ワークシート問題　**5章1節　微分方程式とラプラス変換**

記入日	学籍番号	名前	確認印

次の微分方程式をラプラス変換を用いて解きなさい.

$y'' + 3y' + 2y = e^{-3t} \quad y(0)' = 0,\ y(0) = 0$

【解答】両辺を Laplace 変換後に整理して,

$$s^2\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 3s\mathscr{L}[y] - y(0) + 2\mathscr{L}[y] = \frac{1}{s+3} \tag{1}$$

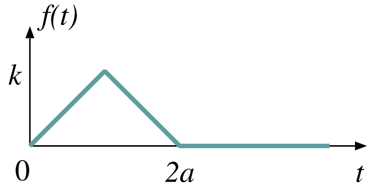
$$\begin{aligned}\mathscr{L}[y] &= \frac{1}{(s+3)(s^2+3s+2)} = \frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} \end{aligned} \tag{2}$$

ラプラス変換表より，原関数は

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} \tag{3}$$

ワークシート問題	5章2節　基本的な性質		
記入日	学籍番号	名前	確認印

次のグラフで示される関数 $f(t)$ を階段関数 $\Theta(t-a)$ を用いて表し，さらにそのラプラス変換を求めよ。



【解答】関数 $f(t)$ は以下のように表される．

$$f(t) = \frac{kt}{a}\,\Theta_0(t) - 2\frac{k(t-a)}{a}\,\Theta_a(t) + \frac{k(t-2a)}{a}\,\Theta_{2a}(t) \tag{4}$$

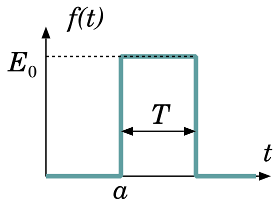
また，そのラプラス変換は,

$$\mathscr{L}\,[\,f\,] = \frac{k}{a}\frac{1}{s^2} - \frac{2k}{a}e^{-as}\frac{1}{s^2} + \frac{k}{a}e^{-2as}\frac{1}{s^2} = \frac{k}{a}\left(1 - 2e^{-as} + e^{-2as}\right)\frac{1}{s^2} \tag{5}$$

$$= \frac{k}{a}\left(1 - e^{-as}\right)^2\frac{1}{s^2} \tag{6}$$

ワークシート問題	5章3節　階段関数の応用		
記入日	学籍番号	名前	確認印

RC 回路に直列に図のような単一パルス電圧を加えた場合の，電流 $I(t)$ を求めよ。ただし，はじめコンデンサに電荷は蓄積されていなかったとする。



【解答】パルス電圧関数は $E(t) = E_0\left(\Theta_a(t) - \Theta_{a+T}(t)\right)$ と表される．これを系の微分方程式に代入して，ラプラス変換を行うと，

$$\frac{1}{s}\mathscr{L}[I] + RC\mathscr{L}[I] = CE_0\left\{\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-(a+T)s}}{s}\right\} \tag{7}$$

$\tau = RC$ とおいて整理すると，

$$\mathscr{L}[I] = \frac{CE_0\left\{e^{-as} - e^{-(a+T)s}\right\}}{s\left(\frac{1}{s}+\tau\right)} = \frac{E_0}{R}\frac{\left\{e^{-as} - e^{-(a+T)s}\right\}}{s+\frac{1}{\tau}} \tag{8}$$

t 軸上の移動定理を用いて，原関数は

$$I(t) = \frac{E_0}{R}\left\{e^{-\frac{t-a}{\tau}}\Theta_a(t) - e^{-\frac{t-a-T}{\tau}}\Theta_{a+T}(t)\right\} \tag{9}$$

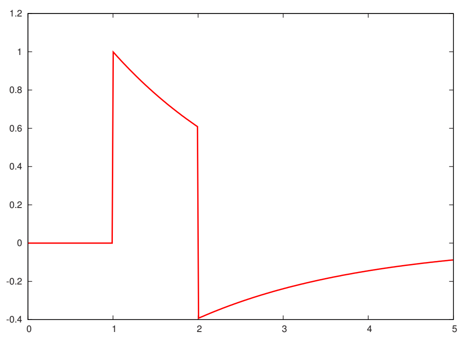


図 1: $a = T = 1$, $\tau = 2$ の場合の図