６－１ドリル問題　解答　　　（2009.11.13 改訂）

問題１　grad$f$＝(2x，2y, 0)
問題２　grad$f$＝(2x，2y，2z)
問題３　grad$f$＝(yz，zx，xy)

問題４　grad$f$＝$\left(-\dfrac{1}{x^2}, 0, 0\right)$

問題５　div$A$＝1＋2y＋3z^2
問題６　div$A$＝2x

問題７　div$A$＝$-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{z^2}$

問題８　rot$A$＝(0，0，0)
問題９　rot$A$＝(0，1，0)
問題 10　rot$A$＝(2，2，2)

６－１演習問題　解答

１．(1)　grad$f$＝$\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$　ただし，$\boldsymbol{r}=(x, y, z)$

(2)　grad$f$＝$\left(-\dfrac{2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2},\quad -\dfrac{2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2},\quad -\dfrac{2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right)=-\dfrac{2\boldsymbol{r}}{r^4}$

(3)　grad$f$＝$\left(nx\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1},\quad ny\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1},\quad nz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1}\right)=n\boldsymbol{r}r^{n-2}$

２．(1)　div$A$＝$\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{2}{r}$

(2)　div$E$＝$\dfrac{\partial}{\partial x}E_{0x}e^{j\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)}+\dfrac{\partial}{\partial y}E_{0y}e^{j\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)}+\dfrac{\partial}{\partial z}E_{0z}e^{j\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)}$

$$=j\left(k_x E_{0x}+k_y E_{0y}+k_z E_{0z}\right)e^{j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=\ jk\cdot E_0 e^{jk\cdot r}=jk\cdot E$$

(3)　div$A$＝$\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

$$=\frac{3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

＝0

３．(1) rot$A$$=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{i}{2\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ -\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{i}{2\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}},0\right)$

$$=\left(-\frac{iy}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},\frac{ix}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},0\right)$$

$$=\frac{i}{2\pi r^3}\left(-y,x,0\right)$$

$$=\frac{\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{r}}{2\pi r^3}$$

(2) $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=\left(jk_yE_{0z}-jk_zE_{0y},\quad jk_zE_{0x}-jk_xE_{0z},\quad jk_xE_{0y}-jk_yE_{0x}\right)e^{j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$

$$=j\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0e^{j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$=j\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$$

(3) rot$A$＝(0, 0, 0)

４． div$A$$=\mathrm{div}\left(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(H_yz-H_zy\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(H_zx-H_xz\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(H_xy-H_yx\right)=0$

６－２ドリル問題　解答

問題１　(1)　$\dfrac{dx}{dt}=-r\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=r\cos t$, $\dfrac{dz}{dt}=0$ より， $ds=\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt=rdt$

(2)　$\displaystyle\int ds=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}rdt=\frac{3}{2}\pi r$

問題２　(1)　$y(t)=t^2=x(t)^2$ より， $y=x^2$ という放物線。

(2)　$d\boldsymbol{s}=\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right)dt=\left(1,2t,0\right)dt$

(3)　$\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}=(1,0,0)\cdot(1,2t,0)dt=dt$

したがって

$$\int\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_0^3dt=3$$

問題３　(1)

$$\int_{\mathrm{S}}f(x,y,z)d\boldsymbol{S}=\int_{\mathrm{OABC}}xyzd\boldsymbol{S}+\int_{\mathrm{OCGD}}xyzd\boldsymbol{S}+\int_{\mathrm{ODEA}}xyzd\boldsymbol{S}+\int_{\mathrm{DEFG}}xyzd\boldsymbol{S}+\int_{\mathrm{ABFE}}xyzd\boldsymbol{S}+\int_{\mathrm{CGFB}}xyzd\boldsymbol{S}$$

$$\int_{\mathrm{OABC}} xyz d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdot 0$$

$$\int_{\mathrm{OCGD}} xyz d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \cdot 0$$

$$\int_{\mathrm{ODEA}} xyz d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dz \int_0^1 dx \cdot 0$$

$$\int_{\mathrm{DEFG}} xyz d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdot xy$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_0^1$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{4}$$

$$\int_{\mathrm{ABFE}} xyz d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \cdot yz$$

$$= \int_0^1 dy \left[\frac{1}{2} yz^2 \right]_0^1$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} y dy = \frac{1}{4}$$

$$\int_{\mathrm{CGFB}} xyz d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dz \int_0^1 dx \cdot zx$$

$$= \int_0^1 dz \left[\frac{1}{2} zx^2 \right]_0^1$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} z dz = \frac{1}{4}$$

したがって，$\int_{\mathrm{S}} f(x,y,z) = \frac{3}{4}$

(2) $\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{OABC}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\mathrm{OCGD}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\mathrm{ODEA}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\mathrm{DEFG}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\mathrm{ABFE}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\mathrm{CGFB}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$

$$\int_{\mathrm{OABC}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdot 0 = 0$$

$$\int_{\mathrm{OCGD}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \cdot 0 = 0$$

$$\int_{\mathrm{ODEA}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dz \int_0^1 dx \cdot 0 = 0$$

$$\int_{\mathrm{DEFG}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdot 1 = 1$$

$$\int_{\mathrm{ABFE}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \cdot 1 = 1$$

$$\int_{\mathrm{CGFB}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dz \int_0^1 dx \cdot 1 = 1$$

したがって，$\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = 3$

(3) $\int_{\mathrm{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 dz\cdot xyz$

$$= \int_0^1 dx\int_0^1 dy\left[\frac{1}{2}xyz^2\right]_0^1$$

$$= \int_0^1 dx\left[\frac{1}{4}xy^2\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{8}x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{8}$$

６－２演習問題　解答

１．(1)　曲面Ｓは，媒介変数表示すると

$\boldsymbol{r} = \left(a\cos u, a\sin u, v\right)$　（ただし，$0\leqq u\leqq 2\pi$，$0\leqq v\leqq H$）

となる。したがって，

$$\boldsymbol{r}_u = \left(-a\sin u, a\cos u, 0\right)$$

$$\boldsymbol{r}_v = \left(0,0,1\right)$$

$$dS = \left|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\right|dudv$$

$$= \left|a\cos u\boldsymbol{e}_x + a\sin u\boldsymbol{e}_y\right|dudv$$

$$= adudv$$

また，A と dS は方向が一致しているので

$$\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \left|\boldsymbol{A}\right|dS = \sqrt{x^2+y^2}dS$$

これらより

$$\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^H dv\int_0^{2\pi}du\sqrt{a^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}a = 2\pi a^2 H$$

(2)　閉領域Ｖを媒介変数表示すると

$\boldsymbol{r} = \left(u\cos v, u\sin v, w\right)$　（ただし，$0\leqq u\leqq a$，$0\leqq v\leqq 2\pi$，$0\leqq w\leqq H$）

となる。

$$\boldsymbol{r}_u = \left(\cos v, \sin v, 0\right)$$

$$\boldsymbol{r}_v = \left(-u\sin v, u\cos v, 0\right)$$

$$\boldsymbol{r}_w = \left(0,0,1\right)$$

より，

$$dV = \left|\left(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\right) \cdot \boldsymbol{r}_w\right| dudvdw$$

$$= \left|(0,0,u) \cdot (0,0,1)\right| dudvdw$$

$$= ududvdw$$

したがって

$$\int_{\mathrm{V}} \rho\left(x^2 + y^2\right) dV = \int_0^a du \int_0^{2\pi} dv \int_0^H dw \times \rho u^3 = \frac{\rho\pi a^4 H}{2}$$

２．曲線Ｃを媒介変数によって表示すると

$\boldsymbol{r} = \left(t,t,t\right)$　（ただし，$1 \leqq t \leqq 2$）

となる。$d\boldsymbol{s} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial t}, \dfrac{\partial y}{\partial t}, \dfrac{\partial z}{\partial t}\right) dt = \left(1,1,1\right) dt$　より

$$\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_1^2 k \cdot \frac{3t}{\left(3t^2\right)^{\frac{3}{2}}} dt$$

$$= \int_1^2 \frac{kdt}{\sqrt{3}t^2}$$

$$= \left[-\frac{k}{\sqrt{3}t}\right]_1^2 = \frac{k}{2\sqrt{3}}$$

３．(1)　曲線Ｃを媒介変数表示すると

$\boldsymbol{r} = \left(t,t,t\right)$　（ただし，$0 \leqq t \leqq 1$）

となる。$ds = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{3} dt$　より

$$\int_{\mathrm{C}} f ds = \int_0^1 dt \cdot \sqrt{3} t^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(2)　$d\boldsymbol{s} = \left(1,1,1\right) dt$　より

$$\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

４．(1)　半球面Ｓは，媒介変数表示すると

$\boldsymbol{r} = \left(a\sin u \cos v, a\sin u \sin v, a\cos u\right)$　（ただし，$0 \leqq u \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq v \leqq 2\pi$）

となる。これより，

$$\boldsymbol{r}_u = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, -a\sin u)$$

$$\boldsymbol{r}_v = (-a\sin u\sin v, a\sin u\cos v, 0)$$

となるので

$$dS = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| dudv$$

$$= a^2 \sin u dudv$$

$$\int_S dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} dv \cdot a^2 \sin u = 2\pi a^2 [-\cos u]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi a^2$$

(2)　$\boldsymbol{r}$ と $d\boldsymbol{S}$ の方向は一致するので

$$\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{S} = |\boldsymbol{r}| dS$$

したがって

$$\int_S \sqrt{a^2 \sin^2 u \cos^2 v + a^2 \sin^2 u \sin^2 v + a^2 \cos^2 u} \times dS$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\pi} dv a^3 \sin u$$

$$= 2\pi a^3$$

５．

$$\int_{\mathrm{OABC}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdot 0 = 0$$

$$\int_{\mathrm{OCGD}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \cdot 0 = 0$$

$$\int_{\mathrm{ODEA}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dz \int_0^1 dx \cdot 0 = 0$$

$$\int_{\mathrm{DEFG}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdot x = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\mathrm{ABFE}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \cdot y = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\mathrm{CGFB}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 dz \int_0^1 dx \cdot z = \frac{1}{2}$$

したがって，$\int_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{3}{2}$

６．曲線Ｃを媒介変数表示すると

$\boldsymbol{r} = (\cos t, \sin t, 0)$　（ただし，0≦ t ≦2π）

となる。$d\boldsymbol{s} = (-\sin t, \cos t, 0)dt$　より

$$\boldsymbol{B} \times d\boldsymbol{s} = (-B_z \cos t, -B_z \sin t, B_x \cos t + B_y \sin t)$$

$$\int_C \boldsymbol{B}\times d\boldsymbol{s} = \int_0^{2\pi}\left(-B_z\cos t, -B_z\sin t, B_x\cos t + B_y\sin t\right)dt$$

$=(0,\ 0,\ 0)$

６－３ドリル問題　解答

問題１　(1)　$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}dV = \int_V 1dV = 1$

(2)　$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}dV = \int_V 3dV = 3$

(3)　$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}dV = \int_V 0dV = 0$

問題２　(1)　領域Vを媒介変数表示すると

$\boldsymbol{r} = \left(w\sin u\cos v, w\sin u\sin v, w\cos u\right)$　（ただし，$0\leqq u\leqq \pi$，$0\leqq v\leqq 2\pi$，$0\leqq w\leqq a$）

となる。したがって，

$$\boldsymbol{r}_u = \left(w\cos u\cos v, w\cos u\sin v, -w\sin u\right)$$

$$\boldsymbol{r}_v = \left(-w\sin u\sin v, w\sin u\cos v, 0\right)$$

$$\boldsymbol{r}_w = \left(\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u\right)$$

より，

$\left|\left(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\right)\cdot\boldsymbol{r}_w\right| = w^2\sin u$，また，$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=3$ より

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}dV &= \int_0^{\pi}du\int_0^{2\pi}dv\int_0^a dw\cdot 3w^2\sin u\\ &= \int_0^{\pi}du\int_0^{2\pi}dv\left[w^3\sin u\right]_0^a\\ &= \int_0^{\pi}du\int_0^{2\pi}dva^3\sin u\\ &= \left[-2\pi a^3\cos u\right]_0^{\pi} = 4\pi a^3\end{aligned}$$

あるいは簡単に $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=3$ と一定なので，これに半径 a の球の体積をかけることによって

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}dV = 3\times\frac{4\pi a^3}{3} = 4\pi a^3$$

(2)　曲面Sを媒介変数表示すると

$\boldsymbol{r} = \left(a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta\right)$　（ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$，$0\leqq\varphi\leqq 2\pi$）

となる。したがって，

$$\boldsymbol{r}_\theta = \left(a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta\right)$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi = \left(-a\sin\theta\sin\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, 0\right)$$

より，

$\left|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi\right| = a^2 \sin\theta$，また，$\boldsymbol{F}$と曲面Ｓはつねに垂直の関係にあるので

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \left|\boldsymbol{F}\right| dS = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dS = adS$$

これらから

$$\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi a^3 \sin\theta = 4\pi a^3$$

したがって，全問の結果と一致する。

あるいは簡単に，半径 a の球面上で$\left|\boldsymbol{F}\right| = a$　と一定であることから，これに半径 a の球の表面積をかけることによって

$$\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = a \times 4\pi a^2 = 4\pi a^3$$

と求められる。

問題３　(1)　領域Ｖを媒介変数表示すると

$$\boldsymbol{r} = \left(R\cos\theta, R\sin\theta, z\right)$$　（ただし，$0 \leqq R \leqq a$，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$，$0 \leqq z \leqq d$）

となる。したがって，

$$\boldsymbol{r}_R = \left(\cos\theta, \sin\theta, 0\right)$$

$$\boldsymbol{r}_\theta = \left(-R\sin\theta, R\cos\theta, 0\right)$$

$$\boldsymbol{r}_z = \left(0, 0, 1\right)$$

より，

$\left|\left(\boldsymbol{r}_R \times \boldsymbol{r}_\theta\right) \cdot \boldsymbol{r}_z\right| = R$，また，$\mathrm{div}F = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$　より

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \frac{1}{R}$$

$$\int_{\mathrm{V}} \mathrm{div}\boldsymbol{F} dV = \int_0^a dR \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^d dz \frac{1}{R} \cdot R = 2\pi ad$$

(2)　円筒の側面では，ベクトルFと面の法線方向は一致しているので

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \left|\boldsymbol{F}\right| dS$$

一方，円筒の底面では，ベクトルFと面の法線方向は直交しているので

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

したがって

$$\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\text{側面}} \left|\boldsymbol{F}\right| dS$$

側面を媒介変数表示すると

$$\boldsymbol{r} = \left(a\cos\theta, a\sin\theta, z\right)$$　（ただし，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$，$0 \leqq z \leqq d$）

となる。したがって，

$$\boldsymbol{r}_\theta = \left(-a\sin\theta, a\cos\theta, 0\right)$$

$$\boldsymbol{r}_z = (0,0,1)$$

より,

$$|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_z| = a$$

$$\int_{側面} |\boldsymbol{F}| dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^d dz \cdot a = 2\pi ad$$

したがって，前問の結果と一致する。

問題４　(1)　ストークスの定理より

$$\int_{\mathrm{S}} \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{DE}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\mathrm{EF}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\mathrm{FG}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\mathrm{GD}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\int_{\mathrm{DE}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

$$\int_{\mathrm{EF}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^1 dy \cdot 1 = 1$$

$$\int_{\mathrm{FG}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

$$\int_{\mathrm{GD}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

より

$$\int_{\mathrm{S}} \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = 1$$

ちなみに，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = (0,0,1)$ より

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = dS$$

したがって

$$\int_{\mathrm{S}} \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{S}} dS = 1$$ （面 DEFG の面積）

(2)　ストークスの定理より

$$\int_{\mathrm{S}} \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{DE}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\mathrm{EF}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\mathrm{FG}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\mathrm{GD}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\int_{\mathrm{DE}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

$$\int_{\mathrm{EF}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

$$\int_{\mathrm{FG}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

$$\int_{\mathrm{GD}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^{-1} dy(-1) = [-y]_0^{-1} = 1$$

より

$$\int_{\mathrm{S}} \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = 1$$

ちなみに，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = (0,0,2x)$ より

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{-1}^{0} dx \int_{-1}^{0} dy \cdot 2x = 1$$

(3)　ストークスの定理より

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{AH}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\mathrm{HC}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\mathrm{CB}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\mathrm{BA}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\int_{\mathrm{AH}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^{-1} dx \cdot x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\mathrm{HC}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{-1}^{0} dy \cdot y = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{\mathrm{CB}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{-1}^{0} dx \cdot x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{\mathrm{BA}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^{-1} dy \cdot y = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{-1} = \frac{1}{2}$$

より

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

ちなみに，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = (x, -y, 0)$ より

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

したがって

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

問題５　(1)　$\boldsymbol{r} = \left(R\cos\theta, R\sin\theta, 0\right)$ より

$$\boldsymbol{r}_R = \left(\cos\theta, \sin\theta, 0\right)$$

$$\boldsymbol{r}_\theta = \left(-R\sin\theta, R\cos\theta, 0\right)$$

となるので,

$$\left|\boldsymbol{r}_R \times \boldsymbol{r}_\theta\right| = R$$

また

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \left(0, 0, \frac{1}{R}\right)$$

より

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^{a} dR \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{R}\cdot R = 2\pi a$$

(2)　曲線Cを媒介変数表示すると

$$\boldsymbol{r}=\left(a\cos\theta, a\sin\theta, 0\right)$$ より

$$d\boldsymbol{s}=\left(-a\sin\theta, a\cos\theta, 0\right)d\theta$$

したがって

$$\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}=\left(-\sin\theta,\cos\theta,0\right)\cdot\left(-a\sin\theta, a\cos\theta, 0\right)=ad\theta$$

$$\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_0^{2\pi}ad\theta=2\pi a$$

よって，前問の結果と一致する。

6－3演習問題　解答

１．曲線Cは，媒介変数表示によって

$$\boldsymbol{r}=\left(\cos\theta,\sin\theta,0\right)$$ （ただし，0≦θ≦2π）となる。

$$\boldsymbol{F}=\left(2\cos\theta+3\sin\theta, 3\cos\theta-5\sin\theta, 0\right)$$

$$d\boldsymbol{s}=\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}d\theta=\left(-\sin\theta,\cos\theta,0\right)d\theta$$

より

$$\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_0^{2\pi}d\theta\left(-7\sin\theta\cos\theta-3\sin^2\theta+3\cos^2\theta\right)=0$$

あるいは，ストークスの定理を利用すると

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\left(0,0,0\right)$$

より

$$\int_{\mathrm{S}}\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

となるので，$\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=0$

２．

$$\int_{\mathrm{S}}\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{\mathrm{OABC}}\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\left(-2,-2,-2\right)$$ より

$$\int_{\mathrm{0ABC}}\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=2$$

6－4ドリル問題　解答

問題１

$$\nabla(xy)=(y,x,0)$$

$$y\nabla x+x\nabla y=y(1,0,0)+x(0,1,0)=(y,x,0)$$

よって，$\nabla(xy) = y\nabla x + x\nabla y$

問題２

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \nabla(x^3+y^2) = (3x^2, 2y, 0)$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2, y, 0) = (2x^2, y, 0)$$

$$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} = \left(x^2\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)(x, y, z) = (x^2, y, 0)$$

$$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) = (x, y, z)\times(0,0,0) = (0,0,0)$$

$$\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = (x^2, y, 0)\times(0,0,0) = (0,0,0)$$

したがって，$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$

問題３

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A}) = \nabla\cdot(x^2, xy, xz) = 4x$$

$$(\nabla f)\cdot\boldsymbol{A} = \left(\nabla x\right)\cdot(x, y, z) = (1,0,0)\cdot(x, y, z) = x$$

$$f(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = x\left\{\nabla\cdot(x, y, z)\right\} = 3x$$

したがって，$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A}) = (\nabla f)\cdot\boldsymbol{A} + f(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$

問題４

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \nabla\times\left\{(y, -x, z)\times(y^2, x, 0)\right\} \\ &= \nabla\times(-xz, y^2z, xy+xy^2) \\ &= (x+2xy-y^2, -x-y-y^2, 0)\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} = \left(y^2\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)(y, -x, z) = (x, -y^2, 0)$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} = \left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)(y^2, x, 0) = (-2xy, y, 0)$$

$$\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) = (y, -x, z)\left\{\nabla\cdot(y^2, x, 0)\right\} = (0,0,0)$$

$$\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = (y^2, x, 0)\left\{\nabla\cdot(y, -x, z)\right\} = (y^2, x, 0)$$

したがって，$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$

問題５

$$\nabla\times(f\boldsymbol{A})=\nabla\times(xy^2,-x^3,xz)=(0,-z,-3x^2-2xy)$$

$$(\nabla f)\times\boldsymbol{A}=\nabla x\times(y^2,-x^2,z)=(1,0,0)\times(y^2,-x^2,z)=(0,-z,-x^2)$$

$$f(\nabla\times\boldsymbol{A})=x\left\{\nabla\times(y^2,-x^2,z)\right\}=x(0,0,-2x-2y)=(0,0,-2x^2-2xy)$$

したがって，$\nabla\times(f\boldsymbol{A})=(\nabla f)\times\boldsymbol{A}+f(\nabla\times\boldsymbol{A})$

６－４演習問題　解答

１．$\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+v\times(\nabla\times v)+v\times(\nabla\times v)$　より

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}\nabla(v^2)-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$$

２．

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0$$

ここで

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

$$\nabla\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

より，$\nabla^2\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$

同様に

$$\nabla\times\left(\nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=0$$

について

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}=-\nabla^2\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\times\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

より，　$\nabla^2\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}$

６章ワークシート問題　解答

１．Ｓを媒介変数表示すると

$$\boldsymbol{r}=\left(a\sin\theta\cos\varphi,a\sin\theta\sin\varphi,a\cos\theta\right)$$　（ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$，$0\leqq\varphi\leqq2\pi$）

となる。したがって,

$$\boldsymbol{r}_\theta = (a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta)$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi = (-a\sin\theta\sin\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

より,

$$|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi| = a^2\sin\theta$$

ベクトルEと球面はつねに直交するので

$$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = |\boldsymbol{E}|dS = \frac{k}{a^2}dS$$

したがって

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\frac{k}{a^2}\cdot a^2\sin\theta = 4\pi k$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{k\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{k\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{k\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$=0$

２．(1)　$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi$

$$= -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= (x, y, z)\frac{aCe^{-ar}}{r}$$

$$= aCe^{-ar}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

(2)　$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \mathrm{div}\left(aCe^{-ar}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$

$$= aC\left(\frac{2}{r} - a\right)e^{-ar}$$