「電気数学」６－１ドリル補充問題

１． A=(x^2， y^2， z^2)の発散を求めなさい。　　解）$2x+2y+2z$
２． A=(xy， yz， z^2x)の発散を求めなさい。　　解）$y+z+2xz$
３． A=(y^2， z^2， zxy)の発散を求めなさい。　　解）xy
４． A=(xy^2， zy^2， zxy)の回転を求めなさい。　　解）($zx-y^2$，$-zy$， $-2xy$)
５． A=($y-z$， $z-x$， $x-y$)の回転を求めなさい。　　解）(-2， -2， -2)

６－１演習補充問題

１． 次のベクトル場の発散を求めなさい。

$f(r)\boldsymbol{r}$

解）

$$\boldsymbol{r}\cdot\nabla f(r)+f(r)\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\cdot\nabla f(r)+3f(r)$$

２． 次のベクトル場の回転を求めなさい。

(1) $\nabla\times\dfrac{\mathbf{i}}{2\pi r}$, ただし $\boldsymbol{i}=(i_x,i_y,i_z)$

(2) $\nabla\times\mathbf{r}$

解）

(1)

$$\nabla\times\left(\frac{i_x}{2\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{i_y}{2\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{i_z}{2\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{1}{2\pi r^3}\left(i_z y-i_y z,i_x z-i_z x,i_y x-i_x y\right)$$

(2) 0

３． 次の問いに答えなさい。

(1) $\phi=cr$ について、$\boldsymbol{r}(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta,0)$で表される曲線 C 上の点(1,0,0)における方向微分係数を求めなさい。ただし、$\boldsymbol{n}$ をこの点における曲線 C の接線方向の単位ベクトルとして、方向微分係数は $\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi$ である。

(2) $\boldsymbol{A}=1/2\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r}$ において div$\boldsymbol{A}$ を求めなさい。但し、$\boldsymbol{H}$ は一定のベクトルとする。

(3) $\boldsymbol{f}=(-y-z)\mathbf{e}_x+(-x-y)\boldsymbol{e}_y+(z-x)\boldsymbol{e}_z$ は回転なしであることを示し、$\boldsymbol{f}$ はどのようなスカラー場の勾配となるか求めなさい。

解）

(1) (1,0,0)における接線方向は(0,1,0) $\nabla\phi=3c\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ 　$\nabla\phi\cdot(0,1,0)=3c\dfrac{y}{r}$

(2) $\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r}}{2}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{r})=0$

(3) $\nabla\times(-y-z,-x-y,z-x)=0$

$\nabla\phi=(-y-z,-x-y,z-x)$　より

　ϕはx成分より $-yx-zx+c'$,　y成分より$-xy-y^2/2+c''$,　z成分より$z^2/2-xz+c'''$

$\phi=-yx-zx-y^2/2+z^2/2+c$:　cはx,y,zに関係のない定数

６－２ドリル補充問題

(1) $\boldsymbol{F}=k\dfrac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ として $\int_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$ を経路 C に沿って点 A(1, 1, 1)から点 B(2, 2, 2)まで積分しなさい。

解) $d\boldsymbol{s}=(1,1,1)dt$　$\int_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_c k\dfrac{1}{3t^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}dt=\dfrac{k}{2\sqrt{3}}$

(2) 曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の z>0 の半球面上で $\iint d\boldsymbol{S}$ を求めなさい。

解)

dS= $a^2\sin\theta d\theta$　$a^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta d\phi=2\pi a^2$

(3) 曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の z>0 の半球面上で $\iint \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}$ を求めなさい。

解)

$a^3\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta d\phi=2\pi a^3$

(4) 曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の球面上で $\iint \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{S}$ を求めなさい。

解)

$\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{S}=0$

６－２演習補充問題

１．　$\boldsymbol{f}$=k $\boldsymbol{r}/r^3$ について、半径 a の曲面上で積分し、$\boldsymbol{f}$ に関する泉の強さを求めなさい。

解) 4πk

６－３　演習補充問題

１．$\boldsymbol{f}=P(x,y,z)\boldsymbol{e}_x+Q(x,y,z)\boldsymbol{e}_y+R(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$ とし、Ｖを閉曲面Ｓで囲まれた領域を示す。次の式が成立することを証明しなさい。

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\oiint_S \left(Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\right)$$

解）$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{f}\,dxdydz=\oiint_S \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\oiint_S \left(Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\right)$$

２．閉曲面Ｓが原点Ｏに対して作る立体角をＯがＳの内部にある場合と外部にある場合に分けて求めなさい。

解）$\iiint_V \nabla\cdot\left(\frac{r}{r^3}\right)dxdydz=\oiint_S \frac{r\cdot dS}{r^3}$

原点Ｏが閉曲面の外側にあるとき、$\nabla\cdot\left(\frac{r}{r^3}\right)$＝０より０

原点が内側にあるとき、４π

３．水の流れを考えている空間中に泉があるとき、連続の方程式は、

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\boldsymbol{v}=q$$

となることを証明しなさい。ただし、q は泉の強度、ρは水の密度とする。

解）

閉曲面Ｓに囲まれた任意の領域における質量は

$$\iiint_V \rho dxdydz$$

単位時間に面積要素を横切る流体の体積は$\rho v\cdot dS$

$$\iiint_V \rho dxdydz-\frac{\partial}{\partial t}\oiint_S \rho v\cdot d\boldsymbol{S}=Q$$

Vを無限小にもってゆくと

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\boldsymbol{v}=q$$

$$\nabla\cdot\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{f}\,dxdydz=\oiint_S \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}$$

６－４　演習補充問題

１．次式（グリーンの公式）を証明しなさい。

$$\iiint_V \{\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\} dV = \iint \left\{ \phi\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{n}} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}} \right\} d\boldsymbol{S}$$

$\nabla\psi$にガウスの法則を適用

$$\iiint_V \nabla^2\psi dV = \iint \nabla\psi\cdot d\boldsymbol{S}$$

解答）　$\nabla\psi = \dfrac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{n}}$である。$(\because d\psi = \nabla\psi\cdot\boldsymbol{n})$

ϕをかけて$\displaystyle\iiint_V \phi\nabla^2\psi dV = \iint \phi\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{n}}\cdot d\boldsymbol{S}$

Ψとφを逆にしたものとあわせて、問題の公式が成り立つことが分かる。

6 章ワークシート補充問題

問題１　電磁気学では磁場 $\boldsymbol{H}$、電場 $\boldsymbol{E}$、電束密度 $\boldsymbol{D}$=ε$\boldsymbol{E}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}$=μ$\boldsymbol{H}$、電荷密度ρについて、以下の基礎方程式が成り立つ。

$$\nabla\times\boldsymbol{H} - \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{i} \qquad \text{(a)}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho \qquad \text{(c)}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{(d)}$$

が成り立つ。εおよびμは誘電率および透磁率と呼ばれる定数である。　以下の問に答えなさい。

（１） $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ として $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$ が成り立つことを示しなさい。但しφはスカラー量である。

（２） $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$ も $B = \nabla\times A$ を満足することを示し、このときφをχを用いて示しなさい。

（３）$\boldsymbol{D}$=$\varepsilon\boldsymbol{E}$ 、$\boldsymbol{B}$=$\mu\boldsymbol{H}$ として　$-\nabla^2\phi - \nabla\cdot\dfrac{\partial A}{\partial t} = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho$

　　が得られることを証明しなさい。

（４） $\nabla\cdot A + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ として、(3)の式から A およびφの２階の微分方程式を求めなさい。

問題２

$\boldsymbol{E}$=$\boldsymbol{E}_0$exp(j$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$) について以下の問に答えなさい。

（１）　$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$、$\nabla\times\boldsymbol{E}$ をもとめなさい。

（２）　（１）は $\boldsymbol{E}$ に対して演算子はどの様な演算を行っていると考えられるか､$\boldsymbol{k}$ を用いて示しなさい。

（３）　$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$ が与えられているとき $\boldsymbol{E}_0$ と $\boldsymbol{k}$ の関係を求めなさい。

問題３

$\boldsymbol{E}=k\dfrac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$，　$r=\sqrt{x^2+y^2}$ として，以下の問に答えなさい。

（１）　積分 $\phi=\displaystyle\int_{\infty}^{r} E\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めなさい。

（２）　この $\boldsymbol{E}$ にガウスの定理を適用して泉の強さを求めなさい。

（３）　この直線上のおける ϕ の動径方向 $\boldsymbol{n}$ への方向微分係数 $\boldsymbol{V}\phi\cdot\boldsymbol{n}$ を表しなさい。

問題４　　図のように直線上に電流 $\boldsymbol{i}$ が流れている。この電流の周りの磁場を考える。次の問いに答えなさい。

（１）　この直線電流から距離 $\boldsymbol{r}$ の位置における磁場 $\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{H}=\dfrac{i}{2\pi r}\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}$ と与えられる。$\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}$ は半径 r の円の接線方向の転位ベクトルである。半径 r の円を積分経路としてストークスの法則を利用して $\iint\nabla\times\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S}$ を求めなさい。

（２）　$\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_V \dfrac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$

但し、$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r})^2}$ である。

$\boldsymbol{A}$ の回転を求めなさい。

（３）　$A=\dfrac{1}{2}H\times r$ とすると、$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ が成立することを示しなさい。

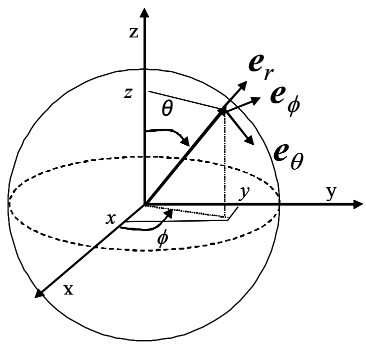
問題５

座標の取り方を一般の xyz 直交直線３次元（カルテシアン）座標系から直交曲線座標系といわれる座標系に変換する。図のように円筒形で(r,ϕ,z)の座標を定義する。ベクトルも同様に示し、それぞれの成分の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}$、$\boldsymbol{e}_{\phi}$、$\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}$、は図のようにお互いに直交するようにとる。

（１）　カルテシアン座標系における座標 x、y、z を r,ϕ,z を用いて示しなさい。

（２）$\dfrac{\partial x}{r},\dfrac{\partial x}{\theta},\dfrac{\partial x}{z}$を求めなさい。

（３）dr の x 成分、y 成分、z 成分を r, θ, z を用いて表しなさい。



（３）$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r}$、$\boldsymbol{a}_{\theta}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}$　$\boldsymbol{a}_{\phi}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}$、を用いて表しなさい。

（４）　勾配、発散、回転を r,ϕ,z を用いて表しなさい。但し、ベクトル量については $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$、$\boldsymbol{a}_{\phi}$、および $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ 成分について表現しなさい。

【解答】

問題１

(1) $\boldsymbol{B}$=∇×$\boldsymbol{A}$を(b)に代入

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\nabla\times\boldsymbol{A}}{\partial t}=0$$

この回転をとり、回転なしの場はあるスカラー関数の勾配であらわされる。

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\phi$$

（２） $\nabla\times\nabla\chi=0$ を用いる。

（３）

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon}\rho$$ を用いる。

（４） $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$　　$\mu\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}$

$$-\nabla^2\phi+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon}\rho$$

問題２

（１） $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_0e^{jk\cdot r})=jk\cdot\boldsymbol{E}_0e^{jk\cdot r}$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla\times(\boldsymbol{E}_0e^{jk\cdot r})=jk\times\boldsymbol{E}_0e^{jk\cdot r}$$

（２） ∇＝jk

（３）$E_0\perp k$

問題３

（１） $-k\frac{1}{r}$

（２）$4\pi k$

（１）　方向微分係数$\nabla\phi\cdot ds$

$$-\frac{1}{r^3}r\cdot dr$$

問題４

（１） $\iint_S\nabla\times H\cdot ds=\int_C H\cdot ds$ より求める。こたえは $\boldsymbol{i}$

（２） $\frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dV'$

（３） $\nabla\times\boldsymbol{A}=1/2\nabla\times(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r})$

$\nabla\times(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}\nabla\cdot\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(\nabla\cdot\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}-(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}$ を用いる。

問題５

（１）図のように極角θと方位角φを媒介変数とすると
$\boldsymbol{r}(\theta, \phi)=r\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x+r\sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y+r\cos\theta\,\boldsymbol{e}_z$
となる。ここで $0\le\theta\le\pi$, $0\le\phi\le 2\pi$ である。

（２）

$\dfrac{\partial x}{\partial r}=\sin\theta\cos\phi$ ， $\dfrac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta\sin\phi$ ， $\dfrac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta$

（１） x： $\sin\theta\cos\phi dr+r\cos\theta\cos\phi d\theta-r\sin\theta\sin\phi d\phi$

y： $\sin\theta\sin\phi dr+r\cos\theta\sin\phi d\theta+r\sin\theta\cos\phi d\phi$

z： $co\theta\sin\phi dr+\cos\theta\sin\phi d\theta+\sin\theta\cos\phi d\phi$

（３） $\boldsymbol{a}_r=\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y+\cos\theta\boldsymbol{e}_z$ $\boldsymbol{e}_x=\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y+\cos\theta\boldsymbol{e}_z$

$\boldsymbol{a}_\theta=r\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x+r\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y-r\sin\theta\boldsymbol{e}_z$ $\boldsymbol{e}_\theta=\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x+\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y-\sin\theta\boldsymbol{e}_z$

$\boldsymbol{a}_\phi=-r\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_x+r\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_y$ $\boldsymbol{e}_\phi=\sin\phi\boldsymbol{e}_x+\cos\phi\boldsymbol{e}_y$

（４） $\nabla\Psi=(\dfrac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{a}_r+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{a}_\theta+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{a}_\phi)\Psi$

$$\nabla\cdot A=\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2A_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times A=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial(A_r)}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi$$