

数学オリンピックの問題例

公益財団法人数学オリンピック財団 理事 近藤宏樹

1. 数学オリンピックとは

世界中の数学好きの生徒の才能を伸ばす目的で、年に1回各国の持ち回りにより国際数学オリンピック (International Mathematical Olympiad, IMO) が開催されている。日本は1990年から参加しており、2023年7月には20年ぶりとなる日本大会が千葉市で行われる。

IMOには各国から6名以下の選手が選抜されて参加することになるが、日本代表選手を選抜するコンテストとして日本数学オリンピック (Japan Mathematical Olympiad, JMO) がある。毎年1月に短答式の12問の問題で競う予選、2月に記述式の5問の問題で競う本選があり、3月に行われる代表選考合宿を経て日本代表選手6名が選抜されている。また、ヨーロッパ女子数学オリンピック (European Girls' Mathematical Olympiad, EGMO) の代表選手4名を選抜するコンテストも行われている。

IMOやJMOの出題範囲は世界各国の高校程度とされており、日本の高校範囲である微積分や確率・統計は範囲外である。出題される問題は代数 (Algebra)、整数 (Number theory)、幾何 (Geometry)、組合せ (Combinatorics) に分類される。

ここでは、近年の国内選抜の問題を題材として、数学オリンピックの特徴的な問題を紹介したい。

2. 日本数学オリンピック予選の問題

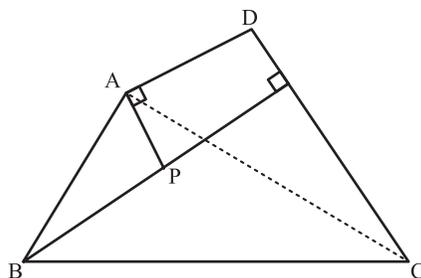
JMO予選は制限時間3時間で短答式の問題12問に解答する。

まずは幾何の問題を見てみよう。幾何はほとんどが平面図形に関する問題であり、必要な知識は相似、三角形の五心、円の性質など高校の数学Aまでで扱うものがほとんどである。図の中からうまく相似や共円点を探して解答することになる。

場合によっては、三角比や座標計算で押し切ることも有効である。

問題例の一つ挙げる。

凸四角形 $ABCD$ とその内部の点 P があり、直線 AP と直線 AD 、直線 BP と直線 CD はそれぞれ直交する。 $AB=7$ 、 $AP=3$ 、 $BP=6$ 、 $AD=5$ 、 $CD=10$ のとき、三角形 ABC の面積を求めよ。ただし、 XY で線分 XY の長さを表すものとする。
(2022年JMO予選第4問)



与えられた条件より $\angle APB = \angle ADC$ かつ $AP:PB = AD:DC = 1:2$ であるから、 $\triangle APB$ と $\triangle ADC$ が相似であることが分かる。ここから AC の長さが求まり、さらに $\angle BAC = 90^\circ$ が導かれるため、ここから $\triangle ABC$ の面積が求まる。(答: $\frac{245}{6}$)

本問の正答率は26%であり、予選合格のためには正解したい問題であった。幾何の問題の中には思いつきづらい補助線が必要なものもあるが、比較的取り組みやすい分野かもしれない。

次に、組合せの問題を紹介する。組合せではほとんどの問題で何らかの条件を満たす集合の要素の個数が問われる。次の問題は整数の組の数え上げであるが、やみくもに数え始めるのではなく、問題文の条件を整理してうまく言い換えることが重要となる。

$a_1 < a_2 < \dots < a_{2022}$ をみたす正の整数の組 $(a_1, a_2, \dots, a_{2022})$ であって、
 $a_1^2 - 6^2 \geq a_2^2 - 7^2 \geq \dots \geq a_{2022}^2 - 2027^2$
が成り立つものはいくつあるか。
(2022年JMO予選第8問)

問題の一つ目の条件より a_{k+1} は a_k より大きいが、二つ目の条件 $a_k^2 - (k+5)^2 \geq a_{k+1}^2 - (k+6)^2 \cdots (*)$ は a_{k+1} が a_k よりあまり大きすぎると成立しなそう、という観察が解答への道となる。

試しに $a_{k+1} \geq a_k + 2$ と仮定してみると、 $(*)$ より $4a_k \leq 2k+7$ が得られ、一つ目の条件より $a_k \geq k$ であることと合わせると $k \leq 3$ が分かる。よって $k \geq 4$ のとき $a_{k+1} = a_k + 1$ となり、 a_1, a_2, a_3, a_4 を決めれば全ての a_k が定まってしまう。あとは $(*)$ に注意して地道に数え上げることで答が得られる。

(答：10 個)

この問題は 13% の受験者が正答しており、やはり予選合格のためには正解したい問題といえる。

3. 日本数学オリンピック本選の問題

JMO 本選は、4 時間で記述式の問題 5 問に解答する。ほとんどが証明問題であり、値を求める問題であってもその正当性を証明することが求められる。

次の問題は本選の問題としては易しいが、題意を正確に把握して記述することが必要な問題である。

正の整数に対して定義され正の整数値をとる関数 f であって、正の整数 m, n に対する次の 2 つの命題が同値となるようなものをすべて求めよ。

- ・ n は m を割りきる。
- ・ $f(n)$ は $f(m) - n$ を割りきる。

(2021 年 JMO 本選第 1 問)

未知の関数を決定する関数方程式の問題である。本問は整数分野としての出題であるが、定義域が実数全体であるような関数を求める代数分野としての出題も見られる。不慣れた受験者は関数を多項式関数に限定して調べてしまうとといった勘違いをしやすいが、問題文の条件にあれこれ数値や式を代入してみるなどして求める関数について分かる性質を徐々に解き明かしていく必要がある。

条件は正の整数 m, n ごとに成立するものであるが、特殊な場合として $m = n$ のときを考えてみると、一つ目の命題が真であることから二つ目も真、すなわち $f(n) - n$ は $f(n)$ の倍数であるこ

とが分かる。これより n は $f(n)$ の倍数、つまり $f(n)$ は n の約数である。特に $f(1) = 1$ が分かる。次に $f(2)$ は 2 の約数であるが、仮に $f(2) = 1$ とすると $(n, m) = (2, 1)$ としたときに一つ目の命題が偽、二つ目が真となり条件に反する。よって $f(2) = 2$ が分かる。こうした具合に実験をしていくと、任意の n に対し $f(n) = n$ に限られることが予想でき、あとはこれを数学的帰納法で示せばよい。

もう 1 問記述式の問題を紹介する。EGMO の選抜試験は JMO 本選よりやや易しい問題が多く、数学オリンピックの記述式問題に挑戦する最初のステップとして最適であろう。

2 次の係数が正であるような実数係数 2 次多項式 $f(x)$ について、 $f(\alpha) = \alpha$ をみたす実数 α が存在しないとき、以下の条件をみたす正の整数 n が存在することを示せ。

$n+1$ 個の実数 a_0, a_1, \dots, a_n が、任意の 1 以上 n 以下の整数 i について $a_i = f(a_{i-1})$ をみたすとき、必ず $a_n > 2021$ が成立する。

(2022 年 EGMO 日本代表一次選抜試験第 2 問)

この問題は数学 I の 2 次関数の知識のみで解けるが、正答のためには正確な証明の記述力が求められる。

条件から $g(x) = f(x) - x$ のグラフは x 軸と共有点を持たない下に凸の放物線であり、このことから $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ がいえる。しかし、これだけで問題の結論が成立しているとしては不十分である。整数 n は a_0 の取り方によらずに選ぶ必要があり、これは $f(x)$ と $g(x)$ 両方の最小値を用いることで達成される。こうした問題の論理構造を捉えることが多くの受験者にとって難しかったようである。

4. おわりに

数学オリンピックの問題は、特別な予備知識こそ少ないが、様々な実験や考察を経て解答が得られることが多い。日本大会を契機として、こうした問題に興味を持つ方や、実際のコンテストに挑戦する中高生が増えれば幸いである。



第 64 回 国際数学オリンピック大会 IMO2023

日本で開催

国際数学オリンピック (The International Mathematical Olympiad : IMO) は、世界各国の高校生以下の若者の数学の才能を伸ばし励ますこと、そして、若者同士や教育関係者たちの国際交流を深めることを目的に行われる数学の一大イベントです。1956年に第1回大会がルーマニアで開催され、日本は、1990年の第31回中国大会から参加しています。2003年には、日本が主催国となり東京を会場として開催されましたが、今年2023年に再び日本で開かれます。

2023年のIMO大会は、7月千葉市(幕張メッセ)を会場として、世界約110カ国を超える国や地域からオリンピック人たちが集結して行われます。日本大会成功のため、応援をよろしくお願い申し上げます。

IMO2023 日本大会実行委員会委員長 藤田岳彦

IMO2023 日本大会開催概要

日 程	2023年7月2日(日)～13日(木)
大会会場	千葉県(千葉市)幕張メッセ 他
参加予定国数	110ヶ国・地域
参加予定人員	選手 660名(6名×110) 役員 220名(2名×110)

大会日程詳細

7月7日(金)	開会式
8日(土)	コンテスト1日目
9日(日)	コンテスト2日目
10日(月)	観光・国際交流
11日(火)	観光・国際交流
12日(水)	閉会式



IMO 2023



Chiba, JAPAN 64th

IMO2023 日本大会のロゴは、源氏香がモチーフです。ロゴ内の一つ一つのパーツが源氏物語の第16帖「関屋」を表しています。 $16 \times 4 = 64$ で第64回大会を表現しました。

IMO2023 日本大会ホームページ
<https://imo2023.jp/ja/>
公益財団法人 数学オリンピック財団ホームページ
<https://www.imojp.org/>

通巻第86号
2023年4月3日発行

© 編修・発行

実教出版株式会社

代表者 小田良次

発行所 〒102-8377 東京都千代田区五番町5

TEL. 03-3238-7777

<https://www.jikkyo.co.jp/>