練習問題及び章末問題解答

1 章

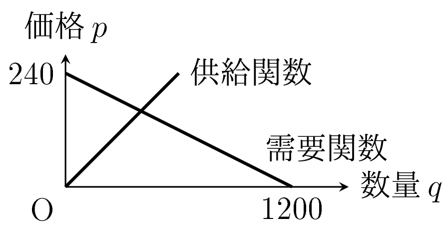
練習問題 1. (1) 7　(2) 2　(3) 1　(4) 0

練習問題 2. (1) ∞　(2) 0　(3) ∞　(4) $-\infty$

練習問題 3. (1) 0　(2) $-\infty$　(3) $\dfrac{3}{4}$

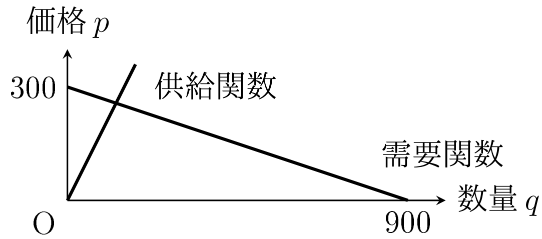
練習問題 4. $x = 0$ で連続

練習問題 5. (1)



均衡価格 $p = 200$，均衡数量 200

(2)



均衡価格 $p = 180$，均衡数量 360

章末問題 I

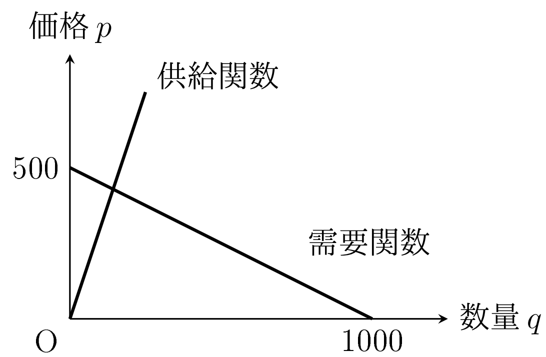
1. (1) 2 (2) 1 (3) 0 (4) 5 (5) $\dfrac{3}{4}$ (6) 0 (7) $-\infty$ (8) $-\infty$ (9) 0
   (10) -1

2. (1) 0 (2) 1 (3) 0 (4) $\dfrac{1}{3}$

3. (1) 連続 (2) 不連続 (3) 連続

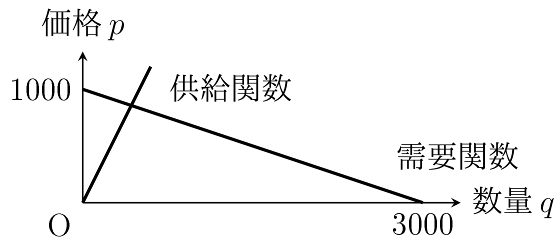
章末問題 II

1. (1)



均衡価格 $p = 200$, 均衡数量 600

(2)



均衡価格 $p = 600$, 均衡数量 1200

2章

練習問題 1. (1) $\dfrac{-3}{x^4}$ (2) $\dfrac{5}{2}\sqrt{x^3}$ (3) $-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$ (4) $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

練習問題 2. (1) $9x^2-4x+5$ (2) $3x^2+8x+4$ (3) $\dfrac{-x-4}{x^3}$

練習問題 3. (1) $y=2x+1$ (2) $y=4x$, $y=0$

章末問題 I

1. (1) 4 (2) $6x+2$ (3) $9x^2+4x+3$ (4) $4x^3+6x^2-6x+4$ (5) $-\dfrac{2}{x^3}$
   (6) $\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

2. (1) $y=5x-3$ (2) $y=2x$ (3) $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

章末問題 II

1. $y'=\dfrac{-ac}{(ax+b)^2}$

2. $p=1200$ のときの利潤を最大にする生産量 $\sqrt{200}$，供給関数 $S(p)=\sqrt{\dfrac{p}{6}}$

3章

練習問題 1. (1) $g(f(x))=4x^2-4x+2$ (2) $f(g(x))=2x^2+1$

練習問題 2. (1) $6x^5+15x^4+24x^3+21x^2+12x+3$ (2) $64x^3+96x^2+48x+8$
(3) $na(ax+b)^{n-1}$

章末問題 **I**

1. (1) $f(g(x)) = 2x + 3$, $g(f(x)) = 2x + 2$
   (2) $f(g(x)) = 9x^2 - 6x + 2$, $g(f(x)) = 3x^2 + 2$
   (3) $f(g(x)) = \sin(x^2 - 1)$, $g(f(x)) = \sin^2 x - 1$
   (4) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = 2x$

2. (1) $4x^3 + 12x^2 + 4x - 4$ (2) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
   (3) $6x^5 - 15x^4 + 15x^2 - 3$ (4) $\sqrt{x+1} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$

3. (1) $\dfrac{x-1}{2}$ (2) $x^2 + 1$ (3) $\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ (4) $\log_3 x + 1$ (5) $\dfrac{1}{x} - 2$

4. (1) $y = f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

章末問題 **II**

1. (1) $p = 500 - 0.5q$ $(0 \leqq q \leqq 1000)$ (2) $p = \dfrac{A}{B} - \dfrac{q}{B}$ $(0 \leqq q \leqq A)$

2. (1) 均衡価格は $p = 200$，需要の価格弾力性は $\eta_D(p) = \dfrac{-2p}{1000-2p}$．均衡価格における需要の価格弾力性は $\eta_D(200) = \dfrac{-2}{3}$．
   (2) 均衡価格は $p = 600$，需要の価格弾力性は $\eta_D(p) = \dfrac{-3p}{3000-3p}$．均衡価格における需要の価格弾力性は $\eta_D(600) = \dfrac{-3}{2}$．

4 章

練習問題 1. (1) $2x\cos x^2$ (2) $2e^{2x+1}$ (3) $-\tan x$ (4) $x^{\cos x}\left(-\sin x \log x + \dfrac{\cos x}{x}\right)$

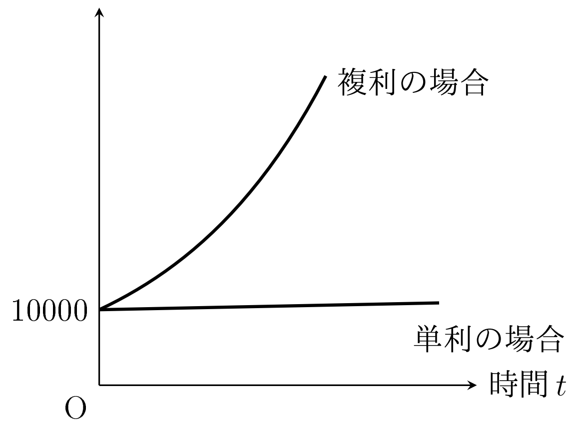
練習問題 2. (1) $f(x) = x^{\alpha}$ の両辺の自然対数をとると，

$$\log f(x) = \log x^{\alpha} = \alpha \log x$$

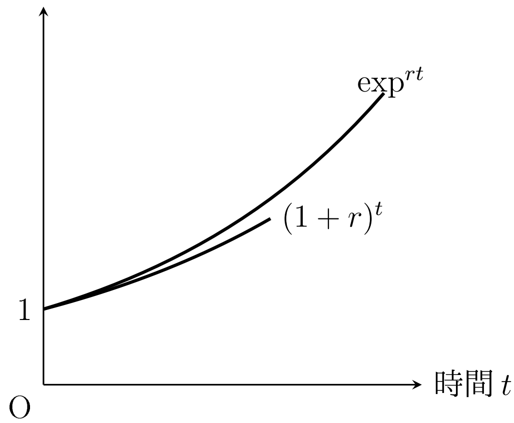
x について両辺の微分をとると，$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\alpha}{x}$ である．よって，

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x) = \frac{\alpha}{x} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

練習問題 3.



練習問題 4.



練習問題 5. $Y(t) = N(t)P(t)$ を $W(t) = D(t)Y(t)/N(t)$ に代入すると，$W(t) = D(t)P(t)$. 両辺の対数をとって t で微分することで

$$\frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{D'(t)}{D(t)} + \frac{P'(t)}{P(t)}$$

を得る．よって，平均賃金の成長率が労働分配率の成長率と労働生産性の成長率の和として表されることが示された．

章末問題 I

1. (1) $\cos^2 x - \sin^2 x$　(2) $-e^{-x}$　(3) $e^x(\sin x + \cos x)$　(4) $\log x + 1$　(5) $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

2. (1) $\dfrac{2}{\cos^2 2x}$　(2) $(\cos x)e^{\sin x}$　(3) $\dfrac{2x}{x^2+1}$　(4) $-\sin(\sin x)\cos x$　(5) $5\sin^4 x \cos x$

3. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a+x} + \dfrac{1}{a-x}\right) = \dfrac{a}{a^2 - x^2}$

4. $-(\sin x)^{\cos x + 1}\log(\sin x) + (\sin x)^{\cos x - 1}\cos^2 x$

章末問題 II

1. (1% で売上が増加するとき)　$10(1+0.01)^5 \approx 10.51$ 億円，
   (5% で売上が増加するとき)　$10(1+0.05)^5 \approx 12.76$ 億円，
   (10% で売上が増加するとき)　$10(1+0.10)^5 \approx 16.11$ 億円.

2. $\log 2 \approx 0.6931$ より約 $0.6931/0.06 \approx 11.55$ 年.
   0.6931 を 0.72 で近似すると約 $0.72/0.06 = 12$ 年.

3. $\log 2 \approx 0.6931$ より約 $0.6931/12(\times 100) \approx 5.8\%$.
   0.6931 を 0.72 で近似すると約 $0.72/12(\times 100) = 6\%$.

5章

練習問題 1. $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 2x - 3$, $f''(x) = 24x^2 - 18x + 2$, $f^{(3)}(x) = 48x - 18$, $f^{(4)}(x) = 48$, $f^{(n)}(x) = 0$ $(n \geqq 5)$

練習問題 2. $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2^n}x^{-\frac{2n-1}{2}}$ $(n \geqq 2)$

練習問題 3. (1) $\sin(2x-1)^{(n)} = 2^n \sin\left(2x - 1 + \frac{n\pi}{2}\right)$　(2) $3^n e^{3x+2}$
(3) $(\log 2)^n 2^x$　(4) $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(\log 3)x^n}$

章末問題 I

1. (1) 24　(2) $-27\cos(3x-5)$　(3) $-e^{-x}$　(4) $\dfrac{2}{(x-1)^3}$

2. (1) $4e^x \sin x - 4e^x \cos x$　(2) $e^x(x^2 + 10x + 20)$　(3) $x\cos x + 5\sin x$　(4) $\dfrac{-6}{x^2}$

3. $f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$, $f''(x) = -2e^{-x}\cos x$, よって，

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$$

章末問題 II

1. $MC(x) = C'(x) = 3x^2 - 30x + 78$ より $MC'(x) = C''(x) = 6x - 30 = 6(x-5)$.
よって，$0 \leq x \leq 5$ の範囲で限界費用は逓減し，$5 \leq x$ で逓増する．

2. (1) $C = Y - S$ より，$\dfrac{dC(Y)}{dY} = 1 - \dfrac{dS(Y)}{dY}$.
(2) (1) より $\dfrac{d^2C(Y)}{dY^2} = -\dfrac{d^2S(Y)}{dY^2}$．よって，$\dfrac{d^2C(Y)}{dY^2} < 0$ のとき $\dfrac{d^2S(Y)}{dY^2} > 0$.

6章

練習問題 1. (1) 0　(2) 0　(3) 0

練習問題 2. X の確率分布は $P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^3, P(X=1)=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3, P(X=2)=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3, P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

これより期待値は $E(X)=\frac{3}{2}$, 分散は $\frac{3}{4}$.

章末問題 I

1. (1) $c=2$　(2) $c=4$　(3) $c=4$

2. (1) 0　(2) $\frac{5}{3}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) $\frac{1}{2}$

3. n

章末問題 II

1. (1) 確率変数 X が常に定数 c という値をとると考え，$X=c$ とおくと $P(X=c)=1$ であるので，$E(c)=c\times P(X=c)=c\times 1=c$.

   (2) 確率変数 X がとりうる値を $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$ とすると，定理 6.6 と確率の合計が 1 である[1]ことより

$$E(aX+b)=\sum_{i=1}^{\infty}(ax_i+b)P(X=x_i)=a\sum_{i=1}^{\infty}x_iP(X=x_i)+b\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i)=aE(X)+b.$$

   (3) (2) と同様に確率変数 X がとりうる値を $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$ とすると，定理 6.6 より

[1] $\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i)=1$

$$
\begin{aligned}
E(u(X)+v(X)) &= \sum_{i=1}^{\infty}(u(x_i)+v(x_i))P(X=x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}u(x_i)P(X=x_i)+\sum_{i=1}^{\infty}v(x_i)P(X=x_i) \\
&= E(u(X))+E(v(X)).
\end{aligned}
$$

2. (1) 1 で示した期待値の性質を用いると

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E[(X-E(X))^2] = E[X^2-2E(X)X+(E(X))^2] \\
&= E(X^2)-2E(X)E(X)+(E(X))^2 = E(X^2)-(E(X))^2
\end{aligned}
$$

(2) 同様に

$$
\begin{aligned}
V(aX+b) &= E[(aX+b-E(aX+b))^2] = E[(aX+b-(aE(X)+b))^2] \\
&= E[a^2(X-E(X))^2] = a^2E[(X-E(X))^2] = a^2V(X).
\end{aligned}
$$

7 章

練習問題 1. (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) $\dfrac{1}{2}$

章末問題 I

1. (1) $\dfrac{1}{3}$ (2) $\dfrac{1}{6}$ (3) $-\dfrac{1}{16}$ (4) $-\dfrac{5}{16}$

2. (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n$

3. $x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(x-1)^k$ ($k \leqq n$ のとき，$c_k = {}_n\mathrm{C}_k$)

章末問題 II

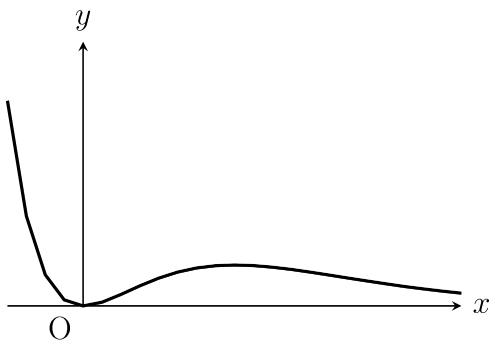
1. (積率母関数)$M_X(t) = E(e^{tX}) = pe^t + 1 - p$, (期待値)$E(X) = p$，(分散)$V(X) = p(1-p)$.

2. (積率母関数)$M_X(t) = E(e^{tX}) = pe^t/(1-(1-p)e^t)$　(ただし $t < -\log(1-p)$)，(期待値)$E(X) = (1-p)/p$，(分散)$V(X) = (1-p)/p^2$.

8 章

練習問題 1. (1) $x = 0$ で極大値 4, $x = 1$ で極小値 3　(2) 極値なし
(3) $x = 1$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$　(4) $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ で極大値 $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{2}}$

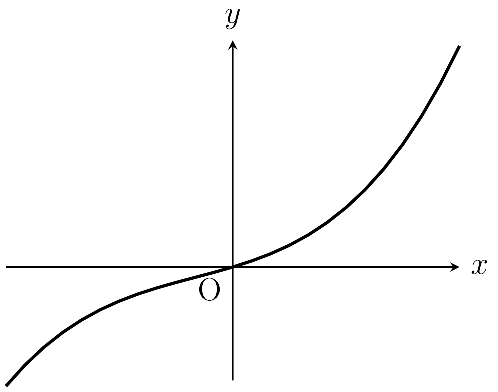
練習問題 2. $y = f(x) = x^2e^{-x}$ のグラフ



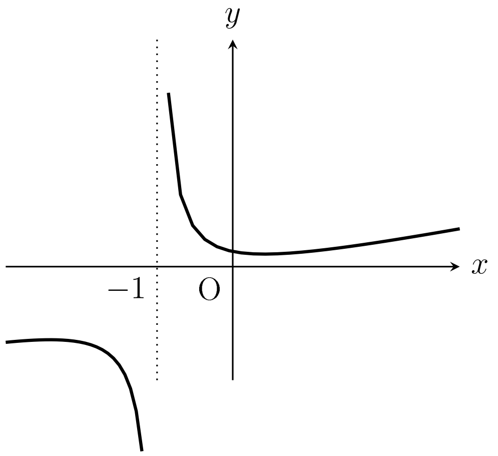
章末問題 I

1. (1) $x = 1$ で極大値 6, $x = -2$ で極小値 -21, $x = -\dfrac{1}{2}$ で変曲点
(2) 極値なし，$x = 1, 3$ で変曲点
(3) $x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ で極小値 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}$, $x = 1$ のとき変曲点

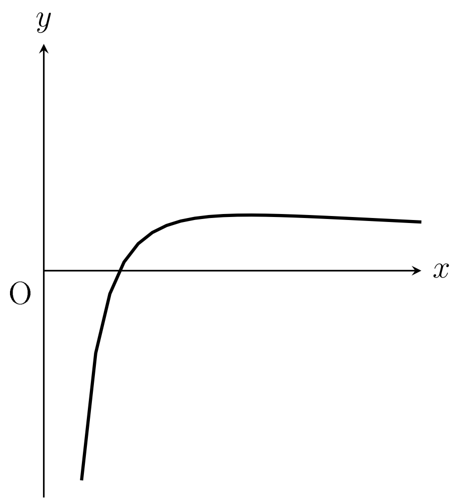
2. (1) $y = 2x^3 + 3x^2 + 12x$



(2) $y = \dfrac{x^2+1}{x+1}$



(3) $y = \dfrac{\log x}{x}$



3. $\lfloor x \rfloor = -2, 1, 2$

章末問題 II

1. $x = 0$ のときに極大値 1 をとる．変曲点は $x = \pm 1$.

2. (1) 利潤を最大化する生産量は $x^* = 100$.

   (2) 供給関数は $S(p) = p/2 (p \geq 0)$.

3. (1) $x = \dfrac{p-4}{2}$

   (2) 3

   (3) $AC(x) = \dfrac{C(x)}{x} = x + 4 + \dfrac{9}{x}$， $MC(x) = C'(x) = 2x + 4$ より，$x = 3$ のとき $AC(3) = 10 = MC(3)$.

9 章

練習問題 1. (1) $f_x(x, y) = 5x^4$, $f_y(x, y) = 4y$

(2) $f_x(x, y) = 3x^2y^2$, $f_y(x, y) = 2x^3y$

(3) $f_x(x,y) = ye^{xy},\ f_y(x,y) = xe^{xy}$
(4) $f_x(x,y) = 2x\cos(x^2+y^2),\ f_y(x,y) = 2y\cos(x^2+y^2)$

練習問題 2. (1) $f_{xx}(x,y) = 20x^3,\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0,\ f_{yy}(x,y) = 4$
(2) $f_{xx}(x,y) = 6xy^2,\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 6x^2y,\ f_{yy}(x,y) = 2x^3$
(3) $f_{xx}(x,y) = y^2e^{xy},\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = (1+xy)e^{xy},\ f_{yy}(x,y) = x^2e^{xy}$
(4) $f_{xx}(x,y) = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2),\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -4xy\sin(x^2+y^2),\ f_{yy}(x,y) = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2)$

練習問題 3. (1) $(x,y) = (0,0)$ で極大値 0
(2) $(x,y) = (1,3)$ で極小値 -7
(3) 極値なし
(4) $(x,y) = (\pm 2\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ で極小値 -4

章末問題 I

1. (1) $f_x(x,y) = 4x^3,\ f_y(x,y) = -3y^2$
(2) $f_x(x,y) = 2xy,\ f_y(x,y) = x^2$
(3) $f_x(x,y) = -\sin(x-y),\ f_y(x,y) = \sin(x-y)$
(4) $f_x(x,y) = \dfrac{1}{y},\ f_y(x,y) = -\dfrac{x}{y^2}$
(5) $f_x(x,y) = yx^{y-1},\ f_y(x,y) = (\log x)x^y$

2. (1) $f_{xx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = e^{x+y}$
(2) $f_{xx}(x,y) = 0, f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^y, f_{yy}(x,y) = xe^y$
(3) $f_{xx}(x,y) = -y^2(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}, f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = xy(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}, f_{yy}(x,y) = -x^2(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}$
(4) $f_{xx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = -\sin(x+y)$

3. (1) $(x,y) = (0,0)$ で極小値 0
(2) $(x,y) = (2,1)$ で極大値 4
(3) $(x,y) = (0,0)$ で極大値 1

4. (1) $f_{xx}(x,y)=2,\ f_{yy}(x,y)=-2$ より，$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)=0$

(2) $f_{xx}(x,y)=\dfrac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2},\ f_{yy}(x,y)=\dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ より，

$$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)=0$$

(3) $f_{xx}(x,y)=\dfrac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3},\ f_{yy}(x,y)=\dfrac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$ より，

$$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)=0$$

(4) $f_{xx}(x,y)=e^x\sin y+e^{-y}\cos x,\ f_{yy}(x,y)=-e^x\sin y-e^{-y}\cos x$ より，

$$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)=0$$

章末問題 II

1. (1) $U_{x_1}(x_1,x_2)=\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}, U_{x_2}(x_1,x_2)=\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}$.

(2) $U_{x_1}(x_1,x_2)=(x_1^{\rho}+x_2^{\rho})^{(1-\rho)/\rho}x_1^{\rho-1}, U_{x_2}(x_1,x_2)=(x_1^{\rho}+x_2^{\rho})^{(1-\rho)/\rho}x_2^{\rho-1}$.

2. 利潤最大化の 1 階の条件は

$$\frac{\partial\pi(k,\ell)}{\partial k}=p\alpha k^{\alpha-1}\ell^{1-\alpha}-r=0,\quad \frac{\partial\pi(k,\ell)}{\partial \ell}=p(1-\alpha)k^{\alpha}\ell^{-\alpha}-w=0$$

となり，これらを整理すると

$$\alpha k^{\alpha-1}\ell^{1-\alpha}=\frac{r}{p},\quad (1-\alpha)k^{\alpha}\ell^{-\alpha}=\frac{w}{p}$$

また，利潤の 2 階の導関数は

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\pi(k,\ell)}{\partial k^2}&=p\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}\ell^{1-\alpha}\\ \frac{\partial^2\pi(k,\ell)}{\partial \ell\partial k}&=\frac{\partial^2\pi(k,\ell)}{\partial k\partial \ell}=0\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \pi(k,\ell)}{\partial \ell^2} = -p\alpha(1-\alpha)k^{\alpha}\ell^{-\alpha-1}$$

となるので，$0 < \alpha < 1$ より利潤最大化の 2 階の条件

$$p\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}\ell^{1-\alpha} < 0, \quad -p\alpha(1-\alpha)k^{\alpha}\ell^{-\alpha-1} < 0$$

および

$$p^2\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}\ell^{1-\alpha}(-\alpha(1-\alpha)k^{\alpha}\ell^{-\alpha-1}) - 0 > 0$$

を満足していることがわかる．

10 章

練習問題 1. (1) $z = 3x + 5y - 4$　(2) $z = 2x + 4y - 5$
(3) $z = 16x + 12y - 32$　(4) $z = e^3x + e^3y - 2e^3$

練習問題 2. (1) $df(u(x,y), v(x,y)) = 2(xy^2 + y^2 + 2xy + x + y)dx + 2(x^2y + x^2 + 2xy + x + y)dy$
(2) $f(u(x), v(x))' = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 2$

章末問題 I

1. (1) $df(x,y) = dx + 2dy$
(2) $df(x,y) = 3x^2dx + 3y^2dy$
(3) $df(x,y) = \dfrac{-1}{(x+y)^2}dx + \dfrac{-1}{(x+y)^2}dy$
(4) $df(x,y) = -x(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}dx - y(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}dy$

2. (1) $z = x + 2y + 3$　(2) $z = 3a^2x + 3b^2y - 2a^3 - 2b^3$
(3) $z = \dfrac{-x}{(a+b)^2} + \dfrac{-y}{(a+b)^2} + \dfrac{2}{a+b}$ (4) $z = \dfrac{-1}{\sqrt{1-a^2-b^2}}(ax + by - 1)$

3. (1) $df(u(x,y),v(x,y)) = 6(x^2y^2+xy^3)dx + (9x^2y^2+4x^3y)dy$
(2) $df(u(x,y),v(x,y)) = (2xy-y^2)e^{x^2y-xy^2}dx + (x^2-2xy)e^{x^2y-xy^2}dy$
(3) $df(u(x,y),v(x,y)) = 2(x\sin^2 y - y^2\sin x\cos x)dx + 2(x^2\sin y\cos y + y\cos^2 x)dy$

4. (1) $f(u(x),v(x))' = 8x - 6x^5$ (2) $f(u(x),v(x))' = (-3x+4)e^{-x}$
(3) $f(u(x),v(x))' = 2x\cos x^2\cos(\log x) - \dfrac{1}{x}\sin x^2\sin(\log x)$

章末問題 II

1. (1)$f(\lambda x,\lambda y) = a(\lambda x) + b(\lambda y) = \lambda(ax+by) = \lambda f(x,y)$,
(2)$f(\lambda x,\lambda y) = \sqrt{a(\lambda x)^2 + b(\lambda y)^2 + 2c(\lambda x)(\lambda y)} = \lambda\sqrt{ax^2+by^2+2cxy} = \lambda f(x,y)$,
(3)$f(\lambda x,\lambda y) = \dfrac{a(\lambda x)^2 + b(\lambda y)^2 + 2c(\lambda x)(\lambda y)}{d(\lambda x)+e(\lambda y)} = \dfrac{\lambda(ax^2+by^2+2cxy)}{dx+ey} = \lambda f(x,y)$.

2. (1) $f(\lambda x,\lambda y) = \dfrac{\alpha_1(\lambda x)+\beta_1(\lambda y)}{\alpha_2(\lambda x)+\beta_2(\lambda y)} = \dfrac{\alpha_1 x+\beta_1 y}{\alpha_2 x+\beta_2 y} = f(x,y)$,
(2) $f(\lambda x,\lambda y) = a(\lambda x)^2 + b(\lambda y)^2 + 2c(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2(ax^2+by^2+2cxy) = \lambda^2 f(x,y)$

3. ($f(x,y) = ax+by$ について) $x\times a + y\times b = f(x,y)$,
($f(x,y) = \sqrt{ax^2+by^2+2cxy}$ について) $x\times(2ax+2cy)/2\sqrt{ax^2+by^2+2cxy} +$
$y\times(2by+2cx)/2\sqrt{ax^2+by^2+2cxy} = \sqrt{ax^2+by^2+2cxy}$,

$\left(f(x,y) = \dfrac{ax^2+by^2+2cxy}{dx+ey}\text{について}\right)$ $x\times\dfrac{(2ax+2cy)(dx+ey)-(ax^2+by^2+2cxy)d}{(dx+ey)^2} +$
$y\times\dfrac{(2by+2cx)(dx+ey)-(ax^2+by^2+2cxy)e}{(dx+ey)^2} = \dfrac{ax^2+by^2+2cxy}{dx+ey}$,

$\left(f(x,y) = \dfrac{\alpha_1 x+\beta_1 y}{\alpha_2 x+\beta_2 y}\text{について}\right)$ $x\times\dfrac{\alpha_1(\alpha_2 x+\beta_2 y)-\alpha_2(\alpha_1 x+\beta_1 y)}{(\alpha_2 x+\beta_2 y)^2} + y\times$
$\dfrac{\beta_1(\alpha_2 x+\beta_2 y)-\beta_2(\alpha_1 x+\beta_1 y)}{(\alpha_2 x+\beta_2 y)^2} = 0$,

$(f(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$ について)　$x \times (2ax + 2cy) + y \times (2by + 2cx) = 2(ax^2 + by^2 + 2cxy)$.

4. (1) $\alpha + \beta > 1$ のとき $F(\lambda k, \lambda \ell) = (\lambda k)^\alpha (\lambda \ell)^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} k^\alpha \ell^\beta > \lambda k^\alpha \ell^\beta = \lambda F(k, \ell)$ より規模に関して収穫逓増.

   (2) 同様に $\alpha + \beta < 1$ のとき $F(\lambda k, \lambda \ell) = (\lambda k)^\alpha (\lambda \ell)^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} k^\alpha \ell^\beta < \lambda k^\alpha \ell^\beta = \lambda F(k, \ell)$ より規模に関して収穫逓減.

11 章

練習問題 1. $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極大値 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極小値 $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

練習問題 2. $(x, y) = (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ のとき最大値 20, $(x, y) = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ のとき最小値 4

練習問題 3. ラグランジュ関数は

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \alpha \log x_1 + \beta \log x_2 + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

となる．1 階の条件は

$$\begin{cases} L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) & = \alpha x_1^{-1} - \lambda p_1 = 0 \\ L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) & = \beta x_2^{-1} - \lambda p_2 = 0 \\ L_\lambda(x_1, x_2, \lambda) & = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

最初の 2 式より

$$\alpha x_1^{-1} = \lambda p_1, \quad \beta x_2^{-1} = \lambda p_2$$

これらの 2 式を辺々で割ることにより,

$$\frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

が得られる．この式から求まる $x_2 = \dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{p_1}{p_2}x_1$ を 1 階の条件の第 3 式に代入することで

$$(x_1^*,\ x_2^*) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{I}{p_1}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{I}{p_2}\right)$$

が得られる．よって，例題と同じ解が求まる．

章末問題 I

1. (1) $x = 2\sqrt{2}$ のとき極大値 $-2\sqrt{2}$, $x = -2\sqrt{2}$ のとき極小値 $2\sqrt{2}$
   (2) $x = 2$ のとき極小値 2（極大値なし）
   (3) $x = -1$ のとき極大値 -1, $x = 1$ のとき極小値 1
2. (1) $(x, y) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき最大値 5, $(x, y) = \left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ のとき最小値 0
   (2) $(x, y) = (1, 1)$ のとき最大値 2, $(x, y) = (-1, -1)$ のとき最小値 -2
   (3) $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ のとき最小値 2（最大値なし）
   (4) $(x, y) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)$ のとき最大値 $\sqrt{5}$, $(x, y) = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$

章末問題 II

1. 第 1 財，第 2 財の限界効用は，それぞれ効用関数の第 1 財，第 2 財の消費量についての偏微分であることに注意すると，

$$MU_1(x_1, x_2) = U_{x_1}(x_1, x_2) = \alpha(x_1 - \gamma_1)^{\alpha-1}(x_2 - \gamma_2)^{1-\alpha}$$
$$MU_2(x_1, x_2) = U_{x_2}(x_1, x_2) = (1-\alpha)(x_1 - \gamma_1)^{\alpha}(x_2 - \gamma_2)^{-\alpha}$$

第 2 財で測った第 1 財の限界代替率は

$$MRS_{12}(x_1, x_2) = \frac{MU_1(x_1, x_2)}{MU_2(x_1, x_2)} = \frac{\alpha(x_2 - \gamma_2)}{(1-\alpha)(x_1 - \gamma_1)}$$

2. 効用を最大化する財の組合せは,

$$(x_1^*,\ x_2^*) = (42, 36)\,.$$

そのときの効用の値は $7\log 42 + 3\log 36 = 13\log 2 + 13\log 3 + 7\log 7$.

3. $(c_1^*, c_2^*) = (250, 262.5)$

4. 要素需要関数は $k^* = \left(\dfrac{2w}{w+r}\right)^2 Y, \quad l^* = \left(\dfrac{2r}{w+r}\right)^2 Y \quad (Y \geqq 0)$.

費用関数は $\dfrac{4Y}{w+r} \quad (Y \geqq 0)$.

12 章

練習問題 1. (1) $2x^3 + C$ (2) $x^3 - x^2 + x + C$ (3) $2x + C$ (4) $3x^3 - x + C$

練習問題 2. (1) $2x^2 + x + \log|x| + C$ (2) $\dfrac{-1}{6(3x+7)^2} + C$

(3) $\log|\sin x| + C$ (4) $\dfrac{1}{3}\log\left|\dfrac{x}{x+3}\right| + C$

章末問題 I

1. (1) $x^2 - x + C$ (2) $3x^3 + 6x^2 + 4x + C$ (3) $x + C$ (4) $2x^3 + 3x^2 + 6x + C$

2. (1) $x + \log|x-1| + C$ (2) $\dfrac{1}{3}(x-1)\sqrt{2x+1} + C$

(3) $\dfrac{1}{2}\log(x^2+1) + C$ (4) $\log\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right| + C$

3. $\dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

章末問題 II

1. $\dfrac{p}{q}\dfrac{dq}{dp} = kp$ (k は定数) の両辺を p で割ると，$\dfrac{1}{q}\dfrac{dq}{dp} = k$．すなわち $\dfrac{d}{dp}\log q = k$. よって両辺を p で積分をすると $\log q = kp + C$ (C は積分定数)．両辺の指数をとることで $q = Ae^{kp}$ $(A = e^C)$ となる．

2. $\dfrac{d^2C(x)}{dx^2} = \alpha(x - b) = \alpha x - \alpha b$ の両辺を x で積分すると
$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{\alpha}{2}x^2 - \alpha bx + \beta \quad (\beta \text{ は積分定数}).$$
さらに両辺を x で積分すると
$$C(x) = \frac{\alpha}{6}x^3 - \frac{\alpha b}{2}x^2 + \beta x + \gamma \quad (\beta,\, \gamma \text{ は積分定数の形で現れる任意定数}).$$

3. $N(t) = \dfrac{b}{1 + ae^{-rt}}$($r, a, b$ は正の定数) を t で微分すると $N'(t) = \dfrac{abre^{-rt}}{(1 + ae^{-rt})^2} > 0$. 2 階微分係数は $N''(t) = \dfrac{-abr^2e^{-rt}(1 - ae^{-rt})}{(1 + ae^{-rt})^3}$ となる．増減表は，

t	$-\infty$	$\cdots$	$\log a/r$	$\cdots$	∞
$N'(t)$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
$N''(t)$	$\cdots$	$+$	0	$-$	$\cdots$
$N(t)$	0	$\nearrow$	$b/2$（変曲点）	$\nearrow$	b

となり本文中の図が描ける．

13 章

練習問題 1. (1) 36　(2) $\cos 1$　(3) $\dfrac{26}{3}$　(4) 1

練習問題 2. (1) $\dfrac{9}{2}$

章末問題 I

1. (1) 8 (2) 0 (3) 2 (4) 2

2. $\sqrt{2}-1$

3. $f(x)=4x-3$

章末問題 II

1. $E(kX+\ell)=\displaystyle\int_a^b (kx+\ell)f(x)dx = k\int_a^b xf(x)dx + \ell\int_a^b f(x)dx = kE(X)+\ell.$

2.

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_a^b (x-E(X))^2 f(x)dx = \int_a^b (x^2-2E(X)x+(E(X))^2)f(x)dx \\ &= \int_a^b x^2 f(x)dx - 2E(X)\int_a^b xf(x)dx + (E(X))^2\int_a^b f(x)dx \\ &= E(X^2)-2E(X)E(X)+(E(X))^2 = E(X^2)-(E(X))^2. \end{aligned}$$

3. $P(-0.5 \leqq X < 0.5) = 0.75$，期待値 $E(X)=0$，分散 $V(X)=0.5$

14 章

練習問題 1. (1) 78 (2) $\dfrac{1}{4}$ (3) $\sqrt{5}-1$

練習問題 2. (1) 1 (2) $\dfrac{\pi^2}{4}-2$ (3) $\dfrac{e^2+1}{4}$

練習問題 3. (1) 10 (2) 2 (3) $\dfrac{3}{2}$ (4) ∞

練習問題 4. (1) $\dfrac{1}{4}$ (2) 6 (3) $-\dfrac{1}{4}$

章末問題 I

1. (1) 0 (2) $\dfrac{1}{3}$ (3) $\dfrac{\pi}{4}$

2. (1) $-\dfrac{2}{e}+1$ (2) 1 (3) $\dfrac{e^2-1}{4}$

3. (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) 4 (3) -1 (4) 2

4. n が偶数のとき：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

n が奇数のとき：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$$

章末問題 II

1.

$$P(X \leqq x) = P(\mu+\sigma Z \leqq x) = P\left(Z \leqq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

最右辺を x で微分をすると X の確率密度関数は $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ と求まる．これは平均 μ，分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の密度関数である．

2.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}dx = \lambda\lim_{s\to\infty}\left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}\right]_0^s = \frac{\lambda}{\lambda-t}\ (t<\lambda)$$

期待値は $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, 分散は $V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

15 章

練習問題 1. (1) 2　(2) 4　(3) 16　(4) 48

練習問題 2. (1) 2　(2) 72　(3) $\dfrac{1}{8}$　(4) $\dfrac{4}{3}$

章末問題 I

1. (1) 5　(2) $\dfrac{512}{5}$　(3) $\dfrac{224}{9}$　(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(5) $\dfrac{1}{6}$

章末問題 II

1.

$$
\begin{aligned}
E(aX+bY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(ax+by)f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy\right)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} y\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx\right)dy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = aE(X)+bE(Y)
\end{aligned}
$$

2. 1 より $E(c_1X_1+c_2X_2) = c_1E(X_1)+c_2E(X_2)$.

$E\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_iX_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} c_iE(X_i)$ が成り立つとき，

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_iX_i + c_nX_n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_iX_i\right) + E(c_nX_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} c_iE(X_i) + c_nE(X_n) = \sum_{i=1}^{n} c_iE(X_i)
\end{aligned}
$$

$c_i = \dfrac{1}{n}$ $(i = 1, \cdots, n)$ とおくと，

$$E(\bar{X}) = E\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{E(X_i)}{n}$$