新版線形代数 演習 改訂版　解答

２章　行列と連立１次方程式

１節　行列

A 問題

56

⑴　3　　⑵　4　　⑶　6

57

⑴　両辺の成分を比較すると $a=2$，$b=3$，$c=-1$，$d=0$

⑵　両辺の成分を比較すると

$$\begin{cases} a+b=2 & \cdots① \\ a+c=5 & \cdots② \\ a-b=4 & \cdots③ \end{cases}$$

①＋③より $a=3$　これを①，②に代入し $b=-1$，$c=2$

$\therefore$　$a=3$，$b=-1$，$c=2$

58

⑴　$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+3 & 3+(-1) \\ 3+1 & -1+(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

⑵　$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+1 & 2+4 & 3+2 \\ 5+2 & 1+6 & 4+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

59

⑴　$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-4 & -2-2 \\ -1-(-2) & 8-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

⑵　$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5-4 & 3-3 & 1-2 \\ 1-3 & 0-(-1) & -1-(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

60　$X=A-B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5-3 & 3-1 \\ -4-1 & 2-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

61

(1) $2A+3B=2\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-3\\9&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3&4-3\\2+9&0+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\11&6\end{pmatrix}$

(2) $3A-2C=3\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&1\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&2\\0&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-4&6-2\\3-0&0+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4\\3&6\end{pmatrix}$

(3) $2(A+B)-3(A-C)=-A+2B+3C=\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-2\\6&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&3\\0&-9\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-1+2+6&-2-2+3\\-1+6+0&0+4-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-1\\5&-5\end{pmatrix}$$

62

(1) $2X-2A=3A-3B$ より

$X=\frac{1}{2}(5A-3B)=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}25&-15\\5&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&3\\9&-6\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}22&-18\\-4&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11&-9\\-2&8\end{pmatrix}$

(2) $Z+Y=A\quad\cdots$①, $X-Y=B\quad\cdots$② とおくと

①＋②より $2X=A+B$

$\therefore\quad X=\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}5&-3\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\3&-2\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-2\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\end{pmatrix}$

①－②より $2Y=A-B$

$\therefore\quad Y=\frac{1}{2}(A-B)=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}5&-3\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\3&-2\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-4\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&2\end{pmatrix}$

63

(1) $(3\ \ -4)\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}=3\times8+(-4)\times5=4$

(2) $(\sec\theta\quad\tan\theta)\begin{pmatrix}\sec\theta\\-\tan\theta\end{pmatrix}=\sec^2\theta-\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1$

64

(1) $\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times3+3\times1\\1\times3+4\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&2\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times(-1)+2\times2\\5\times(-1)+3\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}-1&4\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\times5+4\times2\\2\times5+(-3)\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

65

(1) $\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1+2\times3 & 3\times3+2\times1\\1\times1+4\times3 & 1\times3+4\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 11\\13 & 7\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times3+(-2)\times2 & 1\times5+(-2)\times(-1)\\2\times3+4\times2 & 2\times5+4\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 7\\14 & 6\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}a & 1\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & 1\\0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\times b+1\times0 & a\times1+1\times a\\0\times b+b\times0 & 0\times1+b\times a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab & 2a\\0 & ab\end{pmatrix}$

66

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 3\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 3 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2+1 & 1+6+0 & 2+2+0\\1+1+3 & 1+3+0 & 2+1+0\\2+1+0 & 2+3+0 & 4+1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7 & 4\\5 & 4 & 3\\3 & 5 & 5\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & -1 & 3\\3 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\3 & 2 & 1\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6+1 & 1+4-1 & -1+2+2\\2-3+3 & 2-2-3 & -2-1+6\\3+0+2 & 3+0-2 & -3+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 4 & 3\\2 & -3 & 3\\5 & 1 & 1\end{pmatrix}$

67

(1) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}=8+5+6=19$

(2) $\begin{pmatrix}2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+7 & 8+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 22\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\2 & 5 & 3\\3 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+1-12\\4+5-9\\6+2-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\\2\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times2 & 4\times1 & 4\times3\\5\times2 & 5\times1 & 5\times3\\2\times2 & 2\times1 & 2\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 4 & 12\\10 & 5 & 15\\4 & 2 & 6\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\2 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 2\\-3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times2+1\times1+4\times(-3) & 3\times0+1\times2+4\times4\\2\times2+5\times1+3\times(-3) & 2\times0+5\times2+3\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 18\\0 & 22\end{pmatrix}$

(1) $$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\times 1+0+0 & 0+b\times 1+0 & 0+0+c\times 1 \\ d\times 1+0+0 & 0+e\times 1+0 & 0+0+f\times 1 \\ g\times 1+0+0 & 0+h\times 1+0 & 0+0+i\times 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times a+0+0 & 1\times b+0+0 & 1\times c+0+0 \\ 0+1\times d+0 & 0+1\times e+0 & 0+1\times f+0 \\ 0+0+1\times g & 0+0+1\times h & 0+0+1\times i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1\times 1+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1\times 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

69

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1+0 \\ -1+0 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 1-1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-7 & -14+21 \\ 2-3 & -7-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+7 & 21-21 \\ -2+2 & 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = A$

(3) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-2 \\ -1+1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & -2+0 \\ 0+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -A$

$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & -2+2 \\ 1-1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

(4) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

70　（証明）

①　$n=1$のとき

$A^1=A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3^1-1\\0&3^1\end{pmatrix}$ だから，$n=1$のとき成り立つ。

②　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると

$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}1&3^k-1\\0&3^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0&2+3^{k+1}-3\\0+0&0+3^{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3^{k+1}-1\\0&3^{k+1}\end{pmatrix}$

だから，$n=k+1$ のときも成り立つ。

①，②より，任意の正の整数 n について，$A^n=\begin{pmatrix}1&3^n-1\\0&3^n\end{pmatrix}$ が成り立つ。

71

$A^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab\\ca&cb\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{cases}a^2+bc=0 & \cdots ① \\ ab=0 & \cdots ② \\ ca=0 & \cdots ③ \\ cb=0 & \cdots ④\end{cases}$$

①，④ より $a^2=0$　よって $a=0$

このとき①～④は $bc=0$

従って $a=0$，$bc=0$

逆にこのとき $A^2=0$ よって　$a=0$，$bc=0$

72

⑴　$|A|=2\cdot 3-5\cdot 1=1\neq 0$　より，逆行列は $\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$

⑵　$|A|=7\cdot 5-9\cdot 4=-1$　より，逆行列は $\begin{pmatrix}-5&9\\4&-7\end{pmatrix}$

⑶　$|\mathrm{A}|=1\cdot 8-2\cdot 4=0$　逆行列は存在しない

73

$$AB=\begin{pmatrix}4&7\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+8&8+21\\3+8&2+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40&29\\11&8\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&7\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+2&21+4\\16+3&28+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&25\\19&34\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4\cdot2-7\cdot1}\begin{pmatrix}2&-7\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-7\\-1&4\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\frac{1}{3\cdot3-2\cdot4}\begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}$$

⑴ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-7\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+2&-21-8\\-8-3&25+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-29\\-11&40\end{pmatrix}$

または

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{40\times8-29\times11}\begin{pmatrix}8&-29\\-11&40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-29\\-11&40\end{pmatrix}$$

⑵ $A^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}2&-7\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+28&-4-21\\-3-16&2+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34&-25\\-19&14\end{pmatrix}$

または

$$A^{-1}B^{-1}=(BA)^{-1}=\frac{1}{14\times34-25\times19}\begin{pmatrix}34&-25\\-19&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34&-25\\-19&14\end{pmatrix}$$

⑶ ⑴より $\begin{pmatrix}8&-29\\-11&40\end{pmatrix}$

74

⑴ $X=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\frac{1}{10-9}\begin{pmatrix}5&-3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-9&10-12\\-3+6&-6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2\\3&2\end{pmatrix}$

⑵ $X=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\7&-5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{-15-(-14)}\begin{pmatrix}-5&2\\-7&3\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2\\7&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+0&-4+0\\-5+7&2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&-4\\2&-1\end{pmatrix}$

75

$P^{-1}AP=B$ より $(P^{-1}AP)^n=\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{n\text{個}}=B^n$ よって $P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}$

従って　$PP^{-1}A^nPP^{-1}=P\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}P^{-1}$

つまり

$$A^n=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-2\\0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2^{n+1}\\0&2^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-2+2^{n+1}\\0&2^{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2^n-1\\0&2^n\end{pmatrix}$$

76

(1) ${}^t\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (2) ${}^t\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (3) ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

77

(1) ${}^t(AB) = {}^t\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\right\} = {}^t\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

または ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 & 8-2 \\ 6-2 & 12-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

(2) ${}^tA\ {}^tB = {}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & -10 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

(3) (1)より $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

78

(1) $2A - 3B + 4C = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2+0+4 & 4-3+4 & 6-6+0 \\ 4+3+4 & 2+0+8 & 4-9-8 \\ 2+6+0 & 2+9-8 & 8+0+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 11 & 10 & -13 \\ 8 & 3 & 20 \end{pmatrix}$

(2) $BC - CB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0+1+0 & 0+2-4 & 0-2+6 \\ -1+0+0 & -1+0-6 & 0+0+9 \\ -2-3+0 & -2-6+0 & 0+6+0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0-1+0 & 1+0+0 & 2+3+0 \\ 0-2+4 & 1+0+6 & 2+6+0 \\ 0+2-6 & 0+0-9 & 0-6+0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & -7 & 9 \\ -5 & -8 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \\ -4 & -9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & -14 & 1 \\ -1 & 1 & 12 \end{pmatrix}$

(3) ${}^tA(B+C) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1+0-2 & 2+4-5 & 2+2+3 \\ 2+0-2 & 4+2-5 & 4+1+3 \\ 3+0-8 & 6+4-20 & 6+2+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \\ -5 & -10 & 20 \end{pmatrix}$

79

⑴ $(A+B)(A-B)=\left\{\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}\right\}\left\{\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}\right\}$

$$=\begin{pmatrix}3 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+0 & 12-4\\6+0 & 24+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 8\\6 & 36\end{pmatrix}$$

⑵ $A^2-B^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+3 & 2+4\\6+12 & 3+16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1-9 & -3-6\\3+6 & -9+4\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}7 & 6\\18 & 19\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-8 & -9\\9 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 15\\9 & 24\end{pmatrix}$$

⑶ $A^2-2AB+B^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}4+3 & 2+4\\6+12 & 3+16\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2+3 & -6+2\\3+12 & -9+8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-9 & -3-6\\3+6 & -9+4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 6\\18 & 19\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & -8\\30 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8 & -9\\9 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -11\\57 & 12\end{pmatrix}$$

80

⑴ 証明

① $n=1$のとき

$A^1=A=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1-r^1\\0 & r^1\end{pmatrix}$ だから，$n=1$ のとき成り立つ。

② $n=k$のとき成り立つと仮定すると

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}1 & 1-r^k\\0 & r^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\0 & r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & a+r-r^{k+1}\\0+0 & 0+r^{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1-r^{k+1}\\0 & r^{k+1}\end{pmatrix}$$

だから，$n=k+1$ のときも成り立つ。

①，②より，任意の正の整数 n について，$A^n=\begin{pmatrix}1 & 1-r^n\\0 & r^n\end{pmatrix}$ が成り立つ。

⑵ $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1-r^2\\0 & r^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ のとき，$r^2-1=0 \quad \therefore \quad r=\pm 1$

さらに，$A\neq E$ ならば，$r\neq 1$ よって $r=-1$，$a+r=1$ より $a=2$

$\therefore \quad A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}$

⑶ $A^4=\begin{pmatrix}1 & 1-r^4\\0 & r^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ のとき$r^4-1=(r^2+1)(r+1)(r-1)=0$ より，$r=\pm 1$ だが

$r=1$のとき $a=0$ となって$A=E$ である。

一方， $r=-1$のとき $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}$ だが $A^2=E$ である。

よって，$A^4=E$ かつ A，A^2，$A^3\neq E$ を満たすAは存在しない。

81 与えられた行列をAとおくとき $|A|=0$ となる k を求めればよい。

⑴ $|A|=(k+1)(k-1)-35=k^2-36=0 \quad \therefore \quad k=\pm 6$

⑵ $|A|=2(k^2+1)-100=2(k^2-49)=0 \quad \therefore \quad k=\pm 7$

⑶ $|A|=k^2(k+1)-12k=k(k+4)(k-3)=0 \quad \therefore \quad k=-4,\ 0,\ 3$

82

$(E+A)(E-A)=E^2-EA+AE-A^2=E-A+A-O=E$

$(E-A)(E+A)=E^2+EA-AE-A^2=E+A-A-O=E$

これは $E-A$ が $E+A$ の逆行列であることを意味し，よって，$E+A$ は正則。

83

⑴　$A = S = {}^tS = {}^tA = -A$　　$\therefore$　$2A = O$　　$\therefore$　$S = A = O$

⑵　$S_1 + A_1 = X = S_2 + A_2$　　$\therefore$　$S_1 - S_2 = A_2 - A_1$

${}^t(S_1 - S_2) = {}^tS_1 - {}^tS_2 = S_1 - S_2$ より，$S_1 - S_2$ は対称行列であり

${}^t(A_2 - A_1) = {}^tA_2 - {}^tA_1 = -A_2 - (-A_1) = -(A_2 - A_1)$ より，$A_2 - A_1$ は交代行列だから

⑴より，$S_1 - S_2 = A_2 - A_1 = O$　　$\therefore$　$S_1 = S_2$，$A_1 = A_2$

84

⑴　${}^t(ASA) = {}^tA\,{}^tS\,{}^tA = -AS(-A) = ASA$ より，ASA は対称行列。

⑵　${}^t(P^{-1}AP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1} = P^{-1}(-A)^t({}^tP) = -P^{-1}AP$ より，$P^{-1}AP$ は交代行列。

⑶　直交行列 P について P が対称行列ならば，${}^tP = P$ である。

一方 P は直交行列なので $P^{-1} = {}^tP$ である。

よって $P = P^{-1}$　従って　$P^2 = E$。

逆に $P^2 = E$ならば，$P = P^{-1}$ である。一方 P は直交行列なので $P^{-1} = {}^tP$ である。

よって ${}^tP = P$ 従って P は対称行列。

85

$$
\begin{aligned}
{}^tAA &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & \cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi & -(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & -(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi & (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E
\end{aligned}
$$

同様にして，$A\,{}^tA = E$ も成り立つ。よって，任意の θ，φ について，A は直交行列である。

86　A が直交行列より，A は正則であって $|A| = ad - bc \neq 0$

よって，$|B| = bc - ad = -|A| \neq 0$だから，$B$も正則である。$A$ は直交行列なので

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = {}^tA = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad a = \frac{d}{|A|},\ b = -\frac{c}{|A|},\ c = -\frac{b}{|A|},\ d = \frac{a}{|A|}$$

$$\therefore \quad B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{pmatrix} c & -a \\ -d & b \end{pmatrix} = -\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} c & -a \\ -d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix} = {}^tB$$

よって，Bも直交行列。

87

⑴ A が直交行列で $ad-bc=1$ より

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = {}^tA = A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad d=a,\ c=-b$$ これらを $ad-bc=1$ に代入して

$$\therefore \quad a^2+b^2=1 \qquad \therefore \quad b=\pm\sqrt{1-a^2},\ c=\mp\sqrt{1-a^2}$$

$$\therefore \quad A=\begin{pmatrix} a & \pm\sqrt{1-a^2} \\ \mp\sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix}$$ （複合同順）

⑵ $a=\cos\theta$ とおくと

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \pm\sqrt{\sin^2\theta} \\ \mp\sqrt{\sin^2\theta} & \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \pm|\sin\theta| \\ \mp|\sin\theta| & \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \pm\sin\theta \\ \mp\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ （複合同順）

⑶ $$A^2=\begin{pmatrix} \cos\theta & \pm\sin\theta \\ \mp\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \pm\sin\theta \\ \mp\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos^2\theta-\sin^2\theta & \pm\cos\theta\sin\theta\pm\sin\theta\cos\theta \\ \mp\sin\theta\cos\theta\mp\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta+\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \pm\sin 2\theta \\ \mp\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}=E \quad \therefore \quad \cos 2\theta=1 \quad \cdots① \quad \sin 2\theta=0 \quad \cdots②$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，

①をみたすのは　$\theta=0,\ \pi$

②をみたすのは $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi \qquad \therefore \quad \theta=0,\ \pi$