5.1 ドリル問題の解答

問題 1

(1) $\underline{\dfrac{\sqrt{\pi}}{s}}$

(2) $\underline{\dfrac{3!}{s^4} + \dfrac{1}{s^2}}$

(3) $(a+bt)^2 = a^2 + 2abt + b^2t^2$　したがって，$\underline{\dfrac{a^2}{s} + \dfrac{2ab}{s^2} + \dfrac{2b^2}{s^3}}$

(4) $t^{\frac{1}{2}}$　したがって，$\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{s^{\frac{1}{2}+1}} = \dfrac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} = \underline{\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}}$

(5) $\dfrac{1}{s-(-3)} = \underline{\dfrac{1}{s+3}}$

(6) $e^{-at+b} = e^b \cdot e^{-at}$　したがって，$\underline{\dfrac{e^b}{s+a}}$

(7) $\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\omega t\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\omega t\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\omega t + \cos\omega t\right)$

したがって，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} + \dfrac{s}{s^2+\omega^2}\right) = \underline{\dfrac{s+w}{\sqrt{2}(s^2+\omega^2)}}$

(8) $\omega = 2\pi$として$\underline{\dfrac{s}{s^2+(2\pi)^2}}$

(9) $\sin^2\omega t = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)$　したがって，$\underline{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+(2\omega)^2}\right)}$

(10) $(\sin\omega t - \cos\omega t)^2 = 1 - \sin 2\omega t$　したがって，$\underline{\dfrac{1}{s} - \dfrac{2\omega}{s^2+(2\omega)^2}}$

(11) $\cosh^2 2t = \left(\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{4t}+e^{-4t}+2}{4} = \dfrac{1}{2}\left(\cosh 4t + 1\right)$　したがって，$\underline{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s}{s^2-(4)^2} + \dfrac{1}{s}\right)}$

問題 2

(1) $\underline{e}$

(2) $\underline{e^{-2t}}$

(3) $\underline{2\omega e^{-kt}}$

(4) $\dfrac{1}{s^2+9} = \dfrac{1}{3}\dfrac{3}{s^2+3^2}$　したがって，$\underline{\dfrac{1}{3}\sin 3t}$

(5) $\dfrac{1}{(s+3)(s+5)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s+3} - \dfrac{1}{s+5}\right)$　したがって，$\underline{\dfrac{1}{2}\left(e^{-3t} - e^{-5t}\right)}$

(6) $\dfrac{a}{3s^2+5s+2} = \dfrac{a}{(s+1)(3s+2)} = \dfrac{a}{3(s+1)(s+\frac{2}{3})} = a\left(\dfrac{1}{s+\frac{2}{3}} - \dfrac{1}{s+1}\right)$　したがって，$\underline{a\left(e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-t}\right)}$

(7) $\dfrac{1}{s^5} = \dfrac{1}{4!}\dfrac{4!}{s^5}$　したがって，$\underline{\dfrac{t^4}{4!}}$

(8) $\dfrac{1}{s^2-\pi^2} = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\pi}{s^2-\pi^2}$　したがって，$\underline{\dfrac{1}{\pi}\sinh \pi t}$

(9) $\dfrac{s+1}{s^2+s-6} = \dfrac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{s-2} + \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{s+3}$　したがって，$\underline{\dfrac{3}{5}e^{2t} + \dfrac{2}{5}e^{-3t}}$

5.1 演習問題の解答

1.

(1) $\displaystyle\int_0^a \frac{t}{a}\,e^{-st}\,dt = -\frac{1}{as}\Big[te^{-st}\Big]_0^a + \frac{1}{as}\int_0^a e^{-st}\,dt = -\frac{ae^{-sa}}{as} - \frac{1}{as^2}\Big[e^{-st}\Big]_0^a = \underline{-\frac{e^{-as}}{s} - \frac{1}{as^2}(e^{-as}-1)}$

(2) $\displaystyle\int_a^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}\Big[e^{-st}\Big]_a^\infty = \underline{\frac{e^{-as}}{s}}$

(3) $\displaystyle\int_a^T e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}\Big[e^{-st}\Big]_a^T = \underline{\frac{e^{-as} - e^{-(a+T)s}}{s}}$

(4) $\displaystyle\int_a^{a+b} \frac{(a+b-t)}{b}e^{-st}\,dt = -\frac{1}{bs}\Big[(a+b)e^{-st} - te^{-st}\Big]_a^{a+b} + \frac{1}{bs^2}\Big[e^{-st}\Big]_a^{a+b}$

$\displaystyle = -\frac{1}{bs}\left[(a+b)e^{-(a+b)s} - (a+b)e^{-(a+b)s} - (a+b)e^{-as} + ae^{-as}\right] + \frac{1}{bs^2}\left(e^{-(a+b)s} - e^{-as}\right)$

$\displaystyle = -\frac{1}{bs}(-be^{-as}) + \frac{e^{-(a+b)s} - e^{-as}}{bs^2} = \underline{\frac{e^{-as}}{s} + \frac{e^{-(a+b)s} - e^{-as}}{bs^2}}$

2.

(1) $\mathscr{L}[\,3y' + y\,] = 3sY - 3y(0) + Y = 0 \;\Rightarrow\; Y = \dfrac{3y(0)}{3s+1} = \dfrac{y(0)}{s+\frac{1}{3}}$

したがって，$y(t) = y(0)e^{-\frac{1}{3}t} = \underline{2e^{-\frac{1}{3}t}}$

(2) $\mathscr{L}[\,y' + y\,] = sY - y(0) + Y = \mathscr{L}\left[\,e^{-3t}\,\right] = \dfrac{1}{s+3}$

$\Rightarrow\; Y = \dfrac{y(0)}{s+1} + \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} = \dfrac{y(0)}{s+1} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+3}\right)$

したがって，$y(t) = 5e^{-t} + \dfrac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right) = \underline{\dfrac{11}{2}e^{-t} - \dfrac{1}{2}e^{-3t}}$

(3) $\mathscr{L}[\,y'' + 9y\,] = s^2Y - sy(0) - y'(0) + 9Y = 0$

$\Rightarrow\; Y = \dfrac{sy(0) + y'(0)}{s^2+9} = 0 + \dfrac{y'(0)}{3}\dfrac{3}{s^2+3^2}$　したがって，$y(t) = \underline{\dfrac{v}{3}\sin 3t}$

(4) $\mathscr{L}[\,y'' + 16y\,] = s^2Y - sy(0) - y'(0) + 16Y = \mathscr{L}[\,\sin 2t\,] = \dfrac{2}{s^2+2^2}$

$\Rightarrow\; Y = \dfrac{sy(0) + y'(0)}{s^2+4^2} + \dfrac{2}{(s^2+4^2)(s^2+2^2)} = y(0)\dfrac{s}{s^2+4^2} + \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{s^2+2^2} - \dfrac{1}{s^2+4^2}\right)$

$= \dfrac{s}{s^2+4^2} + \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{s^2+2^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{4}{s^2+4^2}\right)$　したがって，$y(t) = \cos 4t + \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2t - \dfrac{1}{4}\sin 4t\right)$

$= \cos 4t - \dfrac{1}{24}\sin 4t + \dfrac{1}{12}\sin 2t$

(5) $\mathscr{L}\,[\,y''-5y\,] = s^2Y - sy(0) - y'(0) - 5Y = 0 \ \Rightarrow\ Y = \dfrac{sy(0)+y'(0)}{s^2-5} = y(0)\dfrac{s}{s^2-(\sqrt{5})^2} + 0$

したがって，$y(t) = \underline{\cosh(\sqrt{5}t)}$

(6) $\mathscr{L}\,[\,y''+y'-6y\,] = s^2Y - sy(0) - y'(0) + sY - y(0) - 6Y = 0$

$$\Rightarrow\ Y = \frac{sy(0)+y'(0)+y(0)}{s^2+s-6} = \frac{(s+1)y(0)}{(s+3)(s-2)}$$
$$= 1\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s-2}\right)\quad \text{したがって，}\ y(t) = \underline{\frac{2}{5}e^{-3t}+\frac{3}{5}e^{2t}}$$

(7) $\mathscr{L}\,[\,2y''+3y'+6y\,] = 2s^2Y - 2sy(0) - 2y'(0) + 3sY - 3y(0) + 6Y = 0$

$$\Rightarrow\ Y = \frac{2sy(0)+2y'(0)+3y(0)}{2s^2+3s+6} = \frac{2y'(0)}{2\left(s+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{39}{8}} = \frac{y'(0)}{\left(s+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{39}{16}}$$
$$\text{したがって，}\ y(t) = y'(0)\frac{4}{\sqrt{39}}e^{-\frac{3}{4}t}\sin\frac{\sqrt{39}}{4}t = \underline{\frac{12}{\sqrt{39}}e^{-\frac{3}{4}t}\sin\frac{\sqrt{39}}{4}t}$$

3.

$$I = \int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt = \left[e^{-st}\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]_0^\infty + \frac{s}{\omega}\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt = 0 + \frac{s}{\omega}J$$
$$J = \int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt = -\left[e^{-st}\frac{\cos\omega t}{\omega}\right]_0^\infty - \frac{s}{\omega}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt = \frac{1}{\omega}-\frac{s}{\omega}I = \frac{1}{\omega}-\frac{s^2}{\omega^2}J$$
$$\Rightarrow \left(1+\frac{s^2}{\omega^2}\right)J = \frac{1}{\omega}\quad \text{したがって，}\ J = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},\quad I = \frac{s}{\omega}J = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

4.

コイルの両端の電圧を V_L，抵抗の両端の電圧を V_R とおくと，$V_L = L\dot{I}(t),\quad V_R = IR$ であり，キルヒホッフの第一法則から，回路を流れる電流 $I(t)$ に関する微分方程式，及び一般解は次のように与えられる．

$$IR + L\dot{I} = E_0 \xrightarrow[\text{ラプラス変換}]{} \mathscr{I}(s)R + Ls\mathscr{I}(s) - LI(0) = \frac{E_0}{s},\quad \tau = \frac{L}{R}\text{として}$$
$$\mathscr{I}(s) = \frac{1}{R+Ls}\left(\frac{E_0}{s}+LI(0)\right) = \frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\tau^{-1}}\right) + \frac{I(0)}{s+\tau^{-1}}$$
$$\xrightarrow[\text{逆ラプラス変換}]{}\quad I(t) = \frac{E_0}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + I(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

これより，電流の最終値 $I(\infty)$ は $I(\infty) = \lim_{t\to\infty} I(t) = \dfrac{E_0}{R}$ である．

5.2 ドリル問題の解答

問題 1

(1) $(t+3)^3 = t^3 + 3\cdot 3t^2 + 3\cdot 3^2 t + 3^3$ と展開して，$\underline{\dfrac{6}{s^4}+\dfrac{18}{s^3}+\dfrac{27}{s^2}+\dfrac{27}{s}}$

(2) $e^{-t+3} = e^{-t}e^3,\quad \underline{\dfrac{e^3}{s+1}}$

(3) $\sin(\omega t+\theta) = \sin\omega t\cos\theta + \cos\omega t\sin\theta$ と展開して，$\underline{\dfrac{\cos\theta\omega+\sin\theta s}{s^2+\omega^2}}$

(4) $\mathscr{L}\left[\,t\sin\omega t\,\right]=\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$ であるから，$\mathscr{L}\left[\,e^{-kt}\,(t\sin\omega t)\,\right]=\dfrac{2\omega(s+k)}{\left\{(s+k)^2+\omega^2\right\}^2}$

【別法】 $\mathscr{L}\left[\,e^{-kt}\sin\omega t\,\right]=\dfrac{\omega}{(s+k)^2+\omega^2}$ であるから, $\mathscr{L}\left[\,te^{-kt}\sin\omega t\,\right]=-\dfrac{d}{ds}\dfrac{\omega}{(s+k)^2+\omega^2}$
$=-\dfrac{-\omega\cdot 2(s+k)}{\left\{(s+k)^2+\omega^2\right\}^2}$

(5) $t^2e^{-k(t-a)}=e^{ka}e^{-kt}t^2$, $\;e^{ka}\dfrac{2!}{(s+k)^3}$

(6) $\mathscr{L}\left[\,e^{3t}-1\,\right]=\dfrac{1}{s-3}-\dfrac{1}{s}$ であるから，$\mathscr{L}\left[\dfrac{e^{3t}-1}{t}\right]=\displaystyle\int_s^\infty\left(\frac{1}{\sigma-3}-\frac{1}{\sigma}\right)d\sigma$
$=\left[\log\left|\dfrac{\sigma-3}{\sigma}\right|\right]_s^\infty=\log\left|\dfrac{s}{s-3}\right| \qquad (s>3)$

(7) $\mathscr{L}\left[\,1-\cos 2t\,\right]=\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+2^2}$ 　であるから，$\mathscr{L}\left[\dfrac{1-\cos 2t}{t}\right]=\displaystyle\int_s^\infty\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{\sigma}{\sigma^2+2^2}\right)d\sigma$
$=\left[\log\left|\dfrac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+2^2}}\right|\right]_s^\infty=\log\left|\dfrac{\sqrt{s^2+2^2}}{s}\right|=\dfrac{1}{2}\log\left(1+\dfrac{2^2}{s^2}\right)$

(8) $e^{-as}\mathscr{L}\left[\,e^{-3t}\,\right]=\dfrac{e^{-as}}{s+3}$

(9) $e^{-4t}\Theta_a(t)=e^{-4a}e^{-4(t-a)}\Theta_a(t)$ であるから，$e^{-4a}e^{-as}\mathscr{L}\left[\,e^{-4t}\,\right]=\dfrac{e^{-(4+s)a}}{s+4}$

【別法】 $\mathscr{L}\left[\,\Theta_a(t)\,\right]=\dfrac{e^{-as}}{s}$ であるから，$\mathscr{L}\left[\,e^{-4t}\Theta_a(t)\,\right]=\dfrac{e^{-a(s+4)}}{s+4}$

(10) $e^{-as}\mathscr{L}\left[\,\cos\omega t\,\right]=\dfrac{e^{-as}s}{s^2+\omega^2}$

(11) $\sin\omega t=\sin(\omega(t-a)+\omega a)=\sin(\omega(t-a))\cos(\omega a)+\cos(\omega(t-a))(\sin\omega a)$ であるから，
$e^{-as}\Big\{\cos(\omega a)\mathscr{L}\left[\,\sin\omega t\,\right]+\sin(\omega a)\mathscr{L}\left[\,\cos\omega t\,\right]\Big\}$
$=\dfrac{e^{-as}\left\{\cos(\omega a)\omega+\sin(\omega a)s\right\}}{s^2+\omega^2}$

(12) $f(t)=\cos t+\cos(t-\pi)\Theta_\pi(t)$ と表されるので，$\dfrac{s}{s^2+1^2}+e^{-\pi s}\dfrac{s}{s^2+1^2}=\dfrac{(1+e^{-\pi s})s}{s^2+1}$

【別法】 $\displaystyle\int_0^\pi\cos t\,e^{-st}\,dt=\left[\frac{e^{-st}(-s\cos t+\sin t)}{s^2+1}\right]_0^\pi=\frac{(e^{-\pi s}+1)s}{s^2+1}$

(13) $f(t)=t-(t-1)\Theta_1(t)$ と表されるので，$\dfrac{1}{s^2}-e^{-s}\dfrac{1}{s^2}=\dfrac{1-e^{-s}}{s^2}$

問題 2

(1) $\dfrac{e^{-s}}{s^2}=e^{-1s}\mathscr{L}\left[\,t\,\right]$ であるから，$(t-1)\Theta(t-1)$

(2) $\dfrac{1}{(s-3)^3}=\dfrac{1}{2}\mathscr{L}\left[\,e^{-3t}t^2\,\right]$ より $e^{-3s}\mathscr{L}\left[\dfrac{1}{2}e^{-3t}t^2\right]$ と考えて，$\dfrac{1}{2}e^{-3(t-3)}(t-3)^2\Theta(t-3)$

(3) $\dfrac{1}{(s+3)(s+5)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s+3}-\dfrac{1}{s+5}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{-3t}-e^{-5t}\right)$ であるから
$\underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{1}{2}\left(e^{-3(t-2)}-e^{-5(t-2)}\right)\Theta(t-2)}$

(4) $\dfrac{d}{ds}\log\left(1-\dfrac{a^2}{s^2}\right)=\dfrac{2a^2s^{-3}}{1-\frac{a^2}{s^2}}=\dfrac{2a^2}{s(s^2-a^2)}=\dfrac{2s}{s^2-a^2}-\dfrac{2}{s}=\mathscr{L}\left[\,2\cosh at-2\,\right]$ であるから，
$\underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{2(\cosh at-1)}{t}}$

(5) $\dfrac{d}{ds}\log\left(\dfrac{s+a}{s-a}\right)=\dfrac{1}{s+a}-\dfrac{1}{s-a}=\mathscr{L}\left[\,e^{-at}-e^{at}\,\right]$ であるから $\dfrac{e^{-at}-e^{at}}{t}=\underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{-2\sinh at}{t}}$

(6) $\dfrac{d}{ds}\arctan\left(\dfrac{\omega}{s}\right)=\dfrac{-\omega s^{-2}}{1+\frac{\omega^2}{s^2}}=-\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}=\mathscr{L}\left[\,-\sin\omega t\,\right]$　したがって，$\underset{\sim\sim\sim}{-\dfrac{\sin\omega t}{t}}$

(7) $\dfrac{s}{(s^2-9)^2}=\dfrac{d}{ds}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s^2-3^2}\right)=\dfrac{d}{ds}\left(-\dfrac{1}{6}\mathscr{L}\left[\,\sinh(3t)\,\right]\right)$
したがって，$-t\left(-\dfrac{1}{6}\sinh(3t)\right)=\underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{t}{6}\sinh(3t)}$

【別法】 $\dfrac{s}{(s^2-9)^2}=\dfrac{s}{(s-3)^2(s+3)^2}=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{(s-3)^2}-\dfrac{1}{(s+3)^2}\right)$
したがって，$\dfrac{1}{12}\left(e^{3t}t-e^{-3t}t\right)=\dfrac{t}{6}\sinh(3t)$

(8) $\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}=\dfrac{d}{ds}\left(-\dfrac{1}{s^2+1^2}\right)=\dfrac{d}{ds}\Big(-\sin t\Big)$　したがって，$-t\Big(-\sin t\Big)=\underset{\sim\sim\sim}{t\sin t}$

(9) $\dfrac{s^2-16}{(s^2+16)^2}=\dfrac{d}{ds}\left(-\dfrac{s}{s^2+4^2}\right)=\dfrac{d}{ds}\Big(\mathscr{L}\left[\,-\cos 4t\,\right]\Big)$　したがって，$\underset{\sim\sim\sim}{t\cos 4t}$

5.2 演習問題の解答

1.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{at}t^ne^{-st}\,dt=\int_0^\infty t^ne^{-(s-a)t}\,dt=\int_0^\infty t^ne^{-\sigma t}\,dt=\frac{n!}{\sigma^{n+1}}=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty t\cos\omega te^{-st}\,dt=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\omega}\Big(\sin\omega te^{-st}\Big)\,dt=\frac{d}{d\omega}\int_0^\infty\sin\omega te^{-st}\,dt=\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$
$=\dfrac{(s^2+\omega^2)-\omega\cdot 2\omega}{(s^2+\omega^2)^2}=\underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}}$，$\mathscr{L}\left[\,t\sin\omega t\,\right]$ も同様にして導ける．

【別法】 $e^{i\omega}=\cos\omega t+i\sin\omega t$ より，$\mathscr{L}\left[\,t\cos\omega t\,\right]=\mathrm{Re}\Big(\mathscr{L}\left[\,te^{i\omega}\,\right]\Big)$，$\mathscr{L}\left[\,t\sin\omega t\,\right]=\mathrm{Im}\Big(\mathscr{L}\left[\,te^{i\omega}\,\right]\Big)$
として求める．
$\displaystyle\mathscr{L}\left[\,e^{i\omega}t\,\right]=\int_0^\infty te^{(i\omega-s)t}\,dt=\left[t\frac{e^{(i\omega-s)t}}{i\omega-s}\right]_0^\infty-\int_0^\infty\frac{e^{(i\omega-s)t}}{i\omega-s}\,dt$
$\displaystyle=0-\left[\frac{e^{(i\omega-s)t}}{(i\omega-s)^2}\right]_0^\infty=\frac{1}{(i\omega-s)^2}=\frac{(i\omega+s)^2}{\{(i\omega-s)(i\omega+s)\}^2}=\frac{s^2-\omega^2+2i\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$=\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}+i\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$ となり，実部と虚部を比較すればよい．

2.

(1) $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}=\dfrac{1}{2\omega^2}\left[\dfrac{s^2+\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}-\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\dfrac{1}{2\omega^2}\left[\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\omega}{(s^2+\omega^2)}-\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right]$

したがって，$\underline{\dfrac{1}{2\omega^2}\left(\dfrac{\sin\omega t}{\omega}-t\cos\omega t\right)}$

$\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{s^2+\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}+\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right]$ したがって，$\underline{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\omega t}{\omega}+t\cos\omega t\right)}$

3.

(1) $f(t)=k\sin\omega t+k\sin\omega\Big(t-\dfrac{\pi}{\omega}\Big)\Theta\Big(t-\dfrac{\pi}{\omega}\Big)$ と表されるから，

$\mathscr{L}[\,f(t)\,]=\dfrac{k\omega}{s^2+\omega^2}+e^{-\frac{\pi s}{\omega}}\dfrac{k\omega}{s^2+\omega^2}=\underline{\dfrac{k\omega\big(1+e^{\frac{-\pi s}{\omega}}\big)}{s^2+\omega^2}}$

(2) $f(t)=\Big[k\sin\omega t+k\sin\omega\Big(t-\dfrac{\pi}{\omega}\Big)\Theta\Big(t-\dfrac{\pi}{\omega}\Big)\Big]$

$+\Big[k\sin\omega\Big(t-\dfrac{\pi}{\omega}\Big)\Theta\Big(t-\dfrac{\pi}{\omega}\Big)+k\sin\omega\Big(t-\dfrac{2\pi}{\omega}\Big)\Theta\Big(t-\dfrac{2\pi}{\omega}\Big)\Big]$ と表されるから，

$\mathscr{L}[\,f(t)\,]=\underline{\dfrac{k\omega\big(1+2e^{\frac{-\pi s}{\omega}}+e^{\frac{-2\pi s}{\omega}}\big)}{s^2+\omega^2}}$

5 章 ワークシート 問題の解答

1.

両辺を Laplace 変換後に整理して，

$$
\begin{aligned}
&s^2\mathscr{L}[\,y\,]-sy(0)-y'(0)+3s\mathscr{L}[\,y\,]-3y(0)+2\mathscr{L}[\,y\,]=\frac{1}{s+3}\\
&\mathscr{L}[\,y\,]=\frac{1}{(s+3)(s^2+3s+2)}=\frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)}\\
&\qquad=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}
\end{aligned}
$$

ラプラス変換表より，原関数は

$$\underline{y(t)=\frac{1}{2}e^{-3t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-t}}$$

2.

関数 $f(t)$ は以下のように表される．

$$\underline{f(t)=\frac{kt}{a}\,\Theta_0(t)-2\frac{k(t-a)}{a}\,\Theta_a(t)+\frac{k(t-2a)}{a}\,\Theta_{2a}(t)}$$

また，そのラプラス変換は，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}[\,f\,]&=\frac{k}{a}\frac{1}{s^2}-\frac{2k}{a}e^{-as}\frac{1}{s^2}+\frac{k}{a}e^{-2as}\frac{1}{s^2}=\frac{k}{a}\Big(1-2e^{-as}+e^{-2as}\Big)\frac{1}{s^2}\\
&=\underline{\frac{k}{a}\Big(1-e^{-as}\Big)^2\frac{1}{s^2}}
\end{aligned}
$$

3.

パルス電圧関数は $E(t) = E_0\big(\Theta(t-a) - \Theta(t-a-T)\big)$ と表される．これを系の微分方程式に代入して，ラプラス変換を行うと，

$$\frac{1}{s}\mathscr{L}[I] + RC\mathscr{L}[I] = CE_0\left\{\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-(a+T)s}}{s}\right\}$$

$\tau = RC$ とおいて整理すると，

$$\mathscr{L}[I] = \frac{CE_0\left\{e^{-as} - e^{-(a+T)s}\right\}}{s\left(\frac{1}{s}+\tau\right)} = \frac{E_0}{R}\frac{\left\{e^{-as} - e^{-(a+T)s}\right\}}{s+\frac{1}{\tau}}$$

t 軸上の移動定理を用いて，原関数は

$$\underline{I(t) = \frac{E_0}{R}\left\{e^{-\frac{t-a}{\tau}}\Theta(t-a) - e^{-\frac{t-a-T}{\tau}}\Theta(t-a-T)\right\}}$$

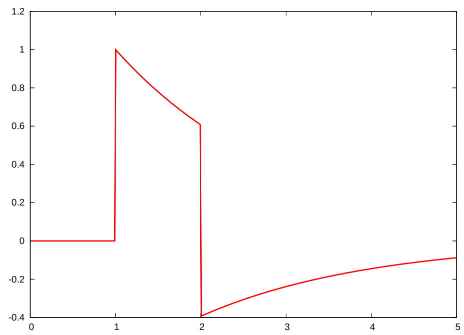

図 1: $a = T = 1$, $\tau = 2$ の場合の図