新版線形代数 演習 改訂版　解答

２章　行列と連立１次方程式

２節　連立１次方程式と行列

88

⑴
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&7\\1&-1&3&-4\\2&3&2&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&7\\0&-3&5&-11\\0&-1&6&-8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&7\\0&1&-6&8\\0&3&-5&11\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&7\\0&1&-6&8\\0&0&13&-13\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&7\\0&1&-6&8\\0&0&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&5\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\end{array}\right)\quad\therefore\begin{cases}x=1\\y=2\\z=-1\end{cases}$$

⑵
$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&-1&-2\\3&-2&-1&-8\\1&4&3&12\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&3&12\\3&-2&-1&-8\\2&3&-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&3&12\\0&-14&-10&-44\\0&-5&-7&-26\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&3&12\\0&7&5&22\\0&5&7&26\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&3&12\\0&2&-2&-4\\0&5&7&26\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&3&12\\0&1&-1&-2\\0&5&7&26\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&3&12\\0&1&-1&-2\\0&0&12&36\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&3&12\\0&1&-1&-2\\0&0&1&3\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&0&3\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{array}\right)\quad\therefore\begin{cases}x=-1\\y=1\\z=3\end{cases}$$

89

⑴
$$\left(\begin{array}{cc|c}2&9&1\\4&-3&16\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}2&9&1\\0&-21&14\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}2&9&1\\0&3&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}2&0&7\\0&3&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&\frac{7}{2}\\0&1&-\frac{2}{3}\end{array}\right)\quad\therefore\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\y=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

⑵
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&2&0\\-1&1&3&1&1\\2&-1&2&3&2\\1&2&2&3&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&2&0\\0&2&2&3&1\\0&-3&4&-1&2\\0&1&3&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-4&1&-3\\0&0&-4&1&-5\\0&0&13&2&11\\0&1&3&1&3\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-4&1&-3\\0&1&3&1&3\\0&0&13&2&11\\0&0&-4&1&-5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-4&1&-3\\0&1&3&1&3\\0&0&1&5&-4\\0&0&4&-1&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&21&-19\\0&1&0&-14&15\\0&0&1&5&-4\\0&0&0&-21&21\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&21&-19\\0&1&0&-14&15\\0&0&1&5&-4\\0&0&0&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)\quad\therefore\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\\w=-1\end{cases}$$

⑴ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & -11 & 11 & 11 \\ 0 & -11 & 11 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

よって $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases}$ （tは任意の実数）

⑵ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

よって $\begin{cases} x - z = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ （tは任意の実数）

⑶ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -11 & 11 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & 11 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -11 & 11 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$

３行目は $0x + 0y + 0z = -4$ だが，これをみたす x，y，z の組は存在しない。
よって不能である。（解なし，である。）

⑷ $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & 16 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$

１行目より不能である。（解なし，である。）

91

(1) $\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 8 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & 5 \end{array}\right)$

よって，逆行列は $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right)$

よって，逆行列は $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$

(3) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$

よって，逆行列は $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -5 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right)$

よって，逆行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

(5) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

よって，逆行列は $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

⑴ $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&3&1&0&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-3&3\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&-2&3\end{array}\right)$$

よって，逆行列は $\begin{pmatrix}1&-3&3\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$

⑵ $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&3&5&0&1&0\\0&2&-1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-1&1&-2&1&0\\0&2&-1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&4&-3&2&0\\0&1&-1&2&-1&0\\0&0&1&-4&2&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&13&-6&-4\\0&1&0&-2&1&1\\0&0&1&-4&2&1\end{array}\right)$$

よって，逆行列は $\begin{pmatrix}13&-6&-4\\-2&1&1\\-4&2&1\end{pmatrix}$

⑶ $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&-10&1&0&0\\2&3&-1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&0&1\\2&3&-1&0&1&0\\2&5&-10&1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&0&1\\0&1&-5&0&1&-2\\0&3&-14&1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&0&1\\0&1&-5&0&1&-2\\0&0&1&1&-3&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&-2&6&-7\\0&1&0&5&-14&18\\0&0&1&1&-3&4\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-7&20&-25\\0&1&0&5&-14&18\\0&0&1&1&-3&4\end{array}\right)$$

よって，逆行列は $\begin{pmatrix}-7&20&-25\\5&-14&18\\1&-3&4\end{pmatrix}$

93

⑴

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

よって，逆行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

⑵

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 6 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 6 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

よって，逆行列は $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(1) $$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ よって，階級 1

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ よって，階級 3

(3) $$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ よって，階級 2

(4) $$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ よって，階級 2

(5) $$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 9 & 8 & 0 \\ 10 & 18 & 16 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ よって，階級 2

95

(1) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

∴　$\mathrm{rank}A = 2$，$\mathrm{rank}A' = 3$ より，解をもたない

(2) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 6 & 7 \\ 3 & 10 & 8 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

∴　$\mathrm{rank}A = 2$，$\mathrm{rank}A' = 2$ より，解をもつ

(3) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & -18 & -12 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -9 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

∴　$\mathrm{rank}A = 2$，$\mathrm{rank}A' = 2$ より，解をもつ

(4) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 12 & 10 \\ 0 & -2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 5 \\ 3 & 9 & -6 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 5 \\ 3 & 7 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

∴　$\mathrm{rank}A = 2$，$\mathrm{rank}A' = 2$ より，解をもつ

96

(1) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \therefore \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$$

96 つづき

⑵
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 6 & 1 \\ 5 & -2 & 7 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 12 & 7 \\ 0 & 8 & 22 & 19 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 12 & 7 \\ 0 & 0 & -74 & -37 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 12 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \therefore \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

97

⑴
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & 3 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & -4 & -3 & -8 & -3 \\ 0 & -5 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -24 & 25 \\ 0 & 0 & 3 & -26 & 29 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 31 & -32 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & -24 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 46 & -46 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 31 & -32 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & -24 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \therefore \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ w = -1 \end{cases}$$

⑵
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 2 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 & -5 \\ 0 & -4 & 6 & 13 & 18 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -13 & -19 \\ 0 & -1 & 2 & 11 & 19 \\ 0 & 3 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -13 & -19 \\ 0 & 1 & -2 & -11 & -19 \\ 0 & 0 & 2 & 31 & 58 \\ 0 & 0 & 2 & 15 & 26 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 & 39 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & 39 \\ 0 & 0 & 2 & 31 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -32 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 & 39 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & 39 \\ 0 & 0 & 2 & 31 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \therefore \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = -2 \\ w = 2 \end{cases}$$

98

⑴ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\therefore \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = t \end{cases}$ （t は任意の実数）

⑵ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\therefore \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$ （t は任意の実数）

99

⑴ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -5 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\therefore \begin{cases} x = 2t - s + 1 \\ y = -t + 3s + 2 \\ z = t \\ w = s \end{cases}$ （t，s は任意の実数）

⑵ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 13 & 5 \\ -3 & 11 & -4 & 6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 9 & 3 \\ 1 & 8 & -4 & 12 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\therefore \begin{cases} x = t - 2s + 1 \\ y = t \\ z = 2t + 3s - 1 \\ w = s \end{cases}$ （t，s は任意の実数）

100

(1) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

よって，逆行列は $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$ よって，逆行列は $\begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

よって，逆行列は $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

100　つづき

(4) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

よって，逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & \frac{9}{10} & \frac{7}{10} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

101

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

よって，階級 3

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

よって，階級 2

102

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & -1 & 9 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & -5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ よって，階級 3

102 つづき

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & -11 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -12 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ よって，階級 2

103

(1) 与式を $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ とおく。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 10 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 10 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -78 & 30 & 6 & -18 \\ 0 & -13 & 78 & -26 & 0 & 13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 10 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & -13 & 0 & 4 & 6 & -5 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 13 & 0 & 130 & -39 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & -130 & 50 & 10 & -30 \\ 0 & 13 & 0 & -4 & -6 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 13 & 0 & 0 & 11 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 13 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 13 & 0 & -4 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

よって　$A^{-1} = \dfrac{1}{13} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & -4 \\ -4 & -6 & 5 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　∴　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

103 つづき

(2)　与式を $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-8\\12\end{pmatrix}$ とおく。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&-1&1&0&0\\3&-2&-1&0&1&0\\1&4&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&-1&1&0&0\\1&-5&0&-1&1&0\\7&13&0&3&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&13&-1&3&-2&0\\1&-5&0&-1&1&0\\0&48&0&10&-7&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&13&-1&3&-2&0\\48&-240&0&-48&48&0\\0&240&0&50&-35&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&13&-1&3&-2&0\\48&0&0&2&13&5\\0&48&0&10&-7&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&52&-4&12&-8&0\\48&0&0&2&13&5\\0&48&0&10&-7&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&4&-4&2&-1&-1\\48&0&0&2&13&5\\0&48&0&10&-7&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&48&-48&24&-12&-12\\48&0&0&2&13&5\\0&48&0&10&-7&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&-48&14&-5&-13\\48&0&0&2&13&5\\0&48&0&10&-7&1\end{array}\right)$$

よって　$A^{-1}=\dfrac{1}{48}\begin{pmatrix}2&13&5\\10&-7&1\\-14&5&13\end{pmatrix}$　$\therefore$　$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}-2\\-8\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$

104

(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&8&-13&1&0&0\\-2&-5&9&0&1&0\\-1&-3&5&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-5&0&0&-1\\2&5&-9&0&-1&0\\3&8&-13&1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-5&0&0&-1\\0&-1&1&0&-1&2\\0&-1&2&1&0&3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&0&-3&5\\0&-1&1&0&-1&2\\0&0&1&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&7\\0&-1&0&-1&-2&1\\0&0&1&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&7\\0&1&0&1&2&-1\\0&0&1&1&1&1\end{array}\right)$$

より，$\begin{pmatrix}3&8&-13\\-2&-5&9\\-1&-3&5\end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix}2&-1&7\\1&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$ だから

$$X=\begin{pmatrix}2&-1&7\\1&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2-2+7&4-1+0&2+0+7\\1+4-1&2+2+0&1+0-1\\1+2+1&2+1+0&1+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&3&9\\4&4&0\\4&3&2\end{pmatrix}$$

104 つづき

(2) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -22 & 4 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -4 & -15 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & -3 & -8 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & -3 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

より，$\begin{pmatrix} -22 & 4 & 15 \\ 6 & -1 & -4 \\ 9 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ だから

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0+0+6 & 0-9+16 & 0+6+4 \\ 6+0-3 & 18+0-8 & 3+0-2 \\ -4+0+0 & -12+3+0 & -2-2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 10 \\ 3 & 10 & 1 \\ -4 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

(3) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

より，$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ だから

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 1+0+2 & 0+0+1 \\ 1+2+1 & 1+0+2 & 0-1+1 \\ 2+2+1 & 2+0+2 & 0-1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

105　与えられた連立方程式を掃き出し法で解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore \begin{cases} x + 3z = 1 & \cdots ① \\ y - 2z = 1 & \cdots ② \end{cases}$　ここで $z = t$ とおくと，①，②より，$x = 1 - 3t$，$y = 1 + 2t$

$\therefore \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$　（tは任意の実数）

$$\therefore \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3t \\ 1 + 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

106

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$とおく。

⑴ $P(1,\ 3,\ c)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + ca_{31} & a_{12} + ca_{32} & a_{13} + ca_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

より，A に $P(1,\ 3,\ c)$を左から掛けることは，第 3 行を c 倍して第 1 行に加えることである。

$Q(1,\ c)A = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

より，A に $Q(1,\ c)$ を左から掛けることは，第 1 行を c 倍することである。

$R(1,\ 2)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

より，A に $R(1,\ 2)$ を左から掛けることは，第 1 行と第 2 行を交換することである。

106 つづき

⑵ $AP(1, 2, c)A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ca_{11}+a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ca_{21}+a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ca_{31}+a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

より，A に $P(1, 2, c)$ を右から掛けることは，第 1 列を c 倍して第 2 列に加えることである。

$AQ(2, c)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ca_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ca_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ca_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

より，A に $Q(2, c)$ を右から掛けることは，第 2 列を c 倍することである。

$AR(1, 3)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$

より，A に $R(1, 3)$ を右から掛けることは，第 1 列と第 3 列を交換することである。

⑶ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\therefore$ $P(2, 1, c)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} c & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\therefore$ $Q(1, c)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\therefore$ $R(2, 3)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

⑷ ⑶より，P, Q, R は正則であり，X, Y は P, Q, R を掛けたものだから正則である。

$XAY=E$ の両辺に左から X^{-1} を掛けて，$AY=X^{-1}$

$AY=X^{-1}$ の両辺に右から X をかけて，$AYX=E$ …①

同様にして，$XAY=E$ の両辺に右から Y^{-1} を掛けて，$XA=Y^{-1}$

$XA=Y^{-1}$ の両辺に左から Y を掛けて，$YXA=E$ …②

①，②より Y, X は A の逆行列である。

２章の問題

１

⑴ $A-2E=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ より，（1，2）成分は 3

⑵ $A^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6 & 3+9\\ 2+6 & 6+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 12\\ 8 & 15\end{pmatrix}$ より，(2，1) 成分は 8

⑶ $A^{-1}=\dfrac{1}{3-6}\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$より，$A^{-1}$ の（1，2）成分は 1

２

$AA^{-1}=E$ より，A の第 1 行と A^{-1} の第 1 列の積は 1 である。すなわち，求める数を x とおくと

$(1\quad 2\quad -1)\begin{pmatrix}x\\ -3\\ 2\end{pmatrix}=x-6-2=1 \quad \therefore \quad x=9$

３

① $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ のとき $(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

$A^{-1}+B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ より①は偽である。,

② $(A-E)(A^2+A+E)=AA^2+AA+AE-EA^2-EA-EE=A^3+\cancel{A^2}+\cancel{A}-\cancel{A^2}-\cancel{A}-E=A^3-E$
だから，②は正しい。

③ $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ のとき $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,

$A^2-B^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ より③は偽である。

④ $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ のとき ${}^t(AB)={}^t\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,

${}^tA\,{}^tB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ より与式は成立しない。

⑤ $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ のとき

$(X-A)(X-B)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ だが $X\neq A$ かつ $X\neq B$ である。

よって⑤は偽である。

2章の問題

3のつづき

⑥　$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ のとき

$AC=BC=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ だが $A\neq B$ である。

よって⑥は偽である。

⑦　$AX=XA=E$ となる X が A の逆行列 A^{-1} だから，$A^2=E$ ならば $A=A^{-1}$ であり，⑦は正しい。

以上より，②，⑦

4

⑴　$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ となるので nが奇数のとき $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$n$が偶数のとき $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

⑵　$A^2=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&2a\\0&a^2\end{pmatrix}$,

$A^3=\begin{pmatrix}a^2&2a\\0&a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3&a^2+2a^2\\0&a^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3&3a^2\\0&a^3\end{pmatrix}$，より $\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix}$

5

⑴　$\begin{pmatrix}a&1\\1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1-a^2\\1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1-a^2\\1&0\end{pmatrix}$ より　$a=1$ のとき 1，$a\neq1$ のとき 2

⑵　$\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+2&1&1\\a+2&a&1\\a+2&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\0&0&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a-1&0\\0&a&a-1\end{pmatrix}$ より

$a=1$ のとき 1，それ以外のとき 3

6

⑴　$\begin{pmatrix}x&x+1&x^2\\1&x^2+1&1\\x&x^2+x&x^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1-x^3&x^2-x\\1&x^2+1&1\\0&x^2-x^3&x^2-x\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1-x^3&x^2-x\\1&0&0\\0&x^2-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1-x^2&x^2-x\\1&0&0\\0&x^2-1&0\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}0&0&x^2-x\\1&0&0\\0&x^2-x&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&x(x-1)\\1&0&0\\0&(x-1)(x+1)&0\end{pmatrix}$ より

①　$x=1$ のとき 1，②　$x=-1$，0 のとき 2，③　それ以外のとき 3

２章の問題

６のつづき

⑵

（i）　$a=b$ のとき，基本変形すると

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ だから，$a=0$ のとき階数 0，$a\neq 0$ のとき階数 1 である。

（ii）　$a\neq b$ のとき，第 2，3，4 行を第 1 行に加える基本変形により

$$\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$$

（ア）　$a+3b=0$ のとき，$a\neq b$ より，$a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ だから，

さらに第 2，3，4 列を第 1 列に加える基本変形を行う。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3b & b & b \\ 0 & b & -3b & b \\ 0 & b & b & -3b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & b \\ 0 & b & -3b & b \\ 0 & -b & b & -3b \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & -b & -4b & 0 \\ 0 & -b & 0 & -4b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と変形でき，階級 3 である。

（イ）　$a+3b\neq 0$のとき

$$\begin{pmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と変形でき，階級は 4 である。最後の変形は $a-b\neq 0$ より第 2，3，4 行を

$a-b$ でわって実現している。

以上をまとめると

（i）　$a=b=0$ のとき階級は 0，$a=b\neq 0$ のとき階級は 1。

（ii）　（ア）$a\neq b$ かつ $a+3b=0$ のとき階級は 3，（イ）$a\neq b$ かつ $a+3b\neq 0$ のとき階級は 4。

7

与えられた連立方程式を掃き出し法で解くと

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & a-4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-9 \end{array}\right)$$

解をもつための条件は，係数行列と拡大係数行列の階級が等しいことだから，求める条件は $a=9$

このとき，$\begin{cases} x-z+u=7 & \cdots ① \\ y-z=-5 & \cdots ② \end{cases}$

ここで $z=t$，$u=s$ とおくと，①，②より，$x=t-s+7$，$y=t-5$,

よって，解は $x=t-s+7$，$y=t-5$，$z=t$，$u=s$　（t，s は任意の実数）

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a+1 \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1 & -a & 1 & 1+a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \end{array}\right) \quad ⊛$$

(i)　$a=-1$ のとき

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad ㋐$$

となり，係数行列と拡大係数行列の階級はともに 3 であるから解がある。

このとき㋐より解は，$x=1$，$y=-1$，$z=0$ である。

(ii)　$a \neq -1$ のとき $a \neq 0$ ならば ⊛ は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1+0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となるので，係数行列の階級が 3，拡大係数行列の階級が 4 であるから解をもたない。

一方 $a=0$ ならば

⊛ は $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ㋑となり

係数行列と拡大係数行列の階級はともに 2 であるから解がある。

このとき㋑より解は $x=1-z$，$y=z$

つまり　$x=1-t$，$y=t$，$z=t$　　（t は任意）

以上により

(i)　$a=-1$ のとき，$\begin{cases} x=1 \\ y=-1, \\ z=0 \end{cases}$　　(ii)　$a=0$ のとき，$\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$　　（t は任意の実数）

9

$e=0$ ならば，いかなる行の基本変形になっても $(A|E)$ の（3，3）成分を 1 にすることができない。

したがって，$e\neq 0$ でなければならない。その上で

(i)　$d\neq 0$ のとき

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|ccc} ad & bd & c & d & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|ccc} ab-bc & 0 & 0 & d & -b & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} & 0 \\ 0 & d & 0 & \frac{-cd}{|A|} & 1+\frac{bc}{|A|} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-c}{|A|} & \frac{d}{|A|} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{array}\right)$$

となる。以上より，求める条件は $(ad-bc)e\neq 0$ であり，

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b & 0 \\ -c & a & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{ad-bc}{e} \end{pmatrix}$$

$|A|=ad-bc=0$ のとき第 1 行に関する方程式 $(ad-bc)x+0y+0z=d\neq 0$ は成立しないので

$ad-bc\neq 0$　㋐

(ii)　一方，$d=0$ のとき（このとき㋐より $bc\neq 0$ なので $b\neq 0$ かつ $c\neq 0$）

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & b & 0 & 1 & \frac{-a}{c} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} & \frac{-a}{bc} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} & \frac{-a}{bc} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{array}\right)$$

となり（i）の A^{-1} で $d=0$ としたものになっている。

10

⑴ $X^2=(D+S+A)(D+S+A)=\{D^2+S^2+A^2+(DS+SD)\}+\{(SA+AS)+(DA+AD)\}$ であるが

(i) ${}^t(D^2)={}^tD\,{}^tD=DD=D^2$, ${}^t(S^2)={}^tS\,{}^tS=SS=S^2$, ${}^t(A^2)={}^tA\,{}^tA=(-A)(-A)=A^2$,

${}^t(DS+SD)={}^t(DS)+{}^t(SD)={}^tS\,{}^tD+{}^tD\,{}^tS=SD+DS$ より

${}^t\{D^2+S^2+A^2+(DS+SD)\}=D^2+S^2+A^2+(DS+SD)$,

つまり $D^2+S^2+A^2+(DS+SD)$ は対称行列である。

一方，

(ii) ${}^t(SA+AS)={}^tA\,{}^tS+{}^tS\,{}^tA=(-A)S+S(-A)=-(AS+SA)$,

${}^t(AD+DA)={}^tD\,{}^tA+{}^tA\,{}^tD=D(-A)+(-A)D=-(DA+AD)$ より

${}^t\{(SA+AS)+(DA+AD)\}=-\{(SA+AS)+(DA+AD)\}$,

つまり $(SA+AS)+(DA+AD)$ は交代行列である。

従って，

$S'=D^2+S^2+A^2+(DS+SD)$

$A'=(SA+AS)+(DA+AD)$ とおくと $X^2=S'+A'$ となる。

⑵ $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ より ${}^tX=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ である。

$X+{}^tX$ が対称行列，$X-{}^tX$ が交代行列になることに注意して（新版線形代数 P.87），

$$\frac{1}{2}(X+{}^tX)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b+c \\ b+c & 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}(X-{}^tX)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$ をつくる。

このとき辺々加えると $X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b+c \\ b+c & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$ であるから

$D=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$，$S=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b+c \\ b+c & 0 \end{pmatrix}$，$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$ とすればよい。

11　三つの与式をまとめると

$$A\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$ であるから $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ について B^{-1} を求め，

両辺右からこれを掛ければよい。

B^{-1} を求めると

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3\end{array}\right)$$ より $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ である。

$$ABB^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+2+2 & 0-2-1 & -2-2-3\\ 1-2+0 & 0+2+0 & -1+2+0\\ 1+2+2 & 0-2-1 & -1-2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3 & -7\\ -1 & 2 & 1\\ 5 & -3 & -6\end{pmatrix}$$ より $A=\begin{pmatrix}6 & -3 & -7\\ -1 & 2 & 1\\ 5 & -3 & -6\end{pmatrix}$