

4章 行列の応用

1節 1次変換

A 問題

141 原点に関する対称移動を表す行列は

点 (x, y) が点 (x', y') にうつるとすると

$$\begin{cases} x' = -x = (-1)x + 0y \\ y' = -y = 0x + (-1)y \end{cases} \quad \text{であるから} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

この変換により $(a-b, \sqrt{3})$ は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{であるから} \quad (b-a, -\sqrt{3}) \text{へ移る。}$$

142

$$(1) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{より点} \quad (-1, 1) \text{に移される。}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{より点} \quad (2, -3) \text{に移される。}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{より点} \quad (5, -7) \text{に移される。}$$

$$(4) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b \\ a-3b \end{pmatrix} \quad \text{より点} \quad (-a+2b, a-3b) \text{に移される。}$$

143

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{より点} \quad (a, b) \text{に移される。}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ -2a+3b \end{pmatrix} \quad \text{より点} \quad (a+2b, -2a+3b) \text{に移される。}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+4b \\ a+2b \end{pmatrix} \quad \text{より点} \quad (2a+4b, a+2b) \text{に移される。}$$

144

$$\text{求める行列を} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{とすると} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{より} \quad a-b=-1 \quad \dots \textcircled{1} \quad -3a+4b=6 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$c-d=2 \quad \dots \textcircled{2} \quad -3c+4d=-7 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{を解いて} \quad a=2, \quad b=3 \quad \therefore \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{4} \text{を解いて} \quad c=1, \quad d=-1$$

145 像を (x', y') とすると

$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって点 $(-\sqrt{3}, 1)$ は、点 $\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$ に移される。

$$\begin{aligned} (2) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{5}{6}\pi & -\sin \frac{5}{6}\pi \\ \sin \frac{5}{6}\pi & \cos \frac{5}{6}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって点 $(-\sqrt{3}, 1)$ は、点 $(1, -\sqrt{3})$ に移される。

$$\begin{aligned} (3) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{4}{3}\pi & -\sin \frac{4}{3}\pi \\ \sin \frac{4}{3}\pi & \cos \frac{4}{3}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって点 $(-\sqrt{3}, 1)$ は、点 $(\sqrt{3}, 1)$ に移される。

146 f を表す行列を A とすると
$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

だから, f^{-1} を表す行列は $-\frac{\pi}{3}$ 回転を表す行列で,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

次に $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ であるから $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$

ゆえに $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} \\ -8 \end{pmatrix}$

よって $P(4\sqrt{3}, -8)$

147

(1) f, g を表す行列はそれぞれ

$$f: \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad g: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{だから}$$

$$f \circ g \text{ を表す行列は } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f \text{ を表す行列は } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

(2) $f \circ g$ による像は $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix}$ より点 $(-9, 2)$

$$g \circ f \text{ による像は } \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{より点 } (-3, 0)$$

148

$P(x, y)$ とすると $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ここで $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって, 点 P の座標は $(-5, 3)$

149

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{であるから} \quad A^{15} = (A^3)^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

150 点 P を原点を中心として、 $\pm \frac{\pi}{3}$ 回転移動した点が Q である。

$$+\frac{\pi}{3} \text{ の回転を表す行列は } \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\pi}{3} \text{ の回転を表す行列は } \begin{pmatrix} \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

より、点 Q の座標は $(0, 2)$ または $(\sqrt{3}, -1)$

151

(1) 直線 $y = 2x - 1$ 上の任意の点 $P(x, 2x - 1)$ の f による像を $P'(x', y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 4x - 2 \\ 3x + 4x - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x - 2 \\ 7x - 2 \end{pmatrix} \quad \textcircled{7}$$

よって、 $x' = 8x - 2$, $y' = 7x - 2$

よって、 $7x' = 56x - 14$, $8y' = 56x - 16$

これから x を消去すると $y' = \frac{7}{8}x' - \frac{1}{4}$

したがって、 f による像は 直線 $y = \frac{7}{8}x - \frac{1}{4}$

$$(2) \textcircled{7} \text{ より } \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - y' \\ -\frac{3}{2}x' + 2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

この点が $y = 2x - 1$ 上にあるので $-\frac{3}{2}x' + 2y' = 2 \cdot (x' - y') - 1$ が成り立つ。

よって $-\frac{7}{2}x' + 4y' = -1$ つまり $y' = \frac{7}{8}x' - \frac{1}{4}$, よって答は $y = \frac{7}{8}x - \frac{1}{4}$

152 曲線 $\frac{x^2}{2} + \frac{5y^2}{2} = 1$ 上の点 $P(x, y)$ を原点 O を中心として $\frac{\pi}{6}$ 回転した点を $P'(x', y')$ とすると,

点 P' を O を中心として $-\frac{\pi}{6}$ 回転した点が P であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

すなわち
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y') \\ y = \frac{1}{2}(-x' + \sqrt{3}y') \end{cases}$$

$\frac{x^2}{2} + \frac{5y^2}{2} = 1$ に代入して

$$\frac{(\sqrt{3}x' + y')^2}{8} + \frac{5(-x' + \sqrt{3}y')^2}{8} = 1 \quad 3x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + y'^2 + 5(x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2) = 8$$

整理して $x'^2 - \sqrt{3}x'y' + 2y'^2 = 1$

よって, 求める曲線の方程式は $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 1$

B 問題

153 点 $P(x, y)$ の直線 $y = 2x$ に関する対称点を $P'(x', y')$ とする。

PP' の中点 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2} \right)$ は直線 $y = 2x$ 上にあるから

$$\frac{y+y'}{2} = 2 \times \frac{x+x'}{2} \quad \text{より} \quad 2x' - y' = -2x + y \quad \dots \textcircled{1}$$

直線 PP' と直線 $y = 2x$ は直交するから,

$$\text{傾きについて} \quad \frac{y-y'}{x-x'} \times 2 = -1 \quad \text{より} \quad x' + 2y' = x + 2y \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{よって} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より,}$$

$$\text{求める行列は} \quad \frac{1}{2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

〈別解〉

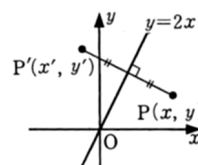
求める行列を

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと, これは $(1, 2)$ を $(1, 2)$ に $(2, -1)$ を $(-2, 1)$ にうつすので

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{である。}$$

$$\begin{aligned} \text{従って} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{-1-4} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



(1) f を表す行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{より} \quad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ kt \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{cases} 2 + \sqrt{2}t = k & \cdots \text{①} \\ \sqrt{2} + 3t = kt & \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①} \times t - \text{②} \quad \text{より} \quad \sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0$$

$$(\sqrt{2}t + 1)(t - \sqrt{2}) = 0 \quad \therefore \quad t = \sqrt{2}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t = \sqrt{2} \quad \text{のとき} \quad k = 4, \quad t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{のとき} \quad k = 1$$

$$\text{よって} \quad (k, t) = (4, \sqrt{2}), \quad \left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$155 \quad f \text{ を表す行列は} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g \text{ を表す行列は} \quad \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f \text{ を表す行列は} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

よって、点 $(1, 3)$ の像は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \text{点}(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$$

(1) $g \circ f$ を表す行列は

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって、点 $(1, -2)$ は $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ より、点 $(-4, 1)$ へ移る。

(2) $(g \circ f)^{-1}$ を表す行列は $(BA)^{-1}$

行列 BA について

$$A = (-2) \times 0 - 1 \times 1 = -1 \quad \text{より} \quad (BA)^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって、点 $(1, -2)$ は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ より、点 $(-2, -3)$ へ移る。

(3) $f^{-1} \circ g^{-1}$ の表す行列は $A^{-1}B^{-1}$

行列 A について

$$A = 2 \times 2 - (-1) \times (-3) = 1 \quad \text{より} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

行列 B について

$$A = (-1) \times 1 = -1 \quad \text{より} \quad B^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって} \quad A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)より、点 $(1, -2)$ は点 $(-2, -3)$ へ移る。

(注意) 教科書 P.83 の公式 $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$ を用いると(3)の答は(2)と同じであることがすぐわかる。

157 直線 $y = mx$ 上の任意の点を $P(t, mt)$ とおく。

点 P の像を $P'(x', y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ mt \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{cases} x' = (1+4m)t \\ y' = (2-m)t \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

点 P' はつねに直線 $y = x$ 上にあるから $y' = x'$ $\dots \textcircled{2}$

①を②に代入して $(2-m)t = (1+4m)t$

$$\therefore (5m-1)t = 0$$

これが、任意の実数 t について成り立つときだから

$$5m-1=0 \quad \therefore m = \frac{1}{5}$$

158 直線 $x + 2y = 1$ 上の任意の点を $P(1 - 2t, t)$ とし、点 P の f による像を $P'(x', y')$ とする。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a - 2)t + 1 \\ 2(1 - b)t + b \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{cases} x' = (a - 2)t + 1 & \dots \textcircled{1} \\ y' = 2(1 - b)t + b & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

点 P' はつねに直線 $2x - y = 3$ 上にあるから $2x' - y' = 3$

①, ②を代入して

$$2(a - 2)t + 2 - 2(1 - b)t - b = 3$$

$$2(a + b - 3)t - b - 1 = 0$$

これが、任意の実数 t についてつねに成り立つときだから

$$a + b - 3 = 0 \quad \text{かつ} \quad -b - 1 = 0 \quad \therefore \quad a = 4, \quad b = -1$$

159

(1) f を表す行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{より}$$

$$2a - b = 4 \quad a + b = -1$$

$$2c - d = 1 \quad c + d = 5$$

これらを解いて $a = 1, \quad b = -2, \quad c = 2, \quad d = 3$

よって、 f を表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(別解) f を表す行列を T とおくと

$$T \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{より}$$

$$T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{である。}$$

ここで $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ だから、①の両辺の右側からこの行列を掛けると

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 直線 AB の方程式は $y = -2x + 3$ だから、直線 AB 上の点を

$P(t, -2t + 3)$ とおき、その像を $P'(x', y')$ とすると、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -2t + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t - 6 \\ -4t + 9 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{cases} x' = 5t - 6 & \dots \textcircled{1} \\ y' = -4t + 9 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②より t を消去すると $4x' + 5y' = 21$

よって、直線 $4x + 5y - 21 = 0$ 上に移る。

(別解)

直線 AB は方向ベクトル $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で B を通るので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+2t \end{pmatrix} \quad \text{と表せる。}$$

$$f \text{ でうつすと } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t-3-4t \\ 2-2t+3+6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-5t \\ 5+4t \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } \begin{cases} 4x' = -4 - 20t \\ 5y' = 25 + 20t \end{cases} \quad \text{従って } 4x' + 5y' = 21$$

つまり直線 $4x + 5y = 21$ に移る。

$$(1) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2)

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos\left(n \times \frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(n \times \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(n \times \frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(n \times \frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \quad \text{であるから, } A^n = E \quad \text{となるためには}$$

$$n \times \frac{\pi}{6} = 2\pi \times m \quad (m \text{ は整数}) \quad \text{よって } n = 12m$$

最小の自然数 n は、 $m = 1$ のときであるから $n = 12$

(3) (2)より, $A^{12} = E$ であるから

$$\begin{aligned} A^{100} &= A^{12 \times 8} \times A^4 \\ &= E^8 \times A^4 = A^4 \end{aligned}$$

ここで

$$A^4 = \begin{pmatrix} \cos\left(4 \times \frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(4 \times \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(4 \times \frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(4 \times \frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2}{3}\pi & -\sin \frac{2}{3}\pi \\ \sin \frac{2}{3}\pi & \cos \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

求める点を $P(x', y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{100} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

すなわち, 求める点は $\left(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(別解)

$$A^{100} = \begin{pmatrix} \cos\left(100 \times \frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(100 \times \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(100 \times \frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(100 \times \frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}$$

ここで

$$100 \times \frac{\pi}{6} = 2\pi \times 8 + \frac{2}{3}\pi \quad \text{であるから}$$

$$A^{100} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2}{3}\pi & -\sin \frac{2}{3}\pi \\ \sin \frac{2}{3}\pi & \cos \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

求める点を $P(x', y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{100} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

すなわち, 求める点は $\left(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

161 動かされない点を $P(x, y)$ とすると

$$\begin{pmatrix} k & 2 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

①が $x = y = 0$ 以外の解をもつのは $\begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ の逆行列が存在しないときだから

$$A = (k-1) \cdot k - 2 \cdot 1 = 0 \quad \text{より} \quad k^2 - k - 2 = 0$$

$$(k-2)(k+1) = 0 \quad \therefore k = 2, -1$$

これらを①に代入すると

$$k = 2 \quad \text{のとき} \quad x + 2y = 0 \quad \text{つまり} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} \quad (t \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数}) \text{ は不動点である。}$$

$$k = -1 \quad \text{のとき} \quad x - y = 0 \quad \text{つまり} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \quad (s \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数}) \text{ は不動点である。}$$

となり条件をみたす。

よって $k = 2, -1$

162

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, さらに, 曲線上の点 $P(x, y)$ を移した点を $P'(x', y')$ とすると,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より逆変換を考えると} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\text{すなわち} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}(x' + y') \\ y = -y' \end{cases}$$

$9x^2 + 6xy + 2y^2 = 1$ に代入して

$$9 \left\{ \frac{1}{3}(x' + y') \right\}^2 + 6 \times \frac{1}{3}(x' + y') \times (-y') + 2(-y')^2 = 1$$

$$x'^2 + 2x'y' + y'^2 + 2(-x'y' - y'^2) + 2y'^2 = 1$$

整理して $x'^2 + y'^2 = 1$

よって, 求める曲線の方程式は $x^2 + y^2 = 1$

(1) 点 P の座標を (x, y) とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{で} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{だから}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 点 P は $(2, -1)$ である。

(2) 2 点 P, P' の座標をそれぞれ $(x, y), (x', y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

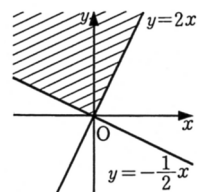
$$\text{すなわち} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' \\ y = -\frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' \end{cases}$$

点 P は第 1 象限の点だから $x > 0, y > 0$ より

$$\frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' > 0 \quad \text{かつ} \quad -\frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' > 0$$

$$\therefore y' > -\frac{1}{2}x', \quad y' > 2x'$$

よって $P'(x', y')$ の存在領域は図の斜線の部分で境界は除く。



4章 行列の応用

2節 固有値と対角化

A 問題

164

$$(1) \quad |A - \lambda E| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 6\lambda + 5) + 3$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0 \quad \text{より}$$

固有値は $\lambda = 4, 2$

(i) $\lambda = 4$ に属する固有ベクトルを求める。

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 4x \\ x + 5y = 4y \end{cases} \quad \text{よって} \quad y = -x$$

$$\text{従って} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

(ii) $\lambda = 2$ に属する固有ベクトルを求める。

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 2x \\ x + 5y = 2y \end{cases} \quad \text{よって} \quad x = -3y$$

$$\text{従って} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\beta \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$(2) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \quad \text{より}$$

固有値は $\lambda = 1, 2, 3$

(i) $\lambda = 1$ に属する固有ベクトルを求める。

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x \\ 2y = y \\ 3z = z \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} x \text{ は任意} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{従って} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

(ii) $\lambda = 2$ に属する固有ベクトルを求める。

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2x \\ 2y = 2y \\ 3z = 2z \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y \text{ は任意} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{従って} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

(iii) $\lambda = 3$ に属する固有ベクトルを求める。

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 3x \\ 2y = 3y \\ 3z = 3z \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \text{は任意} \end{cases}$$

$$\text{従って} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (\gamma \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$(3) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \{ (2-\lambda)^2 - 1 \} = (1-\lambda)^2 (3-\lambda) = 0 \quad \text{より}$$

固有値は $\lambda = 1, 3$

(i) $\lambda = 1$ に属する固有ベクトルを求める。

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = x \\ x + 2y = y \\ x + y + z = z \end{cases} \quad \text{よって} \quad y = -x$$

$$\text{従って} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (\alpha, \gamma \text{ は任意数。ただし } \alpha \text{ と } \gamma \text{ が同時に } 0 \text{ となる場合を除く})$$

164 (3)つづき

(ii) $\lambda = 3$ に属する固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3x \\ x + 2y = 3y \\ x + y + z = 3z \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

$$\text{従って} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

165

$$(1) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 2, 3$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{cases} -3y = 2x \\ 2x + 5y = 2y \end{cases} \quad \text{よって} \quad 3y = -2x \quad y = -\frac{2}{3}x$$

$$\text{従って} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{cases} -3y = 3x \\ 2x + 5y = 3y \end{cases} \quad \text{よって} \quad y = -x$$

$$\text{従って} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$(i) \text{で } \alpha = 1 \quad (ii) \text{で } \beta = 1 \quad \text{とし、並べて} \quad P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とすると} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\{(1-\lambda)^2 - 1\} = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) = 0 \quad \text{より}$$

$$\lambda = 0, 1, 2$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \quad \begin{cases} x+y+z=x \\ x+y+z=y \\ z=z \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ -\beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$(iii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \quad \begin{cases} x+y+z=2x \\ x+y+z=2y \\ z=2z \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

(α, β, γ は 0 以外の任意数)

ここで, $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$ として並べたものを

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{として} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & 5 \\ -3 & 2-\lambda & -3 \\ -7 & 1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & 5 \\ -3 & 2-\lambda & -3 \\ -1-\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \quad \text{より}$$

$$\lambda = -1, 1, 2$$

(2)と同様にして固有ベクトルを求めると

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$(iii) \quad \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

ここで, $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$ としたものを並べた行列を P とおくと,

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \quad \begin{cases} 2x + y = x \\ -x = y \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

1 次独立なベクトルが 1 個しかとれないので対角化不可能である。

$$(2) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ = (1-\lambda) \{ (2-\lambda)^2 - 1 \} = (1-\lambda)^2 (3-\lambda) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 1, 3$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (\beta, \gamma \text{ は同時には } 0 \text{ でない任意数})$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

(i) で $\beta = 1, \gamma = 0$ としたもの,

$\beta = 0, \gamma = 1$ としたもの,

(ii) で $\alpha = 1$ としたものを並べて

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とおくと,} \quad |P| = 2 \neq 0 \quad \text{で } P \text{ は正則行列となり,} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 3-\lambda \\ 1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ = (3-\lambda) \{ (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 \} = (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-2) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 2, 3$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

(i)(ii) より 1 次独立なベクトルが 2 個しかとれないので対角化不可能である。

$$(1) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda-2) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 0, 2$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$\text{よって} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{とおいたものを並べて} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$P \text{ は直交行列で, } {}^t P A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = (\lambda-4)(\lambda-2) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 2, 4$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$\text{よって} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{とおいたものを並べて} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$P \text{ は直交行列で, } {}^t P A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = -1, 4$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$\text{よって} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{とおいたものを並べ} \quad P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$P \text{ は直交行列で, } {}^t P A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)\lambda = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 0, 1, 2$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{とおいたものを並べ} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$P \text{ は直交行列で } {}^t P A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = -2, 1, 2
 \end{aligned}$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$(iii) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{とおいたものを並べ} \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$P \text{ は直交行列で } {}^t P A P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)\lambda^2 = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 0, 3
 \end{aligned}$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha - \beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は同時には } 0 \text{ でない任意数})$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (\gamma \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$(i) \text{ で } \alpha = 1, \beta = 0 \text{ としたものを } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, (i) \text{ で } \mathbf{x}_1 \text{ と直交するものを } \mathbf{x}_2 \text{ としたいので}$$

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha - \beta \end{pmatrix} = \alpha + \alpha + \beta = 0 \quad \text{として} (i) \text{ で } \alpha = 1, \beta = -2 \text{ としたものを } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \text{ で } \gamma = 1 \text{ としたものを } \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とすると, } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \text{ は互いに直交する。}$$

それぞれ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍, $\frac{1}{\sqrt{6}}$ 倍, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍して大きさを 1 にしたものを並べ

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ とすると, } {}^t P A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 2, 3$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -2\beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$\alpha = 1, \beta = -1 \text{ としたものを並べて } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ とおくと } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}AP)^n = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{n\text{回}} = P^{-1}A^nP \quad \text{より}$$

$$A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 1, 2$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\beta \\ 3\beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$\alpha = 1, \beta = 1 \text{ としたものを並べて } P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ とおくと } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP \quad \text{より}$$

$$A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 & 2^{n+1} - 2 \\ -3 \cdot 2^n + 3 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = -1, 1$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$\alpha = 1, \beta = 1 \text{ としたものを並べて } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおくと } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP \quad \text{より}$$

$$A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 1 & (-1)^{n+1} + 1 \\ (-1)^{n+1} + 1 & (-1)^n + 1 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad 5x^2 + 8xy + 5y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

ここで $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の対角化を考える。

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-9) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 1, 9$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ として並べたものを $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと P は直交行列で

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} {}^t P$$

従って⑦は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left({}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{即ち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{とおく} \quad \cdots \cdots \textcircled{8} \right) \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'^2 + 9y'^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって与式は } \textcircled{8} \text{ より} \quad {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{とおくと}$$

$x'^2 + 9y'^2 = 9$ (楕円) となる。つまり、与式は原点に対し $\frac{\pi}{4}$ 回転すると楕円 $\left(\frac{x'}{3}\right)^2 + y'^2 = 1$ にな

るような楕円である。言い換えれば $\left(\frac{x'}{3}\right)^2 + y'^2 = 1$ を原点のまわりに $-\frac{\pi}{4}$ 回転して得られる楕円が与式の表す図形である。

$$(2) \quad 3x^2 + 10xy + 3y^2 = -8 \quad \text{の}$$

$$\text{左辺} = (x \ y) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ の対角化を考える。

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 8)(\lambda + 2) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = -2, 8$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ としたものを並べて $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると P は直交行列で

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} {}^t P$$

$$\text{よって } \textcircled{7} \text{ は } (x \ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \left({}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left({}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \quad \text{即ち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{とおく} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$= (x' \ y') \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -2x'^2 + 8y'^2$$

$$\text{よって与式は } \textcircled{8} \text{ より} \quad {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{とおくと}$$

$-2x'^2 + 8y'^2 = -8$ になる。つまり与式は原点に対し $\frac{\pi}{4}$ 回転すると $\frac{x'^2}{4} - y'^2 = 1$ (双曲線) となるよ

うな双曲線を表している。言い換えれば 与式は双曲線 $\left(\frac{x'}{2}\right)^2 - y'^2 = 1$ を原点のまわりに $-\frac{\pi}{4}$ 回転し

て得られる双曲線を表す。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ 5-\lambda & 3-\lambda & 1 \\ 5-\lambda & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (5-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 1, 5
 \end{aligned}$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha - 2\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(α, β は同時には 0 でない任意数)

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

(γ は 0 以外の任意数)

(i) で $\alpha = 1, \beta = 0$, (i) で $\alpha = 0, \beta = 1$

(ii) で $\gamma = 1$ としたものを並べて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \quad P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \text{より} \quad P \text{ は正則で}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \{ (4-\lambda)(2-\lambda) - 8 \} \\
 &= -\lambda^2 (\lambda - 6) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 0, 6
 \end{aligned}$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\alpha + \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\gamma \\ -\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は同時には } 0 \text{ でない任意数})$$

(i) で $\alpha = 1, \beta = 0$, (i) で $\alpha = 0, \beta = 1$ (γ は 0 以外の任意数)

(ii) で $\gamma = 1$ としたものを並べて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \quad |P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \quad \text{より} \quad P \text{ は正則で}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & 3 \\ -2-\lambda & -5-\lambda & 3 \\ 0 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (-2-\lambda)^2 (4-\lambda) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = -2, 4
 \end{aligned}$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(α, γ は同時には 0 でない任意数)

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$$

(i) で $\alpha = 1, \gamma = 0$, (i) で $\alpha = 0, \gamma = 1$ (β は 0 以外の任意数)

(ii) で $\gamma = 1$ としたものを並べて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \quad |P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{より} \quad P \text{ は正則で}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -3-\lambda & -3-\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -3+\lambda & 3-\lambda & 0 \\ -3-\lambda & -3-\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (3-\lambda)(-3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (3-\lambda)^2(-3-\lambda) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = -3, 3
 \end{aligned}$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(β, γ は同時には 0 でない任意数)

$$(i) \text{ で } \alpha = 1 \text{ としたものを } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (ii) \text{ で } \beta = 1, \gamma = 0 \text{ としたものを } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とおく。}$$

$\lambda = 3$ に属する固有ベクトルのうち $\mathbf{x}_2$ と直交するもの $\mathbf{x}_3$ を見つける為に

$$\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \beta + \gamma + \beta = 0$$

$$\text{とすると, (ii) で } \beta = 1, \gamma = -2 \text{ として } \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ にすればよいと分かる。}$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ は互いに直交するので, これらをそれぞれ大きき 1 に縮めたもの}$$

を並べて P とすると

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ は直交行列で } {}^t P A P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ である。}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -1-\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (-1-\lambda)^2 (5-\lambda) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = -1, 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\quad (\alpha, \gamma \text{ は同時には } 0 \text{ でない任意数}) \\
 \alpha = 1 \quad \gamma = 0 \quad \text{として} \quad \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha + \alpha + \gamma = 0 \quad \text{となるように } \alpha = 1, \gamma = -2 \text{ とおいて}$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} \quad (\beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$\beta = 1 \quad \text{として} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ は互いに直交するので、それぞれの大きさを 1 に縮めたものを並べて

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ とすると } P \text{ は直交行列となり } {}^t P A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2+2\lambda \\ 4 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 10 & 4-\lambda & 0 \\ 4 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (-1-\lambda) \{ (3-\lambda)(4-\lambda) - 20 \} \\
 &= -(\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = -1, 8
 \end{aligned}$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \\ 2\beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \gamma \text{ は同時には } 0 \text{ でない任意数})$$

$$(i) \text{ で } \alpha = 2, \gamma = -1 \text{ としたものを } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ とし}$$

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = 2\alpha + 4\alpha + 4\gamma - \gamma = 6\alpha + 3\gamma = 0 \quad \text{となるように } \alpha = 1, \gamma = -2 \text{ とおい}$$

$$\text{たものを } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ とする。} (ii) \text{ で } \beta = 1 \text{ としたものを } \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ とする。} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \text{ は互いに直交}$$

するので、それぞれの大きさを 1 に縮めたものを並べて

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ とすると } P \text{ は直交行列となり } {}^t P A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(別解)

グラム・シュミットの直交化法

160(1), (2), (3)においては, 固有値が固有方程式の重解であるとき, その固有ベクトルとして互いに直交し, 大きさ 1 のベクトルを構成した。一般に「 n コの 1 次独立なベクトルの組」から「 n コの互いに直交し各々の大きさが 1 のベクトルの組」を構成するグラム・シュミットの直交化法と呼ばれる方法がある。構成の手順は以下の通りである。一次独立なベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ に対し

$$\textcircled{1} \quad \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \mathbf{P}_1 \quad \text{とおくと} \quad \mathbf{P}_1 \text{ は大きさ 1 である。}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \alpha_1 \quad \text{を求め} \quad \mathbf{a}_2 - \alpha_1 \mathbf{P}_1 = \mathbf{x}_2 \quad \text{とおくと} \quad \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{a}_2 - \alpha_1 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_1 = \alpha_1 - \alpha_1 |\mathbf{P}_1|^2 = 0$$

つまり $\mathbf{P}_1$ と $\mathbf{x}_2$ は直交する。

$$\frac{\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2|} = \mathbf{P}_2 \quad \text{とおくと} \quad \mathbf{P}_2 \text{ は大きさ 1 で} \quad \mathbf{P}_1 \text{ と直交するベクトルである。}$$

$$\textcircled{3} \quad \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = \beta_1, \quad \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \beta_2 \quad \text{を求め} \quad \mathbf{a}_3 - \beta_1 \mathbf{P}_1 - \beta_2 \mathbf{P}_2 = \mathbf{x}_3 \quad \text{とおくと}$$

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{x}_3 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{a}_3 - \beta_1 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_1 - \beta_2 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = \beta_1 - \beta_1 - 0 = 0$$

同様に $\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{x}_3 = \beta_2 - 0 - \beta_2 = 0$ つまり $\mathbf{x}_3$ は $\mathbf{P}_1$ と $\mathbf{P}_2$ とともに直交する。

$$\frac{\mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_3|} = \mathbf{P}_3 \quad \text{とおくと} \quad \mathbf{P}_3 \text{ は大きさ 1 で,} \quad \mathbf{P}_1 \text{ と} \quad \mathbf{P}_2 \text{ とともに直交するベクトルである。}$$

$$\textcircled{4} \quad \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{a}_4 = \gamma_1, \quad \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{a}_4 = \gamma_2, \quad \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = \gamma_3 \quad \text{を求め} \quad \mathbf{a}_4 - \gamma_1 \mathbf{P}_1 - \gamma_2 \mathbf{P}_2 - \gamma_3 \mathbf{P}_3 = \mathbf{x}_4, \quad \frac{\mathbf{x}_4}{|\mathbf{x}_4|} = \mathbf{P}_4 \quad \text{とおく。}$$

⋮

同様の操作を繰り返して, 互いに直交し, 大きさ 1 であるような n コのベクトルの組を得る。

171 (2) (i) に以上の方法を適用してみよう。

$\alpha = 1, \gamma = 0$ としたものを $\mathbf{a}_1$, $\alpha = 0, \gamma = 1$ としたものを $\mathbf{a}_2$ とすると

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は一次独立である。

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \alpha_1$$

$$\mathbf{a}_2 - \alpha_1 \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_2 \quad \text{とおく。}$$

$$\text{さらに} \quad \frac{\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_2 \quad \text{とおく。}$$

$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ は, 互いに直交し, 大きさが 1 のベクトルである。

$$\begin{aligned}
 172 \quad |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = ad - (a + d)\lambda + \lambda^2 - b^2 \\
 &= \lambda^2 - (a + d)\lambda - b^2 + ad = 0
 \end{aligned}$$

とするとこの 2 次方程式の解の判別式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 D &= (a + d)^2 - 4(-b^2 + ad) = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4b^2 \\
 &= (a - d)^2 + 4b^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

よって A の固有方程式の解は実数である。

つまり 2 対称行列の固有値は実数である。

173

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y \\
 &= (x \ y) \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2x - 2\sqrt{3}y \\
 &\quad \left(A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \right) \text{とすると} \\
 & \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 4) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 0, 4 \\
 & \quad \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \sqrt{3}\alpha \end{pmatrix} \\
 & \quad \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\beta \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数}) \\
 & \quad \text{より} \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \\
 & \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{となるので} \quad A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} {}^tP \\
 &= (x \ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2x - 2\sqrt{3}y \\
 &= (x \ y) P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2x - 2\sqrt{3}y \\
 & \quad \left({}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \text{とおくと} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \therefore \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) = x' \\
 &= (x' \ y') \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 4x' \\
 &= 4y'^2 - 4x' = 0 \quad \text{よって} \quad x' = y'^2
 \end{aligned}$$

従って与式は放物線 $x' = y'^2$ を原点中心に $\frac{\pi}{3}$ 回転して得られる図形。

(2) (1)と同様にして、与式は

$$x^2 - 2xy + y^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y \quad \left(A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{とおくと固有値は } \lambda = 0, 2 \right)$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y$$

$$\left(\begin{array}{l} P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \text{とおくと} \\ {}^t P A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{となるので } A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} {}^t P \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} {}^t P - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y$$

$$\left({}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{とおくと } \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = x' \right)$$

$$= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 2x'$$

$$= 2y'^2 - 2x' = 0 \quad \text{よって} \quad x' = y'^2$$

従って与式は放物線 $x' = y'^2$ を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転して得られる図形。

(3) (1)と同様にして与式は

$$\begin{aligned}
& 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x - 2\sqrt{3}y \\
&= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2x - 2\sqrt{3}y \quad \left(A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \text{とおくと固有値は } \lambda = 4, 0 \right) \\
&= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2x - 2\sqrt{3}y \\
&\quad \left(\begin{array}{l} P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}, \\ \text{とおくと } {}^t P A P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{となるので } A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t P. \end{array} \right) \\
&= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2x - 2\sqrt{3}y \\
&\quad \left({}^t P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{とおくと } \frac{-1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = y' \text{となる。} \right) \\
&= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 4y' = 4x'^2 - 4y' = 0 \quad \text{よって} \quad y' = x'^2
\end{aligned}$$

従って与式は放物線 $x'^2 = y'$ を原点中心に $\frac{\pi}{6}$ 回転して得られる図形。

$$(1) \quad \text{与式} = x^2 - 2xy - 2xz - 2yx + y^2 - 2yz - 2zx - 2zy + z^2$$

$$= (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (171(1)のPを使って)$$

$$= (x \ y \ z) P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left({}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{とおく} \cdots \textcircled{*} \right)$$

$$= -3x'^2 + 3y'^2 + 3z'^2$$

$$(2) \quad \text{与式} = x^2 - 2xy - 2xz - 2yx + y^2 - 2yz + 2zx - 2zy + z^2$$

$$= (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (171(2)のPを使って)$$

$$= (x \ y \ z) P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

((1)の $\textcircled{*}$ の変換により)

$$= -x'^2 - y'^2 + 5z'^2$$

(1) 与式の漸化式は

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\
&\left(168(1) \text{の} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^n \text{を利用すると} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 2^n \\ -2^{n+1} + 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{よって } a_n &= 2^n - 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} = 2^{n-1} \\
b_n &= -2^n + 2^{n-1} = -2 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1} = -2^{n-1}
\end{aligned}$$

(2) 与式の漸化式は

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\
&\left(168(2) \text{の} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^n \text{を利用して} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 & 2^{n+1} - 2 \\ -3 \cdot 2^n + 3 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2^{n+1} \\ -3 \cdot 2^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{よって } a_n &= 3 \cdot 2^{n-1} - 2^n = 2^{n-1} \\
b_n &= -3 \cdot 2^{n-1} + 2^n = -2^{n-1}
\end{aligned}$$

(1) ケーリー・ハミルトンの定理から

$$A^2 - (0+a)A + (0 \cdot a + 1)E = O \quad \text{で} \quad A^2 - aA + E = O \quad \therefore \quad A^2 = aA - E$$

$$A^2 + A + E = O \quad \text{に代入して}$$

$$aA - E + A + E = O \quad \therefore \quad (a+1)A = O$$

$$A \not\cong O \quad \text{なので} \quad a = -1$$

$$(2) \quad A^3 - E = (A - E)(A^2 + A + E) \quad \text{より} \quad A^3 - E = O \quad \therefore \quad A^3 = E$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad \text{与式} &= E + A + A^2 + A^3(E + A + A^2) + A^6(E + A + A^2) + (A^3)^3 + (A^3)^3 A \\
&= E^3 + E^3 A = E + A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

177 A の固有多項式は

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -4-\lambda & 5 \\ 2 & 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & -9-\lambda & 9+\lambda \\ 2 & 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9+\lambda \\ 2 & 1-\lambda & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(9+\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 8 - 8) \\ &= -(9+\lambda)\lambda(\lambda - 9) = -\lambda(\lambda^2 - 81) = -\lambda^3 + 81\lambda \quad \dots\dots ㉞ \end{aligned}$$

ケーリー・ハミルトンの定理より

$$-A^3 + 81A = O \quad \text{よって} \quad 2A = A^3 - 79A$$

$$\text{従って 与式} = 2A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 10 \\ 4 & 10 & -8 \end{pmatrix}$$

178

$$(1) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 + 3 = (\lambda - 2)(\lambda + 4) = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 2, 4 \text{ であり,}$$

与式に対応する多項式が

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \quad \text{なので与式の固有値は}$$

$$f(2) = 4 - 12 + 5 = -3, \quad f(4) = 16 - 24 + 5 = -3 \quad \text{より} \quad -3 \text{ である。}$$

(2) 与式に対応する多項式が

$$f(x) = x^3 - 8 \quad \text{なので与式の固有値は}$$

$$f(2) = 0 \quad \text{と} \quad f(4) = 64 - 8 = 56 \quad \text{である。}$$

179 177 詳解㉞式より A の固有値は $\lambda = 0, -9, 9$ で

$$\text{与式に対応する多項式は} \quad f(x) = x^2 - 9 \quad \text{なので}$$

$$\text{与式の固有値は} \quad f(0) = -9, \quad f(9) = 72, \quad f(-9) = 72 \quad \text{より} \quad -9 \text{ と } 72 \text{ である。}$$

180 与式に対応する多項式は $f(x) = x^m$ である。今 A の固有値が $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ だとすると

$$A^m \text{ の固有値は } \lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m \text{ である。 (フロベニウスの定理より)}$$

$$\text{一方 } A^m = O \quad \text{より } A^m \text{ の固有値は } 0. \text{ よって } \lambda_1^m = 0, \lambda_2^m = 0, \lambda_3^m = 0 \text{ となり}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \text{である。}$$

$$(1) \quad a_1 = a_2 = 1 \text{ より } a_3 = a_2 + a_1 = 2, \quad a_4 = a_3 + a_2 = 3, \quad a_5 = a_4 + a_3 = 5 \\ a_6 = a_5 + a_4 = 8, \quad a_7 = a_6 + a_5 = 13, \quad a_8 = a_7 + a_6 = 21 \\ a_9 = a_8 + a_7 = 34, \quad a_{10} = a_9 + a_8 = 55$$

$$(2) \quad a_{n+1} = b_n \text{ とおくと 与式は } b_{n+1} = b_n + a_n$$

$$\text{よって } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \text{ と表せるので } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ として } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

A^n は A の対角化を利用して求める。

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} (= \lambda_1, \lambda_2 \text{ とおく})$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda_1 \alpha \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda_2 \alpha \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ とすると } |P| = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0 \text{ より } P \text{ は正則であり } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ で}$$

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n & -\lambda_1^n + \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{-\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n \lambda_2 - \lambda_2^n \lambda_1 & -\lambda_1^n + \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} \lambda_2 - \lambda_2^{n+1} \lambda_1 & -\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (* \text{ より})$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n \lambda_2 - \lambda_2^n \lambda_1 - \lambda_1^n + \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} \lambda_2 - \lambda_2^{n+1} \lambda_1 - \lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

従って

$$a_{n+1} = \frac{1}{-\sqrt{5}} \left\{ \lambda_1^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 \right) + \lambda_2^n \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \right\} \\ = \frac{1}{-\sqrt{5}} \left\{ \lambda_1^n \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) + \lambda_2^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right\} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})$$

$$\text{つまり } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

(1) (i) $n = 2$ のとき

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\ &= \sum_{k=1}^2 a_{1k}b_{k1} + \sum_{k=1}^2 a_{2k}b_{k2} = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^2 a_{ik}b_{ki} \right) \end{aligned}$$

$$\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^2 b_{1i}a_{i1} + \sum_{i=1}^2 b_{2i}a_{i2} = \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^2 b_{ki}a_{ik} \right)$$

よって $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

(ii) $n = 3$ のときも同様

$$\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^3 a_{1k}b_{k1} + \sum_{k=1}^3 a_{2k}b_{k2} + \sum_{k=1}^3 a_{3k}b_{k3} = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 a_{ik}b_{ki} \right)$$

$$\text{tr}(BA) = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 b_{ki}a_{ik} \right) \quad \text{よって} \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

(参考) n が一般の場合も同様に

$$\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ik}b_{ki} \right)$$

$$\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{ki}a_{ik} \right) \quad \text{より} \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad \text{が成立する。}$$

(2) (i) $n = 2$ のとき

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad \cdots \textcircled{7}$$

一方、固有値が λ_1, λ_2 であるから

固有方程式は

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0 \quad \cdots \textcircled{8}$$

 $\textcircled{7}$ $\textcircled{8}$ の λ の1次項の係数を比較して $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$ (ii) $n = 3$ のとき 固有方程式はサラスの方法より

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\ = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - (a_{11} - \lambda)a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}(a_{33} - \lambda) - a_{13}a_{31}(a_{22} - \lambda) \\ = -\left\{ \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{22} + a_{23}a_{33} + a_{33}a_{11})\lambda - a_{11}a_{22}a_{33} \right\} \\ + (a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31})\lambda + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{31}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ = (-\lambda)^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 \\ + (a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{13}a_{31} + a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32})(-\lambda) + |A| = 0 \quad \cdots \textcircled{7}'$$

一方、固有値が $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ であるから

固有方程式は

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\lambda - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \quad \cdots \textcircled{8}'$$

 $\textcircled{7}'$ $\textcircled{8}'$ の2次の係数を比較して $a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

(参考) n が一般の場合も同様に固有方程式の2つの表し方において $(n-1)$ 次の項の係数を比較して与式を得る。

$$\text{(別解)} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{とすると} \quad \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(PP^{-1}A) = \text{tr}(A) \quad (182(1)\text{より})$$

$$\text{なので} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

(1) $n = 2$ のとき 182(2)㊦㊧の定数項を比較すると $|A| = \lambda_1 \lambda_2$

$n = 3$ のとき 182(2)㊦'㊧'の定数項を比較すると $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

(参考) n が一般の場合も同様、固有方程式 2 つの表し方において定数項を比較して与式を得る。

$$\begin{aligned}
 (2) \quad |A^3 + A^2| &= |A^2(A + E)| = |A^2| |A + E| = |A|^2 |A + E| \\
 &= (\lambda_1 \lambda_2)^2 \begin{vmatrix} a_{11} + 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + 1 \end{vmatrix} \quad (183(1)より) \\
 &= 4(a_{11}a_{22} + a_{11} + a_{22} + 1 - a_{12}a_{21}) \\
 &= 4(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2 + 1) \\
 &= 4(2 + 3 + 1) = 24 \quad (183(1), 182(2)より)
 \end{aligned}$$

184 A の固有値が $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ であるとする $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ である …㊦

$\lambda = \lambda_1$ に属する固有ベクトルで大きさ 1 のものを $\mathbf{x}_1$, $\lambda = \lambda_2$ に属する固有ベクトルで $\mathbf{x}_1$ と直交し、大きさ 1 のものを $\mathbf{x}_2$ とする。(171(3)の解答の方法などでこれは可能)

$P = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2)$ とおくと P は直交行列で tPAP の第 1 列である ${}^tP\mathbf{A}\mathbf{x}_1$ は

$${}^tP\mathbf{A}\mathbf{x} = {}^tP(\lambda_1 \mathbf{x}_1) = \lambda_1 {}^tP\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{x}_1 \\ {}^t\mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{であり} \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{の形である。}$$

$${}^tPAP \text{ の固有方程式は } \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & b_{12} \\ 0 & b_{22} - \lambda \end{vmatrix} \quad \cdots \text{㊦} \quad \text{であり} \quad {}^tPAP \text{ と } A \text{ の固有値が等しい (←教科書 p.192)}$$

節末問題 2) ので tPAP の固有値 b_{22} は λ_2 でないといけない。(㊦㊧より)

$$\text{よって} \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (=B \text{ とおく}) \quad (\text{これを } A \text{ の三角化という。}\cdots \text{㊦} \leftarrow \text{教科書 p.193})$$

今, $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ とおくと

$$\begin{aligned}
 {}^tP\varphi(A)P &= {}^tP(A^2 + aA + bE)P \\
 &= {}^tPA^2P + a {}^tPAP + b {}^tPEP \\
 &= ({}^tPAP)^2 + aB + bE = B^2 + aB + bE \\
 &= \varphi(B) \quad (\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)より) \\
 &= (B - \lambda_1 E)(B - \lambda_2 E) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \varphi(A) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(参考) 同じようにして n が一般の場合も証明できる。

185 A は 184⑦のように三角化できる。つまりある直交行列 P に対し ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdots \textcircled{7}$

の形にできる。今 $f(x) = ax^2 + bx + c$ だったとすると (n 次式のときも同様に示せる)

$$\begin{aligned} f({}^tPAP) &= a({}^tPAP)^2 + b({}^tPAP) + cE \\ &= a{}^tPA^2P + b{}^tPAP + c{}^tPEP \\ &= {}^tP(aA^2 + bA + cE)P = {}^tPf(A)P \quad \cdots \textcircled{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ところが } \textcircled{7} \text{ より } f({}^tPAP) &= a \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^2 + b \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\lambda_1 & bb_{12} \\ 0 & b\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c & (\lambda_1 + \lambda_2 + b)b_{12} \\ 0 & a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c \end{pmatrix} \cdots \textcircled{9} \\ &= \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & (\lambda_1 + \lambda_2 + b)b_{12} \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\textcircled{8} \textcircled{9} \text{ より } {}^tPf(A)P = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & (\lambda_1 + \lambda_2 + b)b_{12} \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix}$$

よって ${}^tPf(A)P$ の固有値は $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$ である。 ${}^tPf(A)P$ と $f(A)$ の固有値は等しい (←教科書 p.192

節末問題 2) ので $f(A)$ の固有値は $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$ である。(n が一般の場合も同様に証明できる)

4 章の問題

- 1 変換 $f \circ g$ の逆変換によるもとの像を求めることとなる。

$f \circ g$ を表す行列は

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

この行列について

$$\begin{aligned} |AB| &= (-3) \times (-1) - (-2) \times (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

より, $(f \circ g)^{-1}$ を表す行列は $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$(3, 2)$ に移されるもとの点は $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

- 2 原点を中心とする 30° の回転移動を表す行列を A とすると

$$A = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

また, 直線 $y = -x$ に関する対称移動は (x, y) が (x', y') にうつるとすると

$$\begin{cases} x' = -y = 0x - y \\ y' = -x = -x + 0y \end{cases} \quad \text{なので, この一次変換を表す行列を } B \text{ とすると } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

これら 2 つの移動の合成変換を表す行列 BA は

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

求める点を $P'(x', y')$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

すなわち, 求める点 P' の座標は $(-\sqrt{3}, -1)$

4 章の問題 つづき

$$\begin{aligned}
 3 \quad A^2 &= AA = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\
 A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^3 \theta - \sin^2 \theta \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos^2 \theta + \sin^3 \theta - 2 \sin \theta \cos^2 \theta \\ 2 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta + \sin \theta \cos^2 \theta & -2 \sin^2 \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^3 \theta - 3(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta & -3 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + \sin^3 \theta \\ 3 \sin \theta (1 - \sin \theta) - \sin^3 \theta & -3(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta + \cos^3 \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta & -3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \\ 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta & 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \end{pmatrix} \dots\dots ①
 \end{aligned}$$

一方、 A^3 は原点を中心とする 3θ の回転移動を表す行列であるから

$$A^3 = \begin{pmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix} \dots\dots ②$$

$$\begin{aligned}
 ①, ② \text{の成分を比較して} \quad & \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \\
 & \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta
 \end{aligned}$$

4

(1) $P(t, -2t+1)$, $P'(x', y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -2t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t-1 \\ t+1 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \text{点 } P \text{ の座標は } (4t-1, t+1)$$

(2) 点 $P'(x', y')$ において、(1)より $x' = 4t-1$, $y' = t+1$ だから、

この2式から t を消去して

$$x' - 4y' = -5 \quad \therefore \quad x' - 4y' + 5 = 0$$

よって、点 P' は直線 $x - 4y + 5 = 0$ をえがく。

5 平面上の任意の点を $P(x, y)$ とし、その像を $P'(x', y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{cases} x' = x + ay \\ y' = ax + by \end{cases} \dots\dots ①$$

点 $P'(x', y')$ は、つねに直線 $y = 2x$ 上にあるから $y' = 2x'$

①を代入して $ax + by = 2(x + ay)$ より

$$(a-2)x + (b-2a)y = 0$$

これが任意の実数 x, y について成り立つときだから

$$a-2=0 \quad \text{かつ} \quad b-2a=0 \quad \therefore \quad a=2, \quad b=4$$

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{となる} \quad (x, y) \text{を求める。}$$

$$\begin{pmatrix} 3x+2y \\ 2x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{これより} \quad \begin{cases} 3x+2y=x \\ 2x+3y=y \end{cases} \quad \therefore \quad x+y=0$$

となる点だから, $x=t$ とおくと $y=-t$

よって $(t, -t)$ (t は任意の実数)

(3)

$$(i) \text{ 直線 } x=c \text{ 上の点を } (c, t) \text{ とおくと } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c+2t \\ 2c+3t \end{pmatrix}$$

よって $t=-c$ 。ところが

$t \neq -c$ のとき $c \neq 3c+2t$ であるから, 直線 $x=c$ は自分自身に移されない。

(ii) 直線 $y=mx+n$ 上の点を $(t, mt+n)$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2mt+2n \\ 2t+3mt+3n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+2m)t+2n \\ (2+3m)t+3n \end{pmatrix}$$

これが, 直線 $y=mx+n$ 上の点に移るから

$$(2+3m)t+3n = m\{(3+2m)t+2n\}+n$$

$$(2+3m)t+3n = (3m+2m^2)t+2mn+n$$

$$(2m^2-2)t+2mn-2n=0 \quad 2(m-1)\{(m+1)t+n\}=0$$

$\therefore$ 「 $m=1$ で n は任意の実数」 または 「 $m=-1, n=0$ 」

よって $y=x+n$ (n は任意の実数), $y=-x$

$$(前半) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta - 2 \sin \theta \\ -2 \cos \theta + \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad Q \text{ の座標は } (\cos \theta - 2 \sin \theta, -2 \cos \theta + \sin \theta)$$

$$\text{よって, } y = -2 \cos \theta + \sin \theta = 1 \cdot \sin \theta + (-2) \cos \theta = \sqrt{5} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\left(\text{ただし } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{2} \pi < \alpha < 2\pi \right)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ のとき } \alpha \leq \theta + \alpha \leq \pi + \alpha$$

$$\sin(\alpha) \leq \sin(\theta + \alpha) \leq \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore -\frac{2}{\sqrt{5}} \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1 \quad \text{よって} \quad -2 \leq y \leq \sqrt{5}$$

$$(後半) \quad \overrightarrow{OP} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \overrightarrow{OQ} = (\cos \theta - 2 \sin \theta, -2 \cos \theta + \sin \theta)$$

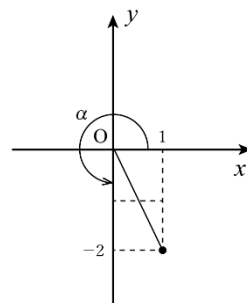
$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \cos \theta (\cos \theta - 2 \sin \theta) + \sin \theta (-2 \cos \theta + \sin \theta)$$

$$= \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \sin 2\theta = 0 \quad \text{より}$$

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2} \quad (0 \leq 2\theta \leq 2\pi)$$

$$\therefore 2\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \quad \text{よって} \quad \theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi$$



4章の問題

8 ②と⑤が誤り。

① $A - E$ は $f(x) = x - 1$ とおくと $f(A) = A - E$ なので

固有値は $f(1) = 0$, $f(2) = -1$ (問題 177 の次の例題 13 フロベニウスの定理より)。

よって問題 184 より $|A - E| = 0 \times 1$ 従って $|A - E| = 0$ は正しい。

(別解)

A の固有方程式は λ の 2 次方程式 $|A - \lambda E| = 0$ だが、今 $\lambda = 1$ がその解の一つなので

$$|A - 1E| = |A - E| = 0$$

② $A + E$ は $f(x) = x + 1$ とおくと $f(A)$ なので

固有値は $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ (問題 177 の次の例題 13 フロベニウスの定理より)。

よって問題 183(1)より $|A + E| = 2 \times 3$ 従って $|A + E| = 0$ は誤り。

(別解)

A の固有方程式は λ の 2 次方程式 $|A - \lambda E| = 0$ だが、これが成立するのは $\lambda = 1, 2$ のみなので

$$\lambda = -1 \text{ を代入すると } |A + E| \neq 0$$

③ 1 に属する固有ベクトルを $\mathbf{P}_1$, 2 に属する固有ベクトルを $\mathbf{P}_2$ とするとき $P = (\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2)$ とすれば A は与式のように対角化されるので、③は正しい。

④ $A - 2E$ は $f(x) = x - 2$ とおくと $f(A) = A - 2E$ なので

固有値は $f(1) = -1$, $f(2) = 0$ (問題 177 の次の例題 13 フロベニウスの定理より)。

よって問題 183(1)より $|A - 2E| = (-1) \times 0 = 0$ 。

よって $A - 2E$ は逆行列をもたない。従って④は正しい。

(別解)

A の固有方程式は λ の 2 次方程式 $|A - \lambda E| = 0$ だが、 $\lambda = 2$ はその解の一つなので

$$|A - 2E| = 0 \text{ よって } A - 2E \text{ は逆行列をもたない。}$$

⑤ 与式は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ なので $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は固有値 1 に属する固有ベクトルである。従って、与式をみたす x, y の組は無数にある。よって⑤は誤り。

9 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ が成立するので

$$12 - 4 = 4\lambda \quad \text{よって } \lambda = 2。$$

$$-4 - a = -\lambda \quad \text{よって } a = -2。$$

従って、(1), (2)の答は各々 2, -2。

4章の問題 つづき

10

(1) 問題 183 の公式より $a + a = \lambda - 2 \quad \cdots \textcircled{7}$

問題 184 の公式より $a^2 - 25 = -2\lambda \quad \cdots \textcircled{8}$

(ただし, λ はもう 1 つの固有値。) $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ より

a を消去して $\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 100 = -8\lambda$ 。

よって $(\lambda - 8)(\lambda + 12) = 0$

$a > 0$ の仮定と $\textcircled{7}$ より $\lambda = 8$

(別解)

固有方程式は $\begin{vmatrix} a - \lambda & 5 \\ 5 & a - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)^2 - 25 = 0 \quad \cdots \textcircled{9}$

$\lambda = -2$ はその一つの解なので $\lambda = -2$ を代入して $(a + 2)^2 - 25 = 0$ が成り立つ。

$a + 2 = \pm 5$ だが $a > 0$ より $a = 3$

このとき $\textcircled{9}$ は

$9 - 6\lambda + \lambda^2 - 25 = 0$

$(\lambda - 8)(\lambda + 2) = 0$

よって $\lambda = 8$

(2) $\textcircled{7}$ より $a = 3 \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より

$3x + 5y = -2x, \quad 5x + 3y = -2y$ となり $y = -x$ 。 よって, 答は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$

(α は 0 以外の任意数)

11

(1) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 12$
 $= (\lambda - 6)(\lambda + 1) = 0$ より $\lambda = -1, 6$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} 2x + 3y = 6x \\ 4x + 3y = 6y \end{cases}$

$y = \frac{4}{3}x$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

12

- (1) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ とおくと $f(A) = A^2 - 2A - 3E$ である。 $f(A)$ の固有値は問題 177 の次の例題 13 フロベニウスの定理より $f(\lambda_1)$ と $f(\lambda_2)$ で、

今 $f(\lambda_1) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1 - 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$, $f(\lambda_2) = \lambda_2^2 - 2\lambda_2 - 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{8}$ である。

$\textcircled{7}$ より $(\lambda_1 - 3)(\lambda_1 + 1) = 0$ で $\lambda_1 = 3, -1$ 。 $\textcircled{8}$ より $\lambda_2 = 3, -1$ 。

従って $\lambda_1 + \lambda_2 = -2, 2, 6$ であり、問題 182(2)の公式より各々の値に対応して

$a_{11} + a_{22} = -2, 2, 6$ である。

- (2) $f(x) = x^2 - x$ とおくと $f(A) = A^2 - A$ 。 $f(A)$ の固有値は問題 177 の次の例題 13 フロベニウスの定理より $f(\lambda_1)$ と $f(\lambda_2)$ で、今 $f(\lambda_1) = \lambda_1^2 - \lambda_1 = 0$, $f(\lambda_2) = \lambda_2^2 - \lambda_2 = 0$ である。

$\lambda_1 = 0, 1$, $\lambda_2 = 0, 1$ であるから $\lambda_1 + \lambda_2 = 0, 1, 2$ であり、問題 182(2)の公式より各々の値に対応して $a_{11} + a_{12}$ の値は各々 $0, 1, 2$ となる。

13

- (1) ケーリー・ハミルトンの定理から

$$A^2 - (1+6)A + (1 \times 6 - 2 \times 3)E = O \quad \text{よって} \quad A^2 = 7A$$

$$\text{従って} \quad A^n = 7^{n-1}A = 7^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(別解) A の固有値 $\lambda = 0, 7$ とそれらに属する固有ベクトルを並べてつくった

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{を利用して} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad P^{-1}A^nP &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix}, \quad A^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix} \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 0 & 7^n \\ 0 & 3 \cdot 7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= 7^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4章の問題 13 のつづき

(2) ケーリー・ハミルトンの定理から

$$A^2 - (1-1)A + (1 \times (-1) - 3 \times 0)E = O \quad \text{よって} \quad A^2 = E。$$

従って、 n が偶数のときは $A^n = E$ ， n が奇数のときは $A^n = A$ である。

$$(\text{別解}) \quad A \text{ の固有値は } \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = \pm 1。$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{とすると} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \quad \text{とすると} \quad \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\beta \\ -2\beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ は } 0 \text{ 以外の任意数})$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{とすると} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{より}$$

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3-3(-1)^n \\ 0 & 2 \cdot (-1)^n \end{pmatrix}$$

4章の問題 13 のつづき

(3) ケーリー・ハミルトンの定理から

$$A^2 - (0+0)A + (0+1)E = O \quad \text{よって} \quad A^2 = -E。$$

$$\text{従って} \quad A^3 = A^2 A = -EA = -A, \quad A^4 = A^3 A = -AA = -A^2 = E。$$

以上により答は

$$n = 4m \quad \text{のとき} \quad A^n = E$$

$$n = 4m + 1 \quad \text{のとき} \quad A^n = A$$

$$n = 4m + 2 \quad \text{のとき} \quad A^n = -E$$

$$n = 4m + 3 \quad \text{のとき} \quad A^n = -A$$

(ただし, m は 0 以上の整数)

(別解 1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad \text{は } xy \text{ 平面における}$$

$$\text{原点中心の } \frac{\pi}{2} \text{ 回転移動を表す行列なので} \quad A^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{2} & -\sin \frac{n\pi}{2} \\ \sin \frac{n\pi}{2} & \cos \frac{n\pi}{2} \end{pmatrix}$$

または, 次のように答えてもよい。

$$n = 4m \quad \text{のとき} \quad A^n = E,$$

$$n = 4m + 1 \quad \text{のとき} \quad A^n = A,$$

$$n = 4m + 2 \quad \text{のとき} \quad A^n = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E,$$

$$n = 4m + 3 \quad \text{のとき} \quad A^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{3}{2}\pi & -\sin \frac{3}{2}\pi \\ \sin \frac{3}{2}\pi & \cos \frac{3}{2}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A \quad (\text{ただし, } m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

4章の問題 13(3)のつづき

(別解2)

$$A \text{ の固有値は } \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \text{ より } \lambda = \pm i \quad (i \text{ は虚数単位})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ とすると } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha i \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ とすると } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta i \end{pmatrix}$$

(α, β は 0 以外の任意数)

$$\text{よって } P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \text{ とすると } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n & 0 \\ 0 & (-i)^n \end{pmatrix} \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i^{n+1} & (-i)^n \\ i^n & (-i)^n i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i^{n+2} + (-i)^n & i^{n+1} - (-i)^n i \\ -i^{n+1} + (-i)^n i & i^n + (-i)^{n+1} i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i^n + (-i)^n & i^{n+1} + (-i)^{n+1} \\ -i^{n+1} - (-i)^{n+1} & i^n + (-i)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \text{ より 固有値は } \lambda = 2, 3 \end{aligned}$$

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} x + y = 2x \\ -2x + 4y = 2y \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + y = 3x \\ -2x + 4y = 3y \end{cases}$$

$$\text{よって, } \lambda = 2, 3 \text{ に属する固有ベクトルはそれぞれ } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$$

従って $\alpha = 1, \beta = 1$ としたものを並べ

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ とすると } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{となり } A^n &= P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 2^n & 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4章の問題 13 のつづき

$$(5) \quad A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \quad \text{よ} \text{り} \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \quad \text{と予想できる。}$$

$$(i) \quad n=1 \text{ のときは } A = \begin{pmatrix} a^1 & 1 \cdot a^0 \\ 0 & a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{で成立。}$$

$$(ii) \quad n=k \text{ のとき } A^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix} \quad \text{と仮定すると}$$

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & a^k + ka^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$$

となり $n=k+1$ のときも成立。

(i), (ii)よりすべての自然数について上の予想は等しい。