新版線形代数 演習 改訂版　解答

３章　行列式

２節　行列式の応用

A 問題

123

⑴ $$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -2(10-21) = 22 \fallingdotseq 0$$ ∴正則である。

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6,\ \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -10,\ \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

$$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5,\ \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -12,\ \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 3,\ \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 6,\ \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -4$$

したがって，$A^{-1} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ -10 & -12 & 6 \\ 14 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

⑵ $$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 16 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & -8 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 16 & -8 \\ 10 & -8 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 16 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = 48 \fallingdotseq 0$$ ∴正則である。

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6,\ \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8,\ \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

$$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6,\ \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -16,\ \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 24,\ \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8,\ \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -16$$

したがって，$A^{-1} = \dfrac{1}{48}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 24 \\ 8 & -16 & -8 \\ 10 & -2 & -16 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 4 & -8 & -4 \\ 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

123　つづき

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 10 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 25\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -25 \fallingdotseq 0$　　∴正則である。

$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -10,\ \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5,\ \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5$

$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -15,\ \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5,\ \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -10$

$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,\ \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$

したがって，$A^{-1} = \dfrac{1}{-25}\begin{pmatrix} -10 & -15 & 5 \\ 5 & 5 & -5 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

124

(1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$x_1 = \dfrac{1}{-2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -2,\quad x_2 = \dfrac{1}{-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2}$

(2) $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -64$

$x_1 = \dfrac{1}{-64}\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = \dfrac{-28}{-64} = \dfrac{7}{16},\quad x_2 = \dfrac{1}{-64}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = \dfrac{6}{-64} = -\dfrac{3}{32}$

(3) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -48$

$x_1 = \dfrac{1}{-48}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{48}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{48}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} = -\dfrac{12}{48} = -\dfrac{1}{4}$

$x_2 = \dfrac{1}{-48}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{48}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{48}\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = \dfrac{51}{48} = \dfrac{17}{16}$

$x_3 = \dfrac{1}{-48}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{48}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{48}\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -\dfrac{21}{48} = -\dfrac{7}{16}$

124　つづき

⑷　$$|A|=\begin{vmatrix}-1&3&-2\\2&-1&3\\-3&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&3&-2\\0&5&-1\\0&-7&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&-1\\-7&5\end{vmatrix}=-18$$

$$x_1=\frac{1}{-18}\begin{vmatrix}1&3&-2\\1&-1&3\\1&2&-1\end{vmatrix}=-\frac{1}{18}\begin{vmatrix}1&3&-2\\0&-4&5\\0&-1&1\end{vmatrix}=-\frac{1}{18}\begin{vmatrix}-4&5\\-1&1\end{vmatrix}=-\frac{1}{18}$$

$$x_2=\frac{1}{-18}\begin{vmatrix}-1&1&-2\\2&1&3\\-3&1&-1\end{vmatrix}=-\frac{1}{18}\begin{vmatrix}-1&1&-2\\0&3&-1\\0&-2&5\end{vmatrix}=\frac{1}{18}\begin{vmatrix}3&-1\\-2&5\end{vmatrix}=\frac{13}{18}$$

$$x_3=\frac{1}{-18}\begin{vmatrix}-1&3&1\\2&-1&1\\-3&2&1\end{vmatrix}=-\frac{1}{18}\begin{vmatrix}-1&3&1\\0&5&3\\0&-7&-2\end{vmatrix}=\frac{1}{18}\begin{vmatrix}5&3\\-7&-2\end{vmatrix}=\frac{11}{18}$$

125

⑴　$$\begin{vmatrix}3&1&k\\1&2&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2&t+6\\0&1&3\\1&1&-2\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2&k+6\\1&3\end{vmatrix}=-6-k-6=-12-k=0\qquad\therefore\quad k=-12$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&-12&0\\1&2&1&0\\1&1&-2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\1&2&1&0\\3&1&-12&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&1&3&0\\0&-2&-6&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&1&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\therefore\quad\begin{aligned}x_1+x_2-2x_3&=0\\x_2+3x_3&=0\end{aligned}$$

したがって　$x_3=t$ $(t\fallingdotseq 0)$ とおくと，$x_1=5t$，$x_2=-3t$，$x_3=t$　（t は 0 でない任意の数）

⑵　$$\begin{vmatrix}1&1&0\\2k&1&k\\2&2k&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2k&1-2k&k\\2&2k-2&1\end{vmatrix}=(1-2k)-k(2k-2)=1-2k-2k^2+2k=-2k^2+1=0$$

$$\therefore\quad k=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\\pm\sqrt{2}&1&\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\2&\pm\sqrt{2}&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1\mp\sqrt{2}&\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\0&-2\pm\sqrt{2}&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1\mp\sqrt{2}&\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{（複号同順）}$$

$$\therefore\quad\begin{aligned}x_1+x_2&=0\\(1\mp\sqrt{2})x_2\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x_3&=0\end{aligned}$$　（複号同順）　つまり $\pm x_3=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(-1\pm\sqrt{2}\right)x_2=\left(-\sqrt{2}\pm2\right)x_2$

したがって　$x_2=t$ $(t\fallingdotseq 0)$ とおくと，

$k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$x_1=-t$，$x_2=t$，$x_3=\left(2-\sqrt{2}\right)t$

$k=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$x_1=-t$，$x_2=t$，$x_3=\left(2+\sqrt{2}\right)t$　（t は 0 でない任意の数）

126

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$

したがって　△ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}3&1\\9&8\end{vmatrix}$ の絶対値で　$\dfrac{15}{2}$

$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$

したがって　△ACD の面積は　$\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1&0\\8&6\end{vmatrix}$ の絶対値で　3

以上より　四角形 ABCD の面積は　$\dfrac{21}{2}$

127

(1)　$\begin{vmatrix}2&1&3\\-3&2&-1\\4&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&3\\5&2&-1\\0&-1&0\end{vmatrix}=(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}6&3\\5&-1\end{vmatrix}=-6-15=-21$　したがって　$|-21|=21$

(2)　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\-5\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{2b}-\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{3c}-\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}7\\0\\-4\end{pmatrix}$ より

$\begin{vmatrix}1&-1&7\\-5&5&0\\5&-2&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&7\\0&5&0\\3&-2&-4\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}0&7\\3&-4\end{vmatrix}=-105$

したがって　$|-105|=105$

128

(1)　$\begin{vmatrix}2&-3&6\\-2&5&-4\\0&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-3&6\\0&2&-4\\0&2&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&-4\\2&3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&-4\\1&3\end{vmatrix}=4\fallingdotseq 0$　　したがって　1 次独立

(2)　$\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&7\\1&4&7\\3&6&9\end{vmatrix}=0$　　したがって　1 次従属

B 問題

129

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc(c-b),\ \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} = ac(a-c),\ \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab(b-a)$$

$$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b+c)(b-c),\ \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c+a)(c-a),\ \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = c-b,\ \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix} = a-c,\ \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b-a$$

したがって

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\begin{pmatrix} bc(c-b) & (b+c)(b-c) & c-b \\ ac(a-c) & (c+a)(c-a) & a-c \\ ab(b-a) & (a+b)(a-b) & b-a \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -b & 0 & a \\ a & -b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & a & -b \\ a-b & 0 & a \\ a-b & -b & 0 \end{vmatrix} = (a-b)\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ 1 & 0 & a \\ 1 & -b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ 0 & -a & a+b \\ 0 & -b-a & b \end{vmatrix} = (a-b)\begin{vmatrix} -a & a+b \\ -(a+b) & b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)\left(-ab+(a+b)^2\right) = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{vmatrix} = ab,\ \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} -b & a \\ a & 0 \end{vmatrix} = a^2,\ \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} -b & 0 \\ a & -b \end{vmatrix} = b^2$$

$$\tilde{a}_{21} = \begin{vmatrix} a & -b \\ -b & 0 \end{vmatrix} = b^2,\ \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -b \\ a & 0 \end{vmatrix} = ab,\ \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & -b \end{vmatrix} = a^2$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2,\ \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -b \\ -b & a \end{vmatrix} = b^2,\ \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{vmatrix} = ab$$

したがって

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}\begin{pmatrix} ab & b^2 & a^2 \\ a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \end{pmatrix}$$

(1) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \tilde{a}_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,,$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\,, \quad \tilde{a}_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \tilde{a}_{34} = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\tilde{a}_{41} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\,, \quad \tilde{a}_{42} = (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\tilde{a}_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \tilde{a}_{44} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

よって

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 0 = 0$$

$$\tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3} \cdot 0 = 0, \quad \tilde{a}_{14} = (-1)^{1+4} \cdot 0 = 0$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \tilde{a}_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \tilde{a}_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\tilde{a}_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\tilde{a}_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

よって

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

131

必要　：　A^{-1} の成分がすべて整数とすると $|A^{-1}|$ は整数

$1=\left|E\right|=\left|A^{-1}A\right|=\left|A^{-1}\right|\left|A\right|$ より

$|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$ が整数であるので　$|A|=\pm1$

十分　：　$|A|=\pm1$ ならば $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}=\pm\widetilde{A}$ であり

$\widetilde{A}$ の各成分は整数成分からなる行列 A の余因子である。よって　A^{-1} の成分も整数

132

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 1 & a^2 & b^2\\ 1 & a^3 & b^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 0 & a^2-a & b^2-b\\ 0 & a^3-a & b^3-b\end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix}a-1 & b-1\\ a^2-1 & b^2-1\end{vmatrix}$$

$$=ab(a-1)(b-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ a+1 & b+1\end{vmatrix}=ab(a-1)(b-1)(b-a)$$

ただ 1 つの解をもつための必要十分条件は　$|A|\fallingdotseq 0$ であるので

$a\fallingdotseq 1$ かつ $b\fallingdotseq 1$ かつ $a\fallingdotseq b$

133

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-5\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が定める平行六面体の体積は

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 3\\ -5 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 5 & 7 & -2\\ -5 & -7 & 6\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}7 & -2\\ -7 & 6\end{vmatrix}=(-7)\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 6\end{vmatrix}=-28$$ の絶対値であるので　28

ABCD を頂点とする四面体の体積はその $\dfrac{1}{6}$　したがって $\dfrac{28}{6}=\dfrac{14}{3}$

134

⑴ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\left(-1\right)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 \fallingdotseq 0$ したがって $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ は 1 次独立。

⑵ $l\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} + n\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}$ とおく

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix}$ クラメルの公式より，

$$l = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 13 & 5 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 9 & -7 & 1 \\ 16 & -8 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-3}{9}\left(-1\right)^{3+1}\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{3}\left(-14+8\right) = 2$$

$$m = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -2 & 13 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ -2 & 11 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{9}\left(-1\right)^{3+1}\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left(20-11\right) = 3$$

$$n = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 13 \\ 3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{9}\left(-1\right)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = 1$$

したがって $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$

135 $l\boldsymbol{x} + m\boldsymbol{y} + n\boldsymbol{z} = \boldsymbol{O}$ とおくとき $l = m = n = 0$ であることを示せばよい。

$l\left(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\right) + m\left(-\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\right) + n\left(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\right) = \boldsymbol{O}$

$\left(l - m + n\right)\boldsymbol{a} + \left(2l - m + n\right)\boldsymbol{b} + \left(-l - m\right)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{O}$

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ が 1 次独立であるので

$$\begin{cases} l - m + n = 0 \\ 2l - m + n = 0 \\ -l - m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 1 - 1 = -1 \fallingdotseq 0$$

より㋐は唯一組の解をもち，その解は $l = m = n = 0$ となるので

$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ は 1 次独立。

136

$$\begin{vmatrix}0&a&1&2\\a&0&2&1\\1&2&0&a\\2&1&a&0\end{vmatrix}=(3+a)\begin{vmatrix}1&a&1&2\\1&0&2&1\\1&2&0&a\\1&1&a&0\end{vmatrix}=(3+a)\begin{vmatrix}1&a&1&2\\0&-a&1&-1\\0&2-a&-1&a-2\\0&1-a&a-1&-2\end{vmatrix}$$

$$=(3+a)\begin{vmatrix}-a&1&-1\\2-a&-1&a-2\\1-a&a-1&-2\end{vmatrix}=(3+a)\begin{vmatrix}0&1&0\\2-2a&-1&a-3\\1-2a+a^2&a-1&a-3\end{vmatrix}$$

$$=-(3+a)\begin{vmatrix}2(1-a)&a-3\\(1-a)^2&a-3\end{vmatrix}=-(3+a)(1-a)(a-3)\begin{vmatrix}2&1\\1-a&1\end{vmatrix}$$

$$=-(3+a)(1-a)(a-3)(1+a)=0$$

したがって　$a=\pm3,\ \pm1$

137

㋐ $\begin{cases}(3-\lambda)x-2y=0\\2x+(-2-\lambda)y=0\end{cases}$ が $x=y=0$ 以外の解をもつには

$\begin{vmatrix}3-\lambda&-2\\2&-2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)=0$　よって $\lambda=2,\ -1$

(i) $\lambda=2$ のとき㋐は $\begin{cases}x-2y=0\\2x-4y=0\end{cases}$ なので解は $\begin{cases}x=2t\\y=t\end{cases}$ （ t は 0 以外の任意数）

(ii) $\lambda=-1$ のとき㋐は $\begin{cases}4x-2y=0\\2x-y=0\end{cases}$ なので解は $\begin{cases}x=s\\y=2s\end{cases}$ （ s は 0 以外の任意数）

138

(1) $${}^tAA=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\end{pmatrix}(\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}&\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}&\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{a}|^2&0&0\\0&|\boldsymbol{b}|^2&0\\0&0&|\boldsymbol{c}|^2\end{pmatrix}$$

$|{}^tAA|=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2$, $|{}^tAA|=|{}^tA||A|=|A|^2$　より　$|A|=\pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$

(2) (1)より　$|A|=\pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$ であるが，$\boldsymbol{a}\fallingdotseq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\fallingdotseq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{c}\fallingdotseq\boldsymbol{0}$ より $|A|\fallingdotseq 0$,

∴　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立。

(3) $\boldsymbol{x}=l\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ との内積をとると，

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=l\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=l|\boldsymbol{a}|^2$

∴　$l=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{a}|^2}$，同様に　$m=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{b}|^2}$，$n=\dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{c}|^2}$

発展問題

139

⑴　(i)　$|A| \fallingdotseq 0$ のとき　$A^{-1}\dfrac{\widetilde{A}}{|A|}$　より　$AA^{-1}=A\dfrac{\widetilde{A}}{|A|}=E$　よって　$A\widetilde{A}=|A|E$　…㋐

つまり $A\widetilde{A}$　は n 次の対角行列で成分はすべて $|A|$

よって $|A\widetilde{A}|=|A|^n$

$\therefore$　$|A||\widetilde{A}|=|A|^n$　より　$|\widetilde{A}|=|A|^{n-1}$　…㋑

(ii)　$|A|=0$　のとき　$A\widetilde{A}=|A|E=O$（零行列）である。

よって A の所に $\widetilde{A}$ を代入すると　$\widetilde{A}\,\widetilde{\widetilde{A}}=|\widetilde{A}|E=O$

従って　$A\widetilde{A}\widetilde{\widetilde{A}}=A|\widetilde{A}|E=O$　ここで　$|\widetilde{A}| \fallingdotseq 0$ ならば　$A=O$　であり

$\widetilde{A}=O$ となって矛盾。よって　$|\widetilde{A}|=0$　である。

従って　$|\widetilde{A}|=0=|A|^{n-1}$　が成立。

⑵　㋐の A を $\widetilde{A}$ とすると $\widetilde{A}\,\widetilde{\widetilde{A}}=|\widetilde{A}|E$　であるから

$A\widetilde{A}\widetilde{\widetilde{A}}=A|\widetilde{A}|E$ である。㋐，㋑より $|A|E\widetilde{\widetilde{A}}=A|A|^{n-1}E$ であるから　$\widetilde{\widetilde{A}}=A|A|^{n-2}$。

つまり $\widetilde{\widetilde{A}}=|A|^{n-2}A$

$$|A|\mathit{\Delta}_r=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r(r+1)} & \cdots & a_{rn} \\ a_{(r+1)1} & \cdots & a_{(r+1)r} & a_{(r+1)(r+1)} & \cdots & a_{(r+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & a_{n(r+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & & & \tilde{a}_{(r+1)1} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & \tilde{a}_{(r+1)r} & \cdots & \tilde{a}_{nr} \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{(r+1)(r+1)} & \cdots & \tilde{a}_{n(r+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{(r+1)n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

（$\boxed{}$ は r 次の単位行列。）

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{(r+1)1} & \cdots & a_{(r+1)r} & |A| & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & & & |A| \end{vmatrix}=|A|^{n-r}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

（$a_{l1}\tilde{a}_{k1}+a_{l2}\tilde{a}_{k2}+\cdots+a_{ln}\tilde{a}_{kn}$
$=\begin{cases} |A| & (l=k \text{ のとき}) \\ 0 & (l\neq k \text{ のとき}) \end{cases}$
$\boxed{}$ はすべての対角成分が $|A|$ であるような $(n-r)$ 次の対角行列。）

より　$\mathit{\Delta}_r=|A|^{n-r-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$