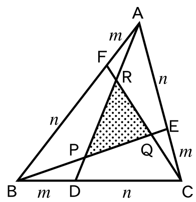
教材ワンポイント

メネラウスの定理の活用

―三角形の各頂点とその対辺の同比内分点を結んでできる三角形の面積について―

●三角形の各頂点とその対辺の同比内分点を結んでできる三角形の面積を求めてみよう

任意の△ABCにおいて，3辺BC，CA，ABをそれぞれ$m:n$に内分する点をD，E，Fとし，線分ADとBEの交点をP，線分BEとCFの交点をQ，線分CFとADの交点をRとするとき，△PQRの面積はもとの△ABCの面積の何倍になるか考えてみよう。



●考え方～図的考察～

△PQRの面積は，△ABCの面積から，△ABP，△BCQ，△CARの面積の和を引けばよい。

△ABCの面積をSとして，△ABPの面積をm，n，Sで表してみよう。

△ABDの面積=△BCEの面積

$=$△CAFの面積$=\dfrac{m}{m+n}S$であるから，

△ABPの面積$=\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}\times$(△ABDの面積)$=\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}\times\dfrac{m}{m+n}S$

よって，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}$の値がわかれば，同様に，$\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BE}}$，$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CF}}$の値も同じ値として求められることから，

△ABPの面積=△BCQの面積=△CARの面積であることがわかる。

よって，△PQRの面積$=S-$(△ABPの面積)×3である。(図1参照)

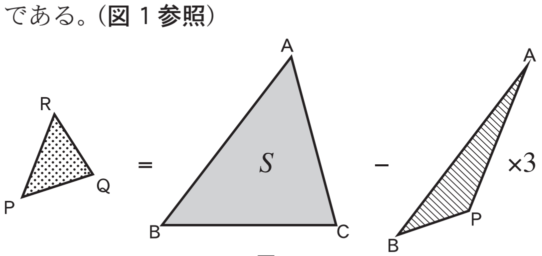
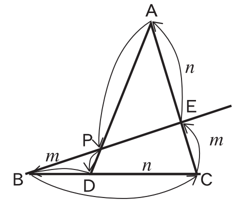


図1

●メネラウスの定理の活用



△ACDと直線BEに**メネラウスの定理**を適用すると$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\dfrac{m}{m+n}\cdot\dfrac{m}{n}=1$ よって，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\dfrac{n(m+n)}{m^2}$である。

すなわち，$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=n(m+n):m^2$

したがって，$\mathrm{AP}:\mathrm{AD}=n(m+n):(m^2+mn+n^2)$

であるから

$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{n(m+n)}{m^2+mn+n^2}$ より，

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{n(m+n)}{m^2+mn+n^2}\times\frac{m}{m+n}S=\frac{mn}{m^2+mn+n^2}S$$

同様に，$\triangle\mathrm{ABP}=\triangle\mathrm{BCQ}=\triangle\mathrm{CAR}=\dfrac{mn}{m^2+mn+n^2}S$

よって，$\triangle\mathrm{PQR}=S-3\dfrac{mn}{m^2+mn+n^2}S=\dfrac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2}S$

●研究

(1) $0<t<1$，$t\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$である定数$t$に対し，△ABCの3辺BC，CA，ABをそれぞれ$t:(1-t)$に内分する点をD，E，F，ADとBEの交点をP，BEとCFの交点をQ，CFとADの交点をRとするとき，△PQRの面積は△ABCの面積の何倍になるか。tの式で表せ。とくに，△PQRの面積が△ABCの面積の半分になるときのtの値を求めよ。

(2) (1)でのtの式を$f(t)$とする。$f(0)=f(1)=1$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$として，$f(t)\,(0\leqq t\leqq1)$を考えるとき，定積分$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$の値を求めよ。

通巻第90号　2025年 4月 1日 発行
©編修･発行 実教出版株式会社　代表者 小田良次
発行所 〒102-8377 東京都千代田区五番町5
TEL. 03-3238-7777
https://www.jikkyo.co.jp/