練習問題及び章末問題解答

1 章

練習問題 1. (1) 8　(2) 8　(3) $\sqrt{14}$　(4) $\sqrt{51}$

練習問題 2. $k = 6$

章末問題 I

1. (1) 1　(2) 1　(3) $\sqrt{3}$　(4) $\sqrt{6}$

2. 定理 1.2 (2) $\boldsymbol{x} = (x_i)$, $\boldsymbol{y} = (y_i)$, $\boldsymbol{z} = (z_i)$ を n 次のベクトルとすると，

$$\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$$

また，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle$$

定理 1.2 (3)

$$\langle k\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (kx_i) y_i = k \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = k \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$$

また，

$$\langle \boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i (k y_i) = k \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = k \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$$

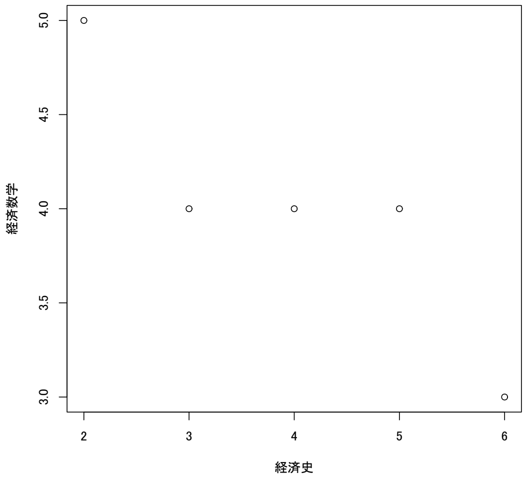
3. (1) $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = ||\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{y})|| \leqq ||\boldsymbol{x}|| + || - \boldsymbol{y}|| = ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$

(2) $||\boldsymbol{x}|| = ||(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}|| \leqq ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| + ||\boldsymbol{y}||$ であるので，

$$||\boldsymbol{y}|| - ||\boldsymbol{y}|| \leqq ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$$

章末問題 II

1. 散布図



経済史の点数の標本平均は

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\5\\3\\2\\4\end{pmatrix}=\frac{20}{5}=4$$

経済数学の点数の標本平均は

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\4\\5\\4\end{pmatrix}=\frac{20}{5}=4$$

よって、経済史と経済数学の点数の標本共分散は

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6-4 & 5-4 & 3-4 & 2-4 & 4-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3-4\\4-4\\4-4\\5-4\\4-4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{-4}{5}=-0.8$$

標本相関係数は，章末問題 II の 3 の結果を用いて計算を行う．経済史の点数の標本分散は，

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6-4 & 5-4 & 3-4 & 2-4 & 4-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6-4\\5-4\\3-4\\2-4\\4-4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}=\frac{10}{5}=2$$

経済数学の標本分散は

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3-4 & 4-4 & 4-4 & 5-4 & 4-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3-4\\4-4\\4-4\\5-4\\4-4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{2}{5}$$

よって，経済史と経済数学の点数の標本相関係数は

$$\frac{\frac{-4}{5}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{5}}}\simeq -0.89$$

2. $x_i, (i=1,\cdots,n)$ の標準化変量

$$z_{xi} = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

の標本平均は

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right) = \frac{1}{s_x} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \qquad = \frac{1}{s_x} \times \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}) = 0$$

となる．また，標本分散は

$$s_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)^2 = \frac{1}{s_x^2} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{s_x^2} \times s_x^2 = 1$$

となる．

3. x_i と $y_i, (i = 1, \cdots, n)$ の標本相関係数は，

$$r_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_{x_i} - \bar{z_x})(z_{y_i} - \bar{z_y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right) = \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

となる．

4. 本文でも示したように，$u_i = a + bx_i$ と $v_i = c + dy_i, (i = 1, \cdots, n)$ の標本共分散は

$$s_{uv} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} bd(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = bds_{xy}$$

となる．同様の式変形から u と v の標本分散は，それぞれ

$$s_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2 = b^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = b^2 s_x^2$$
$$s_v^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_i - \bar{v})^2 = d^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = d^2 s_y^2$$

となるので，章末問題IIの3の結果を利用すると，$u_i = a+bx_i$ と $v_i = c+dy_i, (i = 1, \cdots, n)$ の標本相関係数は

$$r_{uv} = \frac{bds_{uv}}{\sqrt{s_u^2}\sqrt{s_v^2}} = \frac{bds_{xy}}{\sqrt{b^2 s_x^2}\sqrt{d^2 s_y^2}} = \frac{bds_{xy}}{|b||d|s_x s_y} = \frac{bd}{|bd|} r_{xy}$$

となり，$bd > 0$ のとき，x と y の標本相関係数と一致する．また，この計算からもわかるように，$bd < 0$ のときは u と v の標本相関係数は x と y の標本相関係数にマイナス1をかけたものとなる．

2章

練習問題 1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

練習問題 2. (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

練習問題 3. (1) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $2A - 3B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -11 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

(3) $-A + 2B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

練習問題 4. (1) $AB = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $BC = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $CD = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

(5) 積は定義できない．なぜなら，A の列数が 3，D の行数が 2 で一致していない．

練習問題 5. (1) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ (2) $BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$ (3) $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 30 & 52 \end{pmatrix}$

(4) $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$ (5) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 15 & 13 \end{pmatrix}$

章末問題 I

1. (1) $AB = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ (2) $BA = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ -3 & 4 & 3 \\ -6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ (3) $CD - DC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $(C+D)A = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 7 \\ 6 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

2. 定理 2.2 (3) $(A+B)C = AC + BC$ を示す．(i, j) 成分を考えると，

$$(A+B)C = \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj} \right) = AC + BC$$

同様に，定理 2.2 (4) の $A(B+C) = AB + AC$ も示せる．

定理 2.2 (5) 零行列 O に対し，

$$AO = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} 0 \right) = O$$

同様に $OA = O$ も示せる．

定理 2.2 (6) 定数 k に対し，

$$k(AB) = \left(k \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j} \right) = \left(\sum_{\ell=1}^{n} (k a_{i\ell}) b_{\ell j} \right) = \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} (k b_{\ell j}) \right)$$

であることから，$k(AB) = (kA)B = A(kB)$ がしたがう．

3. 求める行列は 2 次の正方行列なので，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおく．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

から $c = 0$, $a = d$ が導かれる．よって，求める行列は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

の形をしている．ただし，a, b は任意の実数である．

4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対し，

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることから，

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と予想して，数学的帰納法によって示そう．まず，$n = 1$ のときは，明らかに成り立つ．$n = k$ のとき，A^k が上記の行列であると仮定すると，

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるため，$n = k+1$ の場合も成立する．よって，

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が示される．

章末問題 II

1. (1) 基準時点と比較時点での価格ベクトルは，それぞれ

$$p_0 = \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 180 \end{pmatrix}$$

また，基準時点と比較時点での数量ベクトルは，それぞれ

$$q_0 = \begin{pmatrix} q_{01} \\ q_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300000 \\ 150 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280000 \\ 200 \end{pmatrix}$$

であるので，ラスパイレス物価指数は，基準時点での数量ベクトル

$$q_0 = \begin{pmatrix} q_{01} \\ q_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300000 \\ 150 \end{pmatrix}$$

で評価した購入総額の比となる．

基準時点の購入総額は

$$p_{01}q_{01} + p_{02}q_{02} = \langle \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0 \rangle = 500 \times 300000 + 200 \times 150 = 150030000$$

基準時点の購入数量を基準時点においても購入したときの総額は

$$p_{11}q_{01} + p_{12}q_{02} = \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_0 \rangle = 600 \times 300000 + 180 \times 150 = 180027000$$

行列で表現すると

$$\begin{pmatrix} p_{01} & p_{02} \\ p_{11} & p_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{01} \\ q_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 & 200 \\ 600 & 180 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300000 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150030000 \\ 180027000 \end{pmatrix}$$

よって

$$\frac{\langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_0 \rangle}{\langle \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0 \rangle} = \frac{180027000}{150030000} \simeq 1.20$$

約 20 パーセントポイントの増加となる.

パーシェ物価指数は基準時点での数量ベクトル

$$q_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280000 \\ 200 \end{pmatrix}$$

で評価した購入総額の比となる.

比較時点の購入数量で評価した基準時点の購入総額は

$$p_{01}q_{11} + p_{02}q_{12} = \langle \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_1 \rangle = 500 \times 280000 + 200 \times 200 = 140040000$$

比較時点の購入総額は

$$p_{11}q_{11} + p_{12}q_{12} = \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1 \rangle = 600 \times 280000 + 180 \times 200 = 168036000$$

行列で表現すると

$$\begin{pmatrix} p_{01} & p_{02} \\ p_{11} & p_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 & 200 \\ 600 & 180 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 280000 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140040000 \\ 168036000 \end{pmatrix}$$

よって

$$\frac{\langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_0 \rangle}{\langle \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0 \rangle} = \frac{168036000}{140040000} \simeq 1.20$$

約 20 パーセントポイントの増加となる．　(2) 基準時点と比較時点での価格ベクトルは，それぞれ

$$p_0 = \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 600 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 800 \end{pmatrix}$$

また，基準時点と比較時点での数量ベクトルは，それぞれ

$$q_0 = \begin{pmatrix} q_{01} \\ q_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 150 \end{pmatrix}$$

であるので，ラスパイレス物価指数は，基準時点での数量ベクトル

$$q_0 = \begin{pmatrix} q_{01} \\ q_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix}$$

で評価した購入総額の比となる．

基準時点の購入総額は

$$p_{01}q_{01} + p_{02}q_{02} = \langle \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0 \rangle = 5 \times 500 + 600 \times 200 = 122500$$

基準時点の購入数量を基準時点においても購入したときの総額は

$$p_{11}q_{01} + p_{12}q_{02} = \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_0 \rangle = 6 \times 500 + 800 \times 200 = 163000$$

行列で表現すると

$$\begin{pmatrix} p_{01} & p_{02} \\ p_{11} & p_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{01} \\ q_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 600 \\ 6 & 800 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122500 \\ 163000 \end{pmatrix}$$

よって

$$\frac{\langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_0 \rangle}{\langle \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0 \rangle} = \frac{163000}{122500} \simeq 1.33$$

約 33 パーセントポイントの増加となる.

パーシェ物価指数は基準時点での数量ベクトル

$$q_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 150 \end{pmatrix}$$

で評価した購入総額の比となる.

比較時点の購入数量で評価した基準時点の購入総額は

$$p_{01}q_{11} + p_{02}q_{12} = \langle \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_1 \rangle = 500 \times 400 + 200 \times 150 = 230000$$

比較時点の購入総額は

$$p_{11}q_{11} + p_{12}q_{12} = \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1 \rangle = 600 \times 400 + 180 \times 150 = 267000$$

行列で表現すると

$$\begin{pmatrix} p_{01} & p_{02} \\ p_{11} & p_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 & 200 \\ 600 & 180 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 230000 \\ 267000 \end{pmatrix}$$

よって

$$\frac{\langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_0 \rangle}{\langle \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0 \rangle} = \frac{267000}{230000} \simeq 1.16$$

約 16 パーセントポイントの増加となる.

3 章

練習問題 1. (1) $A{}^tA = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ (2) ${}^tAA = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$

(3) $B + {}^tB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $B{}^tB + {}^tBB = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

練習問題 2. $A=(a_{ij})$ を交代行列とすると，${}^tA=-A$ より，$a_{ii}=-a_{ii}$ である．これより，$a_{ii}=0$ である．

練習問題 3. A, B を交代行列とし，k, ℓ を実数とすると，

$${}^t(kA+\ell B)=k{}^tA+\ell{}^tB=-kA-\ell B=-(kA+\ell B)$$

より，$kA+\ell B$ は交代行列である．

章末問題 I

1. (1) $A+{}^tA=\begin{pmatrix}0&3\\3&2\end{pmatrix}$ (2) $A{}^tA=\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}$

(3) $B+{}^tB=\begin{pmatrix}2&2&4\\2&2&0\\4&0&-2\end{pmatrix}$ (4) $B{}^tB=\begin{pmatrix}14&2&-2\\2&1&0\\-2&0&2\end{pmatrix}$

2. ${}^t(A{}^tA)={}^t({}^tA){}^tA=A{}^tA$ より，$A{}^tA$ は対称行列である．同様に，${}^tAA$ も対称行列である．

3.
$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$$

とおくと，A は対称行列なので，

$$\begin{aligned}A{}^tA={}^tAA=A^2&=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\sin^2\theta+\cos^2\theta&\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta\\\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta&\sin^2\theta+\cos^2\theta\end{pmatrix}=E\end{aligned}$$

よって，A は直交行列である．

章末問題 II

1. 本文中で紹介したように，

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

の分散共分散行列は，偏差行列を

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x_{11}-\bar{x}_1 & x_{12}-\bar{x}_2 & \dots & x_{1m}-\bar{x}_m \\ x_{21}-\bar{x}_1 & x_{22}-\bar{x}_2 & \dots & x_{2m}-\bar{x}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}-\bar{x}_1 & x_{n2}-\bar{x}_2 & \dots & x_{nm}-\bar{x}_m \end{pmatrix}$$

としたとき，

$$\frac{1}{n}{}^t\tilde{X}\tilde{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2 & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)(x_{i2}-\bar{x}_2) & \dots & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\bar{x}_1)(x_{im}-\bar{x}_m) \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i2}-\bar{x}_2)(x_{i1}-\bar{x}_1) & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i2}-\bar{x}_2)^2 & \dots & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i2}-\bar{x}_2)(x_{im}-\bar{x}_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{im}-\bar{x}_m)(x_{i1}-\bar{x}_1) & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{im}-\bar{x}_m)(x_{i2}-\bar{x}_2) & \dots & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{im}-\bar{x}_m)^2 \end{pmatrix}$$

で計算される．$A=(a_{ij})$ を n 次の直交行列としたとき，$A\tilde{X}$ の分散共分散行列は $\dfrac{1}{n}{}^t(A\tilde{X})(A\tilde{X})$ となる．
ここで，定理 3.1（4）より，${}^t(A\tilde{X}) = {}^t\tilde{X}{}^tA$ であり，直交行列の定義より ${}^tAA=E$ であることに注意すると，$A\tilde{X}$ の分散共分散行列は $\dfrac{1}{n}{}^t(A\tilde{X})(A\tilde{X}) = \dfrac{1}{n}{}^t\tilde{X}{}^tAA\tilde{X} = \dfrac{1}{n}{}^t\tilde{X}\tilde{X}$ となる．

2. 本文中でも紹介したように，直交行列とは転置行列が逆行列となる行列である．そこで，与えられた行列の転置行列が逆行列であることを示せばよい．転置行列を右から掛けると単位行列となることから，与えられた行列が直交行列であることを確かめることができる．

3.
$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$
とおくと，
$$\begin{pmatrix} a_1x_{11} + a_2x_{12} + \ldots + a_mx_{1m} \\ a_1x_{21} + a_2x_{22} + \ldots + a_mx_{2m} \\ \vdots \\ a_1x_{n1} + a_2x_{n2} + \ldots + a_mx_{nm} \end{pmatrix} = X\boldsymbol{a}$$
と表され，平均は $a_1\bar{x}_1 + \cdots + a_m\bar{x}_m$ となることから，$\boldsymbol{y}$ の偏差ベクトルは $\tilde{X}\boldsymbol{a}$ と表すことができる．同様に，$\boldsymbol{z}$ の偏差ベクトルは $\tilde{X}\boldsymbol{b}$ と表すことができることから，標本共分散は $\frac{1}{n}{}^t\boldsymbol{a}^tXX\boldsymbol{b} = {}^t\boldsymbol{a}\frac{1}{n}{}^tXX\boldsymbol{b}$ と表される．

4. (経済学, 経済史, 経済数学) の標本分散共分散行列は
$$\begin{pmatrix} 3.2 & -0.2 & -0.4 \\ -0.2 & 2.0 & -0.8 \\ -0.4 & -0.8 & 0.4 \end{pmatrix}$$

4章

練習問題1.

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = 15$$

練習問題2. (1) $\mathrm{tr}(A) = 2,$ (2) $\mathrm{tr}(B) = 8,$ (3) $\mathrm{tr}(AB) = 30$

(4) $\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) = 16,$ (5) $\mathrm{tr}(A{}^tA) = 14$ (6) $\mathrm{tr}({}^tBB) = 84$

章末問題 I

1. 最初の等式を示す．$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$ を列ベクトル表示で表す．

$$\sum_{i=1}^{n}\langle A\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{e}_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(A)$$

また，次の等式は，トレースと内積の性質から導かれる．

$$\sum_{i=1}^{n}\langle A\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i\rangle = \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}({}^tA) = \sum_{i=1}^{n}\langle {}^tA\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}{}^t\boldsymbol{e}_i A\boldsymbol{e}_i$$

2. V を直交行列とすると，

$$\mathrm{tr}({}^tVAV) = \mathrm{tr}(({}^tVA)V)) = \mathrm{tr}(V({}^tVA)) = \mathrm{tr}((V{}^tV)A) = \mathrm{tr}(EA) = \mathrm{tr}(A)$$

章末問題 II

1. コーシー-シュバルツの不等式により，

$$\begin{aligned}||AB||_E^2 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})^2 \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 = ||A||_E^2||B||_E^2\end{aligned}$$

2. 定理 4.1(1), (2) より $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{tr}(A{}^t\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i) = \mathrm{tr}(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n A{}^t\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i)$. 定理 2.2(4), (6) より $\mathrm{tr}\left(A\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n {}^t\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i\right)$ と等しいことがわかる.

3. x_i の標本分散は $\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^n (x_{ij}-\bar{x}_i)^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - \bar{x}_i^2$, x_i と x_j の標本共分散は $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n (x_{ik}-\bar{x}_i)(x_{jk}-\bar{x}_j) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_{ik}x_{jk} - \bar{x}_i\bar{x}_j$ であり,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n {}^t\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} x_{1i}^2 & x_{1i}x_{2i} & \cdots & x_{1i}x_{mi} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ x_{mi}x_{1i} & \cdots & \cdots & x_{mi}^2 \end{pmatrix}$$

また,

$$\boldsymbol{m}{}^t\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^2 & \bar{x}_1\bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \bar{x}_m\bar{x}_1 & \cdots & \cdots & \bar{x}_m^2 \end{pmatrix}$$

により示される.

4. それぞれのノルムは (1) 約 $5.48, 6, 5, 4$, (2) $8, 12, 7, 5$, (3) 約 $6.32, 7, 8, 3$ となる.

5 章

練習問題 1.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$ (2) 逆行列は存在しない.

$$(3)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

練習問題 2.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 10 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -7 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(3)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

練習問題 3. 仮定より，

$$^{t}(A^{-1}) = ({}^{t}A)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$$

よって，A^{-1} は交代行列である．

練習問題 4. A をベキ零行列とすると，$A^m = O$ となる自然数 m が存在する．

$$(E+A)(E-A+A^2-A^3+\cdots+(-1)^{m-1}A^{m-1}) = E+(-1)^{m-1}A^m = E$$

逆に，

$$(E-A+A^2-A^3+\cdots+(-1)^{m-1}A^{m-1})(E+A) = E$$

である．これより，$E+A$ は正則であり，

$$(E+A)^{-1} = E-A+A^2-A^3+\cdots+(-1)^{m-1}A^{m-1}$$

章末問題 I

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

2. ブロック分割の積を考えると，$Y = D - CA^{-1}B$ より，

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BY^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BY^{-1} \\ -Y^{-1}CA^{-1} & Y^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E + BY^{-1}CA^{-1} - BY^{-1}CA^{-1} & -BY^{-1} + BY^{-1} \\ CA^{-1} + CA^{-1}BY^{-1}CA^{-1} - DY^{-1}CA^{-1} & -CA^{-1}BY^{-1} + DY^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E & O \\ CA^{-1} - (-CA^{-1}B + D)Y^{-1}CA^{-1} & (-CA^{-1}BY + D)Y^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E & O \\ CA^{-1} - YY^{-1}CA^{-1} & YY^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix} = E
\end{aligned}
$$

また，同様に

$$
\begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BY^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BY^{-1} \\ -Y^{-1}CA^{-1} & Y^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = E
$$

であることを計算できるため，

$$
\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BY^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BY^{-1} \\ -Y^{-1}CA^{-1} & Y^{-1} \end{pmatrix}
$$

3.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 15 & -6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4. $A^2 = (b_{ij})$ とおくと，$b_i j = 0$, $(i \geq j-1)$ であることが確かめられる．また，$A^3 = (c_{ij})$ とすると，$c_{ij} = 0$, $(i \geq j-2)$ である．すなわち，累乗をするごとに 0 の領域が斜めに 1 列づつ増えてくる．よって，$A^n = (d_{ij})$ とおくと，すべての i, j に対し，$d_{ij} = 0$ となり，$A^n = O$ である．

章末問題 II

1. (1) $y = 0.60 + 0.65x$ (2) $y = -9.1 + 1.3x$

2. 最初に b について示す．$n\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$ を n^2 で割ると $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = s_x^2$ が得られる．同様に $-\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i + n\sum_{i=1}^n x_i y_i$ を n^2 で割ると $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = s_{xy}$ が得られる．よって，$b = s_{xy}/s_x^2$ を得る．a については，$\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i$ を n^2 で割ると $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i - \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i = (\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2)\bar{y} - \bar{x}(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y}) = s_x^2\bar{y} - s_{xy}\bar{x}$ となることから $a = \bar{y} - \bar{x}s_{xy}/s_x^2$ を得る．

6 章

練習問題 1. (1) $\sigma\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\tau\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(3) $\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (4) $\tau^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

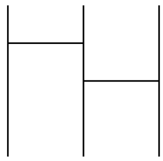
練習問題 2. (1) $\sigma\tau = [1, 2, 3, 4]$ (2) $\tau^{-1} = [2, 4, 3]$ (3) $\sigma\tau\sigma = [1, 3, 4]$

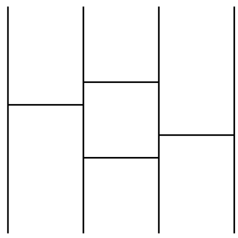
(4) $\tau\sigma\tau = [1, 3, 2, 4]$ (5) $\tau^n = \begin{cases} \tau & (n = 3m+1) \\ \tau^{-1} & (n = 3m+2) \\ e & (n = 3m) \end{cases}$

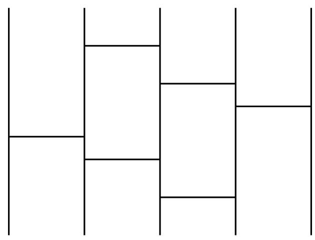
練習問題 3. (1) -1 (2) 1 (3) 1 (4) 1

練習問題 4. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

練習問題 5. 例えば, (1) $[2,3][1,2]$ (2) $[2,3][3,4][1,2][2,3]$ (3) $[3,4][2,3][1,2][4,5][3,4][2,3]$
と隣接互換の積で表せば,

(1) 

(2) 

(3) 

章末問題 I

1. (1) $\sigma\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\tau\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

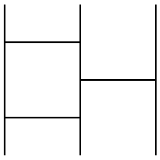
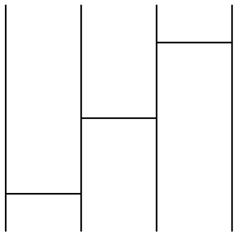
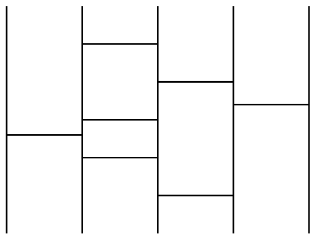
(3) $\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (4) $\tau^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\sigma^{-1}\tau\sigma = e$

2. (1) -1 (2) 1 (3) 1

章末問題 II

1. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. 例えば, (1) $[1,2][2,3][1,2]$ (2) $[1,2][2,3][3,4]$ (3) $[3,4][2,3][1,2][2,3][4,5][3,4][2,3]$
と隣接互換の積で表せば,

(1)  (2)  (3) 

3. (1) $s_i s_i = [i, i+1][i, i+1] = e$

(2) i と j の差が 2 以上あるため，$i \neq j,\ i+1 \neq j,\ j+1 \neq i$ である．今，$i < j$ とすると，

$$s_i s_j = [i, i+1][j, j+1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & i+1 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i+1 & i & \cdots & j+1 & j & \cdots & n \end{bmatrix}$$
$$= [j, j+1][i, i+1] = s_j s_i$$

同様に，$j < i$ の場合も，$s_i s_j = s_j s_i$ である．

(3)

$$s_i s_{i+1} s_i = [i, i+1][i+1, i+2][i, i+1] = [i, i+1][i, i+2, i+1] = [i, i+2]$$

同様に，

$$s_{i+1} s_i s_{i+1} = [i+1, i+2][i, i+1][i+1, i+2] = [i+1, i+2][i, i+1, i+2] = [i, i+2]$$

であるため，$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ となる．

7 章

練習問題 1. (1) 10　(2) 6　(4) -17

練習問題 2. (1) 20　(2) 0　(3) 32

練習問題 3. (1) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

章末問題 I

1. (1) 15 (2) 2 (3) -3

2. (1) 24 (2) 4 (3) 0

3. (1) $-\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -8 & 1 & -2 \\ -22 & 9 & 7 \\ -13 & 11 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

章末問題 II

1. (1) 特定できない (2) 極値をとらない (3) $(x, y) = (1, 4)$ のとき極大値 25 をとる

2. (1) $(x, y) = (5/2, 5/3)$ のとき極大値 $\log 5 - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log 2$ をとる (2) $(x, y) = (1/2, 1/2)$ のとき極大値 $1/4$ をとる (3) $(x, y) = (1, 1), (-1, -1)$ のとき極小値 2 をとる

3. (1) -1 (2) 1 (3) $-x$ (4) x/y^2

8 章

練習問題 1. (1) $(x, y, z) = (2, 1, -1)$ (2) $(x, y, z) = (3, 2, 1)$
(3) $(x, y, z, w) = (-7, 4, 1, 3)$

章末問題 I

1. (1) $(x,y,z)=(1,0,-1)$ (2) $(x,y,z)=(1,1,1)$

   (3) $(x,y,z,w)=(1,2,-1,-2)$

2. $|P_i(c)|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_{i-1} & c\boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{e}_{i+1} & \cdots\boldsymbol{e}_n\end{vmatrix}=c|E|=c$

   $|Q_{ij}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_{i-1} & \boldsymbol{e}_j & \boldsymbol{e}_{i+1}\cdots & \boldsymbol{e}_{j-1} & \boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{e}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{e}_n\end{vmatrix}$

   $=-|E|=-1$

   $|R_{ij}(c)|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_i & \cdots\boldsymbol{e}_j+c\boldsymbol{e}_i & \cdots & \boldsymbol{e}_n\end{vmatrix}=|E|=1$

章末問題 II

1. (1) (2)

産出 投入	農業	工業	最終 需要	合計
農業	10	60	30	100
工業	80	180	40	300
付加価値	10	60		
合計	100	300		

$$\begin{pmatrix}0.1 & 0.2\\0.8 & 0.6\end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix}0.9 & -0.2\\-0.8 & 0.4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 4.5\end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 130 \end{pmatrix}$$

よって，農業部門は 40，工業部門は 130 の産出量の組が得られる．

9 章

練習問題 1. (1) 2　(2) 2　(3) 2

練習問題 2. (1) $a \neq -1, 2$ のとき階数 3，$a = -1$ のとき階数 2，$a = 2$ のとき階数 1

(2) $a \neq -1, 2$ のとき階数 3，$a = -1, 2$ のとき階数 2

(3) $a \neq 0, -3$ のとき階数 3, $a = 0, -3$ のとき階数 2

練習問題 3. (1) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -10 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

章末問題 I

1. (1) 2　(2) 3　(3) 4

2. $a \neq 0, \pm\sqrt{2}$ のとき階数 3，$a = 0, \pm\sqrt{2}$ のとき階数 2

3. (1) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ -12 & 9 & 11 \\ 8 & -5 & -7 \end{pmatrix}$　(3) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

章末問題 II

1. (1)

$$\begin{pmatrix} 0.6 & -0.1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 & -0.4 \\ -0.1 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2.0 & 0.60 & 0.8 \\ 1.0 & 2.30 & 1.4 \\ 0.5 & 0.65 & 1.7 \end{pmatrix}$$

(2) 各産業部門の産出量は $\begin{pmatrix} 2.0 \\ 1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ 増加する． (3) 各産業部門の産出量は $\begin{pmatrix} 0.60 \\ 2.30 \\ 0.65 \end{pmatrix}$ 増加する． (4) 各産業部門の産出量は $\begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.4 \\ 1.7 \end{pmatrix}$ 増加する． (5) 各産業部門の産出量は

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 0.60 & 0.8 \\ 1.0 & 2.30 & 1.4 \\ 0.5 & 0.65 & 1.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix}$$

増加する．また，(2),(3),(4) の結果をそれぞれ 200，100、50 倍して足し合わせることでも得られる．

10 章

練習問題 1. (1) 1 次独立　(2) 1 次従属　(3) 1 次独立

練習問題 2. $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とする．このとき，

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{b} + 0\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

であり，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立であるから，$c_1 = c_2 = 0$ がしたがう．よって，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ も 1 次独立である．

章末問題 I

1. (1) 1 次従属　(2) 1 次従属　(3) 1 次独立

2. $a=-1$　(2) $a=0$　(3) $a=3$

3. $c_1\boldsymbol{a}+c_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+c_3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$ とする．整理すると，

$$(c_1+c_2+c_3)\boldsymbol{a}+(c_2+c_3)\boldsymbol{b}+c_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

であり，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が 1 次独立なので，

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ c_2+c_3=0 \\ c_3=0 \end{cases}$$

上記の連立方程式を解くと，$c_1=c_2=c_3=0$ となるため，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ は 1 次独立である．

4. (1) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

章末問題 II

1. (1) 主小行列は

$$(1),\quad \begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix},\quad (1)$$

最初の 2 つが首座小行列となる．　(2) 主小行列は

$$(3),(7),(1),\begin{pmatrix}3&5\\4&7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&1\\5&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&5&1\\4&7&3\\5&2&1\end{pmatrix}$$

となる．1 番目，4 番目，7 番目が首座小行列となる．

2. 連立方程式は，式の並べ方（行の置換），左辺の変数の並べ方（列の置換）を行っても，方程式として同等であることから得られる．

11 章

練習問題 1. (1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数)

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (t_1, t_2 は任意定数)

練習問題 2. $a = 0$ のとき，非自明解をもち，このときの一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

練習問題 3. (1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意定数)

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数)

章末問題 I

1. (1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数)

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (t_1, t_2 は任意定数)

2. (1) $a = 7$ のとき，非自明解を持ち，一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

(2) $a = -7$ のとき，非自明解を持ち，一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

3. (1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意定数)

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (t_1, t_2 は任意定数)

4. (1) $a = 3$ のとき解を持ち，一般解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

(2) $a=-3$ のとき解を持ち，一般解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

章末問題 II

1.

$$X({}^tXX)^{-1}\,{}^tXX({}^tXX)^{-1}\,{}^tX = X({}^tXX)^{-1}\,{}^tX$$

であり，$X({}^tXX)^{-1}\,{}^tX$ はベキ等行列である．また，定理5.8により，$E-X({}^tXX)^{-1}\,{}^tX$ もベキ等行列である．

対称性については，定理 3.1（4），(3）より

$${}^t(X({}^tXX)^{-1}\,{}^tX) = X({}^tXX)^{-1}\,{}^tX, \quad {}^t(E-X({}^tXX)^{-1}\,{}^tX) = E-X({}^tXX)^{-1}\,{}^tX$$

を示すことができる．

2. (1) $X=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}$ と列ベクトル表示したとき，$\boldsymbol{x}_3=2\boldsymbol{x}_2$ である．

$${}^tXX = \begin{pmatrix} {}^tX\boldsymbol{x}_1 & {}^tX\boldsymbol{x}_2 & {}^tX\boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tX\boldsymbol{x}_1 & {}^tX\boldsymbol{x}_2 & 2\,{}^tX\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$$

であることから，3 次正方行列 ${}^tXX$ の列ベクトルは 1 次従属であり，定理 10.3 より ${}^tXX$ は非正則である．

(2) $\log(a/b)=\log a-\log b$ に注意すると，$X=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 \end{pmatrix}$ と列ベクトル表示したとき，$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_4$ である．

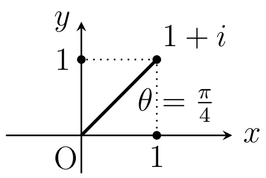
$${}^tXX = \begin{pmatrix} {}^tX\boldsymbol{x}_1 & {}^tX\boldsymbol{x}_2 & {}^tX\boldsymbol{x}_3 & {}^tX\boldsymbol{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tX\boldsymbol{x}_1 & {}^tX\boldsymbol{x}_3-{}^tX\boldsymbol{x}_4 & {}^tX\boldsymbol{x}_3 & {}^tX\boldsymbol{x}_4 \end{pmatrix}$$

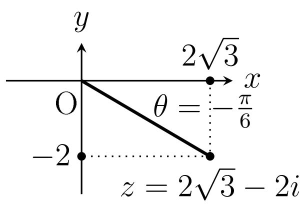
であることから，4 次正方行列 ${}^tXX$ の列ベクトルは 1 次従属であり，定理 10.3 より ${}^tXX$ は非正則である．

12章

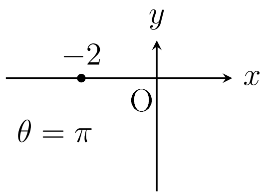
練習問題 1. (1) $4+6i$ (2) $-5+10i$ (3) $\dfrac{11}{25}+\dfrac{2}{25}i$ (4) $1+2i$ (5) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$
(6) 25

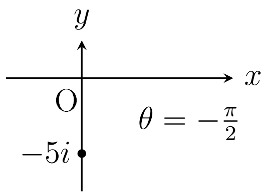
練習問題 2. (1) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ (2) $4\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$





(3) $-2(\cos\pi+i\sin\pi)$ (4) $5\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$





練習問題 3. (1) 固有値 $\lambda=1,8$

$\lambda=1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\quad(t\neq 0)$

$\lambda=8$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\quad(t\neq 0)$

(2) 固有値 $\lambda=0,2,3$

$\lambda=0$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(t\neq 0)$

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

$\lambda = 3$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

(3) 固有値 $\lambda = -1, 2, 4$

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

$\lambda = 4$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

練習問題 4. (1) 固有値 $\lambda = 1, 2$（重解）

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ((t_1, t_2) \neq$
$(0, 0))$

(2) 固有値 $\lambda = 5, -2$（重解）

$\lambda = 5$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

$\lambda = -2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

(3) 固有値 $\lambda = 3$（3 重解）

固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ((t_1, t_2) \neq (0, 0))$

練習問題 5. (1) $\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \cdots, \lambda_n - 1$

(2) $\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, \cdots, \dfrac{1}{\lambda_n}$

(3) $k\lambda_1, k\lambda_2, \cdots, k\lambda_n$

練習問題 6. (1) $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

章末問題 I

1. (1) 固有値 $\lambda = 2, 9$

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

$\lambda = 9$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

(2) 固有値 $\lambda = -1, 1$

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

(3) 固有値 $\lambda = -5, 0, 1$

$\lambda = -5$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

$\lambda = 0$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

(4) 固有値 $\lambda = 2, -1$（重解）

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ((t_1, t_2) \neq (0, 0))$

(5) 固有値 $\lambda = 1, \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

$\lambda = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

$\lambda = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

(6) 固有値 $\lambda = 8, -1$（重解）

$\lambda = 8$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$

2. (1) $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$ (2) $t_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ((t_1, t_2) \neq (0,0))$

(3) $t_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ((t_1, t_2, t_3) \neq (0,0,0))$

3. $A \sim B$, $B \sim C$ とすると，$A = P^{-1}BP$ および $B = Q^{-1}CQ$ となる正則行列 P, Q が存在する．

$$(QP)^{-1}C(QP) = P^{-1}(Q^{-1}CQ)P = P^{-1}BP = A$$

であり，QP は正則であるため，$A \sim C$ が導かれる．

章末問題 II

1. 定義 12.2 の下の議論と定理 12.5 の証明と同様に

$$ {}^t\boldsymbol{e}(A\boldsymbol{p}) = ({}^t\boldsymbol{e}A)\boldsymbol{p} = {}^t\boldsymbol{e}\boldsymbol{p} = 1 $$

となることから，$A\boldsymbol{p}$ も確率ベクトルとなることが示される．

2.

$$ P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} $$

となる．3 年後の階級ごとの企業数は

$$ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.600 \\ 7.045 \\ 2.355 \end{pmatrix} $$

万社となる．

3. $\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{3}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} \frac{4}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

13 章

練習問題 1. (1) 固有値は $\lambda = 1, 2, 3$ と相異なるため，対角化可能．それぞれの固有ベクトルを並べた正則行列

$$ P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

により，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 固有値は $\lambda = 0, 1$（重解）であり，$\lambda = 0$ の固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

および，$\lambda = 1$ の 2 つの固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は 1 次独立であるため，対角化可能である．正則行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

により，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 固有値 $\lambda = 1$（重解）の 1 次独立な固有ベクトルが 1 つしか取れないため，対角化不可能.

練習問題 2. (1) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^{n+1} + 3^n \\ (-1)^{n+1} + 3^n & (-1)^n + 3^n \end{pmatrix}$

(2) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} i^n+(-i)^n & -i^{n+1}+(-1)^n i^{n+1} \\ i^{n+1}+(-i)^{n+1} & -i^{n+2}+(-1)^{n+1}i^{n+2} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -3^n+2^n+1 & -3^n+2^n & -3^n+1 \\ 3^n-1 & 3^n & 3^n-1 \\ 3^n-2^n & 3^n-2^n & 3^n \end{pmatrix}$

章末問題 I

1. (1) 固有値は $\lambda = 2, 1$（重解）であり，$\lambda = 2$ の固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

および，$\lambda = 1$ の 2 つの固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

は 1 次独立であるため，対角化可能である．正則行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

により，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 固有値は $\lambda = 0, i, -i$ と相異なるため，対角化可能．それぞれの固有ベクトルを並べた正則行列

$$P=\begin{pmatrix}1&0&i\\-i&i&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

により，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&i&0\\0&0&-i\end{pmatrix}$$

(3) 固有値 $\lambda=5$（重解）の 1 次独立な固有ベクトルが 1 つしか取れないため，対角化不可能.

2. (1) $\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 3((-1)^{n+1}+2^n) & 2^n\end{pmatrix}$

(2) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}(1+i)^n+(1-i)^n & (1+i)^n-(1-i)^n\\ (1+i)^n-(1-i)^n & (1+i)^n+(1-i)^n\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}-2^{n+1}+3 & 2^n-1 & -2^n+1\\ -2^{n+2}+4 & 2^{n+1}-1 & -2^{n+1}+2\\ 2^{n+1}-2 & -2^n+1 & 2^n\end{pmatrix}$

3. A は対角化可能なので，正則行列 P により，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$$

となる．トレースにおける $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ の性質により，

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(APP^{-1})=\mathrm{tr}(A)$$

に注意する.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A^m) = \mathrm{tr}(P^{-1}A^mP) = \mathrm{tr}((P^{-1}AP)^m) &= \mathrm{tr}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^m \\
&= \mathrm{tr}\begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^m
\end{aligned}
$$

章末問題 II

1. (1) 確率行列

$$
P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}
$$

の固有値は 1 と 0.6 であり，それぞれに対応する固有ベクトルは

$$
t\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (t \neq 0), \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (s \neq 0)
$$

となる．

(2) (1) の結果より，

$$
Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}
$$

で P は

$$
Q^{-1}PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix}
$$

と対角化され

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}0.6^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}0.6^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}0.6^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}0.6^n \end{pmatrix}$$

と表されることから P^n は $n \to \infty$ のとき，

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

に収束し，$\alpha_0 + \beta_0 = 1$ に注意すると，初期時点の値 α_0, β_0 に関わらず

$$\lim_{n\to\infty} P^n \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

と飽和状態がなることがわかる．

2. (1) 強連結である． (2) 強連結でない． (3) 強連結でない．

3. $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

14 章

練習問題 1. $A = (a_{ij})$ を反エルミート行列とすると，$A^* = -A$ である．両辺の対角成分に着目すると，$\overline{a_{ii}} = -a_{ii}$ であるため，a_{ii} は純虚数である．

練習問題 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & i\cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
AA^* &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & i\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -i\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta - (icos\theta)^2 & i\cos\theta\sin\theta - i\cos\theta\sin\theta \\ 0 & -i\cos\theta\sin\theta + i\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - (icos\theta)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E
\end{aligned}
$$

同様に，$A^*A = E$ であることも示せるため，A はユニタリ行列である．

練習問題 3. 固有値は $\lambda = 2, -1$（重解）である．$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルのうち，大きさが 1 であるものとして，

$$
\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

が取れる．また，$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルで，1 次独立な 2 つのベクトル

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

がとれる．これらにグラム-シュミットの直交化法を施して，

$$
\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

が得られ，これらを並べた直交行列

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1\\ \sqrt{2} & 0 & 2\\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

により，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

章末問題 I

1. (1) 固有値は $\lambda = 1$（重解）であり，固有ベクトルで大きさが 1 であるものとして，

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$$

がとれる．このベクトルに直交して大きさが 1 のものとして，例えば

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

が考えられる．よって，これらを並べた直交行列

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

を考えれば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & -5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(2) 固有値は $\lambda = 3$（重解）であり，固有ベクトルで大きさが 1 であるものとして，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

がとれる．このベクトルに直交して大きさが 1 のものとして，例えば

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

が考えられる．よって，これらを並べた直交行列

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

を考えれば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}3 & -2\\0 & 3\end{pmatrix}$$

2. (1) 固有値は $\lambda = -2, 3$ であり，これらの固有ベクトルは直交する．それぞれの固有ベクトルで大きさが 1 のものを並べた直交行列

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

によって，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$$

(2) 固有値は $\lambda = -1, 2, 3$ であり，これらの固有ベクトルは直交する．それぞれの固有ベクトルで大きさが 1 のものを並べた直交行列

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & \sqrt{2} & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

によって，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) 固有値は $\lambda = 5, -1$（重解）である．$\lambda = 5$ に対する固有ベクトルで大きさが 1 のものとして，

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる．また，$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルのうち，1 次独立な 2 つのベクトルとして，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる．これらに対し，グラム-シュミットの直交化法を施すと，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が得られる．これらを並べた直交行列

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

によって，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. U をユニタリ行列とすると，$U^*U = UU^* = E$ である．ブロック行列の積の性質により，

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U^*U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E \end{pmatrix} = E$$

であり，同様に，

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U \end{pmatrix}^* = E$$

であるので，

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U \end{pmatrix}$$

はユニタリ行列である．

章末問題 II

1. 第 1 主成分，第 2 主成分はそれぞれ

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2$$

となり，それぞれの寄与率は

$$\frac{1.8}{1.8+0.2} = 0.9, \quad \frac{0.2}{1.8+0.2} = 0.1$$

となる．

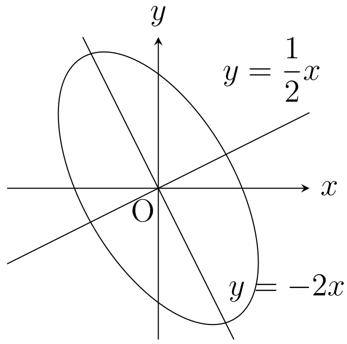
15 章

練習問題 1. (1) $4y_1^2 + 2y_2^2$ (2) $2y_2^2 + 5y_3^2$

練習問題 2. X 軸，Y 軸はそれぞれ，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を方向ベクトルにもつとする．このとき，2 次曲線は $3X^2 + 8Y^2 = 1$ という楕円を描くため，xy 座標では，$y = -2x$ および $y = \dfrac{1}{2}x$ を軸とした楕円となる．



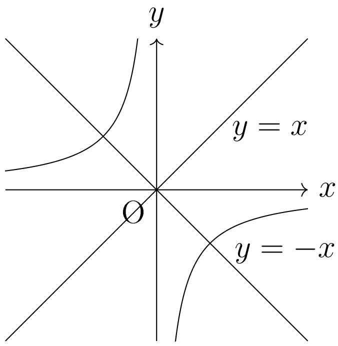
章末問題 I

1. (1) $-y_1^2 + 4y_2^2$ (2) $y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2$

2. (1) X 軸，Y 軸はそれぞれ，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

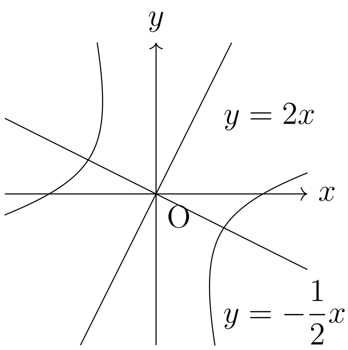
を方向ベクトルにもつとする．このとき，2 次曲線は $4X^2 - 2Y^2 = 1$ という双曲線を描くため，xy 座標では，$y = -x$ および $y = x$ を軸とした双曲線となる．



(2) X 軸，Y 軸はそれぞれ，

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

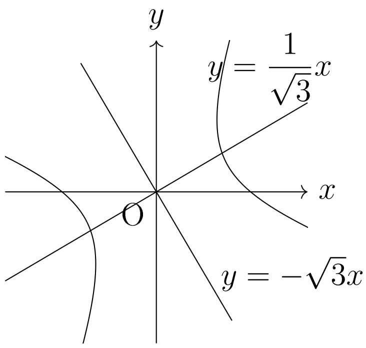
を方向ベクトルにもつとする．このとき，2 次曲線は $4X^2 - Y^2 = 1$ という双曲線を描くため，xy 座標では，$y = -\dfrac{1}{2}x$ および $y = 2x$ を軸とした双曲線となる．



(3) X 軸，Y 軸はそれぞれ，

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

を方向ベクトルにもつとする．このとき，2 次曲線は $2X^2 - 2Y^2 = 1$ という双曲線を描くため，xy 座標では，$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ および $y = -\sqrt{3}x$ を軸とした双曲線となる．



章末問題 II

1. 第 3 章で学んだように，$\boldsymbol{x}$ の線形結合の分散は $\dfrac{1}{n}{}^t\boldsymbol{a}{}^tXX\boldsymbol{a} = {}^t\boldsymbol{a}\dfrac{1}{n}{}^tXX\boldsymbol{a} = {}^t\boldsymbol{a}S\boldsymbol{a}$ とあらわすことができる．ここで，分散は非負であり $\boldsymbol{a}$ は任意であることから，分散共分散行列 S は非負定値行列であることがわかる．