新版線形代数 演習 改訂版　解答

3 章の問題 A

1.

⑴ $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7$$

⑵ $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

⑶ $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 5 & -6 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -2 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -10 & 7 & -7 \\ 5 & -16 & 11 & -12 \\ 5 & -3 & 8 & -24 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -10 & 7 & -7 \\ -16 & 11 & -12 \\ -3 & 8 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 7 & 0 \\ -16 & 11 & -1 \\ -3 & 8 & -16 \end{vmatrix} \overset{②+①\times(-2)}{=} \begin{vmatrix} -10 & 7 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \\ -3 & 8 & -16 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -10 & 7 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \\ -67 & 56 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -10 & 7 \\ -67 & 56 \end{vmatrix}$$

$$= 7\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -11 & 56 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -11 & 8 \end{vmatrix} = 7(-24+11) = -91$$

⑷ $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 10-(-4) = 14$$

⑸ $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6-1 = 5$$

⑹ $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 2 & 8 \\ 6 & 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

3 章の問題 A　つづき

2.

(1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & y-1 & y^2-1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x-1 & (x+1)(x-1) \\ y-1 & (y+1)(y-1) \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)\begin{vmatrix} 1 & x+1 \\ 1 & y+1 \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)(y-x)$$

(2) A が正則ならば　$|A| \fallingdotseq 0$　である。　$\therefore$　$x \fallingdotseq 1$　かつ　$y \fallingdotseq 1$　かつ　$x \fallingdotseq y$

3.　$|2A| = 2^2|A| = 4 \cdot 12 = 48$

4.

(1)　$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = 2$

(2)　$|A^{-1}B| = |A^{-1}||B| = 2 \cdot 0 = 0$

5.
$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 3 & a & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ 3 & a & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2 & 0 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a(a-2) = 0$$

したがって　$a = 0,\ 2$

$a = 0$　のとき　$\begin{cases} y - z = 0 \\ 3x = 0 \\ -2x - y + z = 0 \end{cases}$　より　$x = 0$，　$y = t$，　$z = t$　（t は 0 でない任意定数）

$a = 2$　のとき　$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$　より　$x = 2t$，　$y = -3t$，　$z = t$　（t は 0 でない任意定数）

6.　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$　が 1 次従属であればよいので

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -8 & -3 \\ 0 & 8 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 8 & a+1 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = 8(-a-1+3)$$

したがって　$a = 2$

3 章の問題 B

1.

⑴ $$f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -abc & ab+bc+ca & x-a-b-c \end{vmatrix}$$

$$= x^2(x-a-b-c)-abc+x(ab+bc+ca)$$

$$= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$$

⑵ $$f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -abc & ab+bc+ca & x-a-b-c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x-a & -1 \\ -abc & bc+ax-a^2 & x-a-b-c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-a & -1 & 0 \\ a(x-a) & x-a & -1 \\ a^2(x-a) & bc+ax-a^2 & x-a-b-c \end{vmatrix}=(x-a)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & x-a & -1 \\ a^2 & bc+ax-a^2 & x-a-b-c \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & x & -1 \\ a^2 & bc+ax & x-a-b-c \end{vmatrix}=(x-a)\begin{vmatrix} x & -1 \\ bc+ax & x-a-b-c \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)\begin{vmatrix} x-b & -1 \\ (x-b)(a+b) & x-a-b-c \end{vmatrix}=(x-a)(x-b)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a+b & x-a-b-c \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)(x-b)(x-c)$$

⑶ $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=0$ より $x=a,\ b,\ c$

2. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a+1 \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1 & -a & 1 & a+1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \end{array}\right)$$ よって $$\begin{cases} x+z=1 \\ y+(a-1)z=a \\ az=0 \\ -ay=a \end{cases}$$

となり $a=0$ のとき $x=1-t$, $y=z=t$ （t は任意定数）

$a\fallingdotseq 0$ のとき $$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

となるので $a\fallingdotseq -1$ のとき 解はない。

$a=-1$ のとき $x=1$, $y=-1$, $z=0$

3 章の問題 B　つづき

3.

⑴　$\varDelta_{n+2}$ を第 1 行で展開すると，

$$\varDelta_{n+2}=2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}+\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & & \\ \vdots & -1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & -1 \\ 0 & 0 & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

（どちらも（n+1）次正方行列の行列式）

$$=2\varDelta_{n+1}-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}=2\varDelta_{n+1}-\varDelta_n$$

⑵　⑴より　$\varDelta_{n+2}-\varDelta_{n+1}=\varDelta_{n+1}-\varDelta_n$　なので　$\varDelta_n-\varDelta_{n-1}=\varDelta_{n-1}-\varDelta_{n-2}$　$(n \geqq 3)$

したがって　$\varDelta_n-\varDelta_{n-1}=\cdots=\varDelta_2-\varDelta_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-2=1$

ゆえに
$$\begin{aligned}\varDelta_n &= \varDelta_{n-1}+1=\left(\varDelta_{n+2}+1\right)+1 \\ &= \varDelta_{n-2}+2=\left(\varDelta_{n-3}+1\right)+2 \\ &\ \ \vdots \\ &= \varDelta_1+(n-1) \\ &= n+1\end{aligned}$$

4.　直線　$ax+by+c=0$　の任意の点を $(x,\ y)$　とする。

⑴　3 点（0，0），（x_1，y_1），（x，y）が直線上の点であるので

$$\begin{cases} a\cdot 0+b\cdot 0+c=0 \\ a\cdot x_1+b\cdot y_1+c=0 \\ a\cdot x+b\cdot y+c=0 \end{cases}$$
が成り立つ。よって
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは，a，b，c が $a=b=c=0$　以外の解をもつことを意味するので

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x & y \end{vmatrix}=0$$

⑵　3 点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする三角形は，

ベクトル　$\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_3-x_1 \\ y_3-y_1 \end{pmatrix}$を隣り合う 2 辺とする三角形である。

したがって

$$S=\frac{1}{2}\operatorname{abs}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\operatorname{abs}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{abs}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$