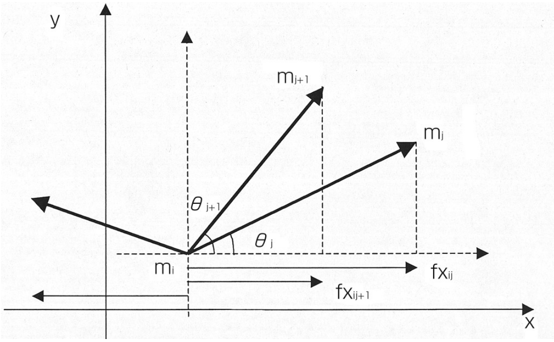


図２　N体問題

```
double accx(int i)
{
  double fx=0.0;  // fx のリセット
  for(jj=1;jj<=N;jj++)//jjは質点番号
  {
  j=jj-1;
  if(i != j)//自分自身は除く
  {
  r[i][j]=sqrt((x[i]-x[j])*(x[i]-x[j])
            +(y[i]-y[j])*(y[i]-y[j])
            +(z[i]-z[j])*(z[i]-z[j]));
  //r[i][j]は質点iと質点jの距離rij
  if(r[i][j]>r0)
//発散を避けるために追加したが，
//弾性衝突を導入する方が現実的と考えてい
る（coll2()の話は省略）。
fx=fx-G*m[j]*(1.0／(r[i][j]*r[i][j]))
                  *(x[i]-x[j])／r[i][j];
  }
  }
  return(fx);
}
```

y 方向の関数accy(i)と z 方向の関数accz(i)も同様に求める。

これから，N体問題の差分方程式は，

```
for(ii=1;ii<=N;ii++)  //これがN体問題プロ
グラムの核心部
{
  i=ii-1;
  x[i] =x[i] +dt*vx[i];
  vx[i]=vx[i]+dt*accx(i);
  y[i] =y[i] +dt*vy[i];
  vy[i]=vy[i]+dt*accy(i);
  z[i] =z[i] +dt*vz[i];
  vz[i]=vz[i]+dt*accz(i);
}
```

となる。ここで，dtは時間の刻み幅Δtの意味で使った。

## ４．逐次代入法

このプログラムは，初期条件として質量，位置，速度を与えたとき，それぞれの質点が受ける力を順次に計算して，その後の位置を微小時間ごとに繰り返し計算している。私は，計算技術の専門家ではないので，今回の解法が，どのような呼ばれ方をしているのかよく知らない。しかし，「数値計算演習」（戸川隼人，共立出版，1980）にある逐次代入法と同じ解き方をしてみた。この解き方で本当に正しいのだろうか。

```
for(phase=0;phase<phasemax;phase++)
//時刻のステップ（時刻 t =phase・Δt）
{
  for(n=0;n<nmax;n++)
  //逐次代入の回数nmax
  {
   (N体問題の差分方程式)
  }
}
```

## ５．あとがき

一昨年（平成13年）の夏に２次元２体問題のプログラムを初めて作った。これを元にして３次元に拡張したり，描画の工夫をしたり，衝突を導入したりしていった。片手間の作業のために，荒削りでまだ整備しなければならないところがたくさんあると思う。２次元２体問題プログラムは，強制振動（共振回路）や連成振動（２個つながった振り子の運動）を以前に差分法で解いたことが元になっている。電気教育の立場から見たとき，万有引力をクーロン力に置き換えれば，このプログラム自体はそのまま生きてくるのだが，原子や分子の世界では，波動性が大きく効いてくる。質点の属性として波動性をどのように加味するのかを工夫すれば，現実的な面白い展開になるのではないかと考えている。また，自動制御では，系は微分方程式で表現できるから，その入力と出力の関係は差分法で解くことができる。

電気理論は，力学の考え方（エネルギーや仕事など）を使って組み立てられていると思う。また，最近のパソコンは高性能になっている。微分方程式を差分法を使って解くことは，算術的な手法と考えてもよいと思う。いまの工業高校には，数学に弱い生徒が多くいる。この意味で，数学的な手法に代わって算術的な手法も，考え方を教えるために現代的な意義があるのではないかと考えている。

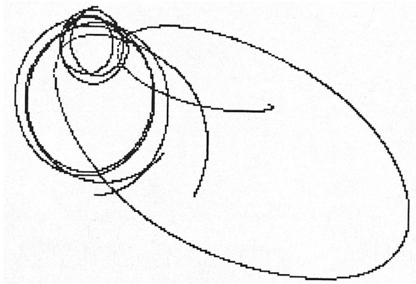

図３　重力３体問題シミュレーション

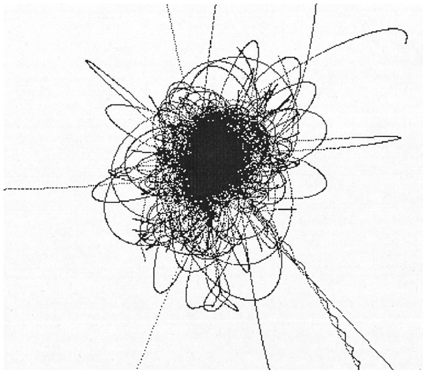

図４　重力60体問題のシミュレーション

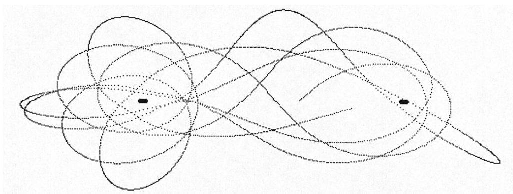

図５　クーロン力３体問題シミュレーション

参考文献；
「力学」原島鮮，裳華房，1975
「数値計算演習」戸川隼人，共立出版，1980
使用言語；Borland Turbo C++ for DOS