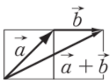
新版線形代数 演習 改訂版　解答

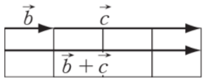
１章　ベクトル

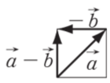
１．平面ベクトル

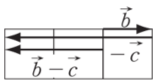
A 問題

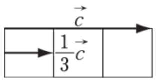
１

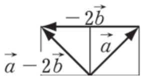


⑵ 



⑷ 



⑹ 

２

⑴ $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)-\left(4\vec{a}-\vec{b}\right)=-2\vec{a}+4\vec{b}$

⑵ $4(\vec{a}-3\vec{b})+3(\vec{b}-2\vec{a})$

$=4\vec{a}-12\vec{b}+3\vec{b}-6\vec{a}=-2\vec{a}-9\vec{b}$

３

⑴ $2\vec{x}-\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{x}$

$\Longrightarrow 2\vec{x}-\vec{x}=\vec{a}+\vec{a}-\vec{b}$

$\Longrightarrow \vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$

⑵ $3(\vec{x}-\vec{a})=\vec{x}-2(\vec{b}+\vec{x})$

$\Longrightarrow 3\vec{x}-3\vec{a}=\vec{x}-2\vec{b}-2\vec{x}$

$\Longrightarrow 4\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b}$

$\Longrightarrow \vec{x}=\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

4

⑴ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

⑵ $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=\vec{b}-2\vec{a}$

⑶ $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-2\vec{a}-\vec{a}=\vec{b}-3\vec{a}$

⑷ $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}=2(\vec{b}-\vec{a})$　（⑴より）

$|\overrightarrow{AD}|=4$　より $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

⑸ $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CE}=\vec{b}-3\vec{a}$　（⑶より）

$|\overrightarrow{BF}|=2\sqrt{3}$　より $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\vec{b}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\vec{b}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}$

5

⑴ $3\vec{a}=3(-1,\ 1)=(-3,\ 3)$

⑵ $2\vec{b}-\vec{c}=2(2,\ -6)-(1,\ -3)=(4-1,\ -12+3)=(3,\ -9)$

⑶ $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=(-1,\ 1)-(2,\ -6)+(1,-3)$

$=(-1-2+1,\ 1+6-3)=(-2,\ 4)$

6

⑴ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-1,\ 1)-(2,\ -1)=(-3,\ 2)$

$\overrightarrow{AB}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

⑵ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}$

$=(-1,\ 1)+(-2,\ -3)-2(2,\ 1)$

$=(-1-2-4,\ 1-3+2)=(-7,\ 0)$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\sqrt{(-7)^2+0^2}=7$

⑶ $2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})$

$=2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$=(2,\ -1)-2(-1,\ 1)+(-2,\ -3)$

$=(2+2-2,\ -1-2-3)=(2,\ -6)$

7

$2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}=2(3,\ -1)+3(-1,\ 2)$

$\qquad =(6-3,\ -2+6)=(3,\ 4)$ ㋐

一方，$\overrightarrow{b}+t\overrightarrow{c}=(-1,\ 2)+t(7,\ 6)$

$\qquad =(-1+7t,\ 2+6t)$ ㋑

㋐と㋑が平行なので次の式が成り立つ。

$k(3,\ 4)=(-1+7t,\ 2+6t)$

よって $\begin{cases}3k=-1+7t\\4k=2+6t\end{cases}$

従って $\dfrac{-1+7t}{3}=\dfrac{1+3t}{2}-2+14t=3+9t$

$5t=5$ よって $t=1$

8

(1) $\overrightarrow{c}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$

$\Longrightarrow(-7,\ 7)=m(2,\ 1)+n(-1,\ 3)$

$\Longrightarrow(2m-n,\ m+3n)=(-7,\ 7)$

$\therefore\ 2m-n=7,\ m+3n=7$

この連立方程式を解いて $m=-2,\ n=3$

よって $\overrightarrow{c}=-2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$

(2) $\overrightarrow{d}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$

$\Longrightarrow(9,\ 1)=m(2,\ 1)+n(-1,\ 3)$

$\Longrightarrow(2m-n,\ m+3n)=(9,\ 1)$

$\therefore\ 2m-n=9,\ m+3n=1$

この連立方程式を解いて $m=4,\ n=-1$

よって $\overrightarrow{d}=4\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$

9

(1) 係数を比較して

$x-1=2,\ -(1-y)=1$

$\Longrightarrow x=3,\ y=2$

(2) 係数を比較して

$2x-y=0,\ x+2y=0$

$\Longrightarrow x=0,\ y=0$

10

⑴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=5\cdot2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

⑵ $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot3+(-1)\cdot5=7$

11

⑴ $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1\cdot3+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}$

$$=\frac{6}{\sqrt{4}\sqrt{12}}=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これより　$\theta=\frac{\pi}{6}$

⑵ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}+1\cdot\left(\sqrt{2}-2\right)=0$

∴　$\cos\theta=0$

これより　$\theta=\frac{\pi}{2}$

12

⑴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=6\cdot k+(-1)\cdot4=0$

より　$k=\frac{2}{3}$

⑵ $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-2)+(k+1)\cdot k=0$

より

$k^2+k-2=0$

$\Longrightarrow(k-1)(k+2)=0$

$\Longrightarrow k=-2,\ k=1$

13

⑴ $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$

$=4\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=4|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-\left|\vec{b}\right|^2$

$=4|\vec{a}|^2-\left|\vec{b}\right|^2$

⑵ $\left|\vec{a}+3\vec{b}\right|^2$

$=\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+3\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}\cdot\vec{a}+9\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9\left|\vec{b}\right|^2$

14

⑴ $\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$

$=2|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-3\left|\vec{b}\right|^2$

$=2\cdot 2^2-5\cdot(-1)-3\cdot 3^2$

$=-14$

⑵ $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2$

$=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2$

$=2^2+4\cdot(-1)+4\cdot 3^2$

$=36$

$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|\geqq 0$ であるから

$\therefore\quad \left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=6$

15

⑴ $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=2$

$\Longrightarrow\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=2^2$

$\Longrightarrow|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2=4$

$\Longrightarrow 2^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=4$

$\Longrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

⑵ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

これより　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

16

⑴ $\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}}{3+1}=\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}$

⑵ $\dfrac{(-1)\vec{a}+3\vec{b}}{3+(-1)}=\dfrac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}$

17　点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする。△ABC，△DEFの重心をそれぞれ$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG_1}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG_2}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2\vec{b}+3\vec{c}}{3+2}+\frac{2\vec{c}+3\vec{a}}{3+2}+\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{3+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5\vec{a}+5\vec{b}+5\vec{c}}{5}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$\therefore\quad\overrightarrow{\mathrm{OG_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OG_2}}$

したがって，$\mathrm{G_1}$と$\mathrm{G_2}$は一致。

18

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}$ ㋐，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$ ㋑

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{-\vec{b}+2\vec{c}}{2+(-1)}=-\vec{b}+2\vec{c}$ ㋒

であるから

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$=\dfrac{1}{2}\vec{c}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$　（㋐，㋑より）

一方，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$=\left(-\vec{b}+2\vec{c}\right)-\dfrac{1}{3}\vec{b}$　（㋐，㋒より）

$=2\vec{c}-\dfrac{4}{3}\vec{b}$

⑵ ⑴より

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{3\vec{c}-2\vec{b}}{6}$　…①

一方 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\dfrac{2\left(3\vec{c}-2\vec{b}\right)}{3}=\dfrac{4\left(3\vec{c}-2\vec{b}\right)}{6}=4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$　…②

よって，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

⑶ $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{PR}}$

よって，点 Q は PRを 1 : 3 に内分する点。

19

⑴ 直線上の任意点を $(x,\ y)$ とすると

$(x,\ y)=(2,\ 1)+t(3,\ -2)$

$=(2+3t,\ 1-2t)$

よって $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-2t \end{cases}$

⑵ 直線上の任意点を $(x,\ y)$ とすると，方向ベクトルが

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=(3,\ 1)+(1,\ 2)=(4,\ 3)$，

$\mathrm{A}(-3,\ -1)$ を通ることより

$(x,\ y)=(-3,\ -1)+t(4,\ 3)$

$=(-3+4t,\ -1+3t)$

よって $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=-1+3t \end{cases}$

⑶ 直線上の任意点を $(x,\ y)$ とすると，方向ベクトルが

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\quad = (-5,\ -2) + (1,\ 2) = (-4,\ 0)$,

$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通ることより

$(x,\ y) = (1,\ 2) + t(-4,\ 0)$

$\qquad = (1 - 4t,\ 2)$

よって $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 \end{cases}$

t は任意なので $y = 2$

⑷ 直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ だが

$\overrightarrow{n} = (-1,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x - 4,\ y + 2)$ より

$-(x - 4) + 3(y + 2) = 0$

よって　$x - 3y - 10 = 0$

⑸ 直線 $2x + 3y = 0$ の法線ベクトルの一つは $(2,\ 3)$ であるから

これは求める直線の方向ベクトルである。

従って，求める直線上の任意点を $(x,\ y)$ とすると，$(4,\ 2)$ を通ることより

$$\frac{x - 4}{2} = \frac{4 - 2}{3}$$

⑹ 円周上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}| = 2$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = 4$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (x - 3,\ y + 1)$ だから

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

20

$\begin{cases} 5\overrightarrow{x} - 2\overrightarrow{y} = 4\overrightarrow{a} & \cdots ① \\ \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} = -\overrightarrow{a} & \cdots ② \end{cases}$

①−2×②から

$3\overrightarrow{x} = 6\overrightarrow{a}$

$\therefore\ \overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{a}\quad \cdots ③$

これを②に代入して

$2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{y} = -\overrightarrow{a}$

$\therefore\ \overrightarrow{y} = 3\overrightarrow{a}\quad \cdots ④$

③と④から$\overrightarrow{a}$を消去すれば

$$\overrightarrow{y} = \frac{3}{2}\overrightarrow{x}$$

したがって　$\overrightarrow{x} \parallel \overrightarrow{y}$

21　Aを始点とするベクトルで表すと

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって　$3\,\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-3\,\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ したがって $3\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　$\therefore$　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって，P は AC 上にあり，AC を 1：2 に内分する。

22

⑴ $\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(-1,\ 1)$

$=(2-t,\ 1+t)$　…㋐

$\vec{a}+t\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ より

$\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)/\!/\,\vec{c}$ となる条件は

$\vec{a}+t\vec{b}=m\vec{c}$（$m$ は実数）

すなわち $(2-t,\ 1+t)=(3m,\ -2m)$

$\therefore\ \begin{cases}2-t=3m & \cdots① \\ 1+t=-2m & \cdots②\end{cases}$

①，②より $m=3$，$t=-7$

⑵ $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|=\sqrt{(2-1)^2+(1+t)^2}$　（㋐より）

$=\sqrt{2t^2-2t+5}$

$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|=\sqrt{17}$ より $\sqrt{2t^2-2t+5}=\sqrt{17}$

$\Longrightarrow t^2-t-6=0$

$\Longrightarrow (t+2)(t-3)=0$

$\therefore$　$t=-2,\ 3$

⑶ $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2=2t^2-2t+5=2(t^2-t)+5$

$=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$　は　$t=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{9}{2}$ をとる。

よって $t=\frac{1}{2}$ のとき　$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ の最小値は　$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

23

⑴ $(\vec{a}+y\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})$ より $(\vec{a}+y\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$

$\vec{a}+y\vec{b}=(2,\ 3)+y(3,\ 2)$

$=(2+3y,\ 3+2y)$

$\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 3)+(3,\ 2)=(5,\ 5)$ より

$(2+3y)\cdot 5+(3+2y)\cdot 5=0$

よって　$y=-1$

⑵ $\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos 45^\circ$ より

$2+3x=\sqrt{13}\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdots$①

両辺を 2 乗して整理すると

$5x^2+24x-5=0$

$\Longrightarrow(5x-1)(x+5)=0$

$\therefore\quad x=\dfrac{1}{5},\ -5$

このうち①を満たすものは　$x=\dfrac{1}{5}$

24　BP : PE $=s:1-s$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

$=(1-s)\vec{b}+\dfrac{s}{3}\vec{c}\quad\cdots$①

CP : PD $=t:1-t$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\dfrac{3}{4}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\quad\cdots$②

①，②から

$(1-s)\vec{b}+\dfrac{s}{3}\vec{c}=\dfrac{3}{4}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

ここで，$\vec{b}\neq\vec{0}$ ，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{c}$であるから

$1-s=\dfrac{3}{4}t$ かつ $\dfrac{s}{3}=1-t$

これを解いて　$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{8}{9}$

$s=\dfrac{1}{3}$ を①に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{9}\vec{c}$

25

⑴　円周上の任意の点の位置ベクトルを $\overrightarrow{P}$とする。

$\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}=(x-2,\ y-3)$

$\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}=(x+4,\ y+1)$

$(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b})=0$　より　$(x-2)(x+4)+(y-3)(y+1)=0$

これを整理して

$(x+1)^2+(y-1)^2=13$

⑵　$|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{AC}|$ より $|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2$

これに　$\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c}=(x-4,\ y-3)$，$|\overrightarrow{AC}|^2=(-2)^2+(-2)^2=8$

を代入すれば

$(x-4)^2+(y-3)^2=8$

次に，A における接線上の点を P$(x,\ y)$ とすると，

$\overrightarrow{AP}=(x-2,\ y-1)$ で，$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{CA}$ であるから

$(-2)(x-2)+(-2)(y-1)=0$

∴　$x+y=3$

発展問題

26

⑴　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-2,\ 2)$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\sqrt{10}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\sqrt{2}$

よって

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}=\frac{4}{\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$0<\theta<\pi$ から sine $\theta>0$ だから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

⑵　面積　$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=4$

27　△OABの面積Sは例題 2 より

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$$　で

ここに

$|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2$，$\left|\vec{b}\right|^2=b_1^2+b_2^2$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ を代入して整理する。

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$

ここで，

$$\begin{aligned}&(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2\\&=a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2-a_1^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2-a_2^2b_2^2\\&=a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2=(a_1b_2+a_2b_1)^2\end{aligned}$$

したがって，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

新版線形代数 演習 改訂版　解答

１章　ベクトル

２節　空間ベクトル

28

⑴　$\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

⑵　$\sqrt{(-1-1)^2+(2+3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{33}$

29

⑴　$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{AC}=3\sqrt{2}$ だから $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}$ の二等辺三角形

⑵　$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=\sqrt{14}$，$\mathrm{CA}=\sqrt{5}$ より $\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2$ だから
$\angle\mathrm{A}=90^\circ$の直角三角形

30

⑴　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\vec{a}+\vec{c}$

⑵　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{FC}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

⑶　$\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\overrightarrow{\mathrm{GH}}+\overrightarrow{\mathrm{HB}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

⑷　$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}+\overrightarrow{\mathrm{GF}}+\overrightarrow{\mathrm{FM}}=\vec{c}-\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

31

⑴　$2\vec{a}=2(1,\ -2,\ 1)=(2,\ -4,\ 2)$
$|2\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

⑵　$4\vec{a}-\vec{b}=4(1,\ -2,\ 1)-(-2,\ 1,\ 6)$
$=(4+2,\ -8-1,\ 4-6)=(6,\ -9,\ -2)$
$\left|4\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{6^2+(-9)^2+(-2)^2}=\sqrt{121}=11$

⑶　$3\vec{a}-2\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=3\vec{a}-4\vec{a}+2\vec{b}=-\vec{a}+2\vec{b}$
$=-(1,\ -2,\ 1)+2(-2,\ 1,\ 6)$
$=(-1-4,\ 2+2,\ -1+12)=(-5,\ 4,\ 11)$
$\left|3\vec{a}-2\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\right|=\sqrt{(-5)^2+4^2+11^2}=\sqrt{162}=9\sqrt{2}$

32

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ -1,\ -1)-(2,\ -3,\ 1)$

$=(3-2,\ -1+3,\ -1-1)$

$=(1,\ 2,\ -2)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ -1,\ 2)-(2,\ -3,\ 1)=(-2,\ 2,\ 1)$ より

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 2,\ -2)+(-2,\ 2,\ 1)=(-1,\ 4,\ -1)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

⑶ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0,\ -1,\ 2)-(3,\ -1,\ -1)=(-3,\ 0,\ 3)$ より

$2\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2(-3,\ 0,\ 3)-(-2,\ 2,\ 1)=(-4,\ -2,\ 5)$

$|2\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+5^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

33 D を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 2,\ 2)$ $\quad\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(-3-x,\ 5-y,\ -1-z)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ とおくと $\begin{cases}2=-3-x\\2=5-y\\2=-1-z\end{cases}$

よって $x=-5,\ y=3,\ z=-3$

従って D は$(-5,\ 3,\ -3)$

34 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ となるには $\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k が存在すればよいので

$(6,\ m,\ n)=k(2,\ -1,\ -2)=(2k,\ -k,\ -2k)$ より $2k=6\quad\therefore\quad k=3$

これを $m=-k,\ n=-2k$ に代入して $m=-3,\ n=-6$

35 $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{9}=3$ より

$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{3}(-1,\ -\sqrt{6},\ \sqrt{2})=\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{\sqrt{6}}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$\vec{a}$ と逆向きの単位ベクトルは

$-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ なので$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

36

⑴ $l\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\0\\-1\end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{cases} l+\ \ m+2n=7 & ㋐\\ 4l-2m-2n=0 & ㋑\\ -l\qquad\ +n\ =-1 & ㋒\end{cases}$$

$-2l\qquad +2n=-2$ ㋒′

㋐+㋑ より $5l-m=7$ よって $10l-2m=14$ ㋓

㋑+㋒′ より $2l-2m=-2$ ㋔

㋓−㋔ より $8l=16$ よって $\underline{l=2}$

㋒ より $\underline{n=1}$ ㋐ より $2+m+2=7$

よって $\underline{m=3}$

以上より $\underline{\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}}$

⑵ $l\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{cases} l+\ \ m+2n=3 & ㋐\\ 4l-2m-2n=6 & ㋑\\ -l\qquad\ +n\ =2 & ㋒\end{cases}$$

$-2l\qquad +2n\ =4$ ㋒′

㋐+㋑ より $5l-m=9$ よって $10l-2m=18$ ㋓

㋑+㋒′ より $2l-2m=10$ ㋔

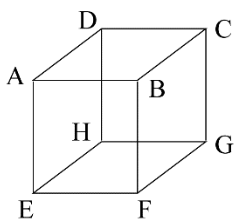
㋓−㋔ より $8l=8$ よって $\underline{l=1}$

㋒ より $\underline{n=3}$ ㋐ より $1+m+6=3$

よって $\underline{m=-4}$

以上より $\underline{\vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}+3\vec{c}}$

37



⑴ $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

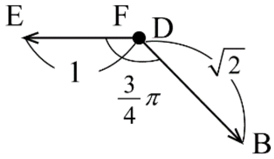
⑵ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{HG}}\right|\cos 0$

$\qquad\qquad=1\times1\times1=1$

⑶ $\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{DB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{FE}}\right|\cos\frac{3}{4}\pi$

$$=\sqrt{2}\times1\times\frac{-1}{\sqrt{2}}=-1$$

$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ の
始点を一致させる。



⑷ $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{HF}}\right|\cos\frac{\pi}{2}=0$

（別解 1）

A を基点として　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{e}$

とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$

$\overrightarrow{\mathrm{HF}}=-\vec{d}+\vec{b}$　と表せるので

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\left(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}\right)\cdot\left(-\vec{d}+\vec{b}\right)$

$=-\vec{b}\cdot\vec{d}+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{d}\right|^2+\vec{d}\cdot\vec{b}-\vec{e}\cdot\vec{d}+\vec{e}\cdot\vec{b}$

$=0+1-1+0-0+0=0$

（別解 2）

A を原点 $(0,\ 0,\ 0)$，B を $(1,\ 0,\ 0)$，D を $(0,\ 1,\ 0)$，

E を $(0,\ 0,\ -1)$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1,\ 1,\ -1)$

$\overrightarrow{\mathrm{HF}}=(1,\ -1,\ 0)$ と表せるので

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}}=1\times1+1\times(-1)+(-1)\times0=0$

38

⑴ $\vec{p}=l\,\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$　とおくと

$(7,\ 0,\ -1)=l(1,\ 4,\ -1)+m(1,\ -2,\ 0)+n(2,\ -2,\ 1)$

$=(l+m+2n,\ 4l-2m-2n,\ -l+n)$

であるから

$$\begin{cases} l+m+2n=7 & \cdots① \\ 4l-2m-2n=0 & \cdots② \\ -l+n=-1 & \cdots③ \end{cases}$$

①＋②÷2 より　$3l+n=7$　…④

③，④を解いて　$l=2$，$n=1$

これを①に代入して　$m=3$

よって　$\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$

⑵ $\overrightarrow{q}=l\,\overrightarrow{a}+m\overrightarrow{b}+n\overrightarrow{c}$ とおくと

$$(3,\ 6,\ 2)=l(1,\ 4,\ -1)+m(1,\ -2,\ 0)+n(2,\ -2,\ 1)$$
$$=(l+m+2n,\ 4l-2m-2n,\ -l+n$$

であるから

$$\begin{cases} l+m+2n=3 & \cdots ① \\ 4l-2m-2n=6 & \cdots ② \\ -l+n=2 & \cdots ③ \end{cases}$$

①＋②÷2 より $3l+n=2$ $\cdots$④

③，④を解いて $l=1,\ n=3$

これを①に代入して $m=-4$

よって $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}-4\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}$

39

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\sqrt{2}\cdot 1\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HG}}=1\cdot 1\cdot\cos(\,0\,)=1$

⑶ $\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\sqrt{2}\cdot 1\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=-1$

⑷ $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

40

⑴ $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1\cdot 2+0\cdot(-1)+1\cdot 1=3$

$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$ より $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

⑵ $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(-2)\cdot 4+2\cdot(-5)+1\cdot 3=-15$

$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=3$

$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{4^2+(-5)^2+3^2}=5\sqrt{2}$ より $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\dfrac{-15}{3\cdot 5\sqrt{6}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$

41

⑴ $\overrightarrow{a}=(2,\ 1,\ -2)$，$\overrightarrow{b}=(1,\ 1,\ 0)$ の両方に垂直な単位ベクトルを $\overrightarrow{n}=(x,\ y,\ z)$ とすると

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n}=0 \Longrightarrow 2x+y-2x=0$ …①

$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{n}=0 \Longrightarrow x+y=0$ …②

$|\overrightarrow{a}|^2=1^2 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2=1$ …③

②から $y=-x$ …④　これを①に代入して $z=\frac{1}{2}x$ …⑤

④，⑤を③に代入して

$$x^2+(-x)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=1 \Longrightarrow x^2=\frac{4}{9}$$

$$\Longrightarrow x=\pm\frac{2}{3}$$

これを④，⑤に代入して

$$y=\mp\frac{2}{3},\ z=\pm\frac{1}{3}$$

$\therefore\quad \overrightarrow{n}=\left(\pm\frac{2}{3},\ \mp\frac{2}{3},\ \pm\frac{1}{3}\right)$ （複合同順）

42

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{1+2}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{(-2)\vec{a}+\vec{b}}{1+(-2)}=2\vec{a}-\vec{b}$$

$\vec{a}=(1,\ 3,\ 2)$，$\vec{b}=(-8,\ 2,\ -1)$ を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\{(2,\ 6,\ 4)+(-8,\ 2,\ -1)\}=\frac{1}{3}(-6,\ 8,\ 3)$$

よって　P は $\left(-2,\ \frac{8}{3},\ 1\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2(1,\ 3,\ 2)-(-8,\ 2,\ -1)=(10,\ 4,\ 5)$

よって　Q は $(10,\ 4,\ 5)$

43

⑴　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OL}}+2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{5}=\frac{1}{5}\left(3\cdot\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}+2\cdot\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

また，Gは△OBC の重心だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

⑵　⑴より

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\frac{1}{5}\left(2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)-\vec{a}=\frac{1}{5}\left(\vec{b}+\vec{c}-3\vec{a}\right)\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)-\vec{a}=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}-3\vec{a}\right)\cdots②$$

②より$\vec{b}+\vec{c}-3\vec{a}=3\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

これを①に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

よって，3点A，N，Gは一直線上にある。

44

⑴ $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-(-3)}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$

$$\Longrightarrow x-2=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3}$$

⑵ $\dfrac{x-(-1)}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{x+1}{2}=3-y=\frac{z-\sqrt{2}}{2}$$

⑶ 方向ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(-1-1,\ 3-2,\ 2-4\right)=(-2,\ 1,\ -2)$ で

かつ A を通るので $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$

よって　$\dfrac{x-1}{-2}=y-2=\dfrac{z-4}{-2}$

⑷ 方向ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(-1-1,\ 2-2,\ 2-4\right)=(-2,\ 0,\ -2)$ で

かつ A を通るので $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{z-4}{-2}$，$y=2$

よって　$x-1=\mathrm{z}-4$，$y=2$

⑸ 方向ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(-1-5,\ 3-6,\ 2-2\right)=(-6,\ -3,\ 0)$ で

かつ A を通るので $\dfrac{x-5}{-6}=\dfrac{y-6}{-3}$，$z=2$

よって　$\dfrac{x-5}{2}=y-6$，$z=2$

45

⑴ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}=t$ と変形できるので　$\overrightarrow{u_1}=(2,\ -2,\ -1)$

⑵ $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-1}{-3}$ と変形できるので　$\overrightarrow{u_2}=\left(-4,\ 5,\ -3\right)$ であるから

$|\overrightarrow{u_2}|=\sqrt{(-4)^2+5^2+(-3)^2}=5\sqrt{2}$

⑶ ⑴より

$|\overrightarrow{u_1}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\dfrac{-8-10+3}{3\cdot 5\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これより　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

46

⑴ 平面上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(x-2,\ y+3,\ z-1\right)\perp\vec{n}$

したがって，$1(x-2)+(-2)(y+3)+3(z-1)=0$

∴ $x-2y+3z-11=0$

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(3,\ -1,\ -1\right)-\left(2,\ -3,\ 1\right)=(1,\ 2,\ -2)$

これが求める平面に垂直なベクトルであり，平面は $\mathrm{A}(2,\ -3,\ 1)$ を通るので

$1(x-2)+2(y+3)-2(z-1)=0$

∴ $x+2y-2z+6=0$

⑶ 求める平面 α は平面 $x-2y+3z=5$ に平行だから，

どちらの平面も $(1,\ -2,\ 3)$ を法線ベクトルの一つとしてもつ。

α は $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$ を通るので $1\cdot(x-1)+(-2)(y-2)+3(z-3)=0$

よって　$x-2y+3z-6=0$

47

⑴ $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=(\sqrt{3})^2=3$

⑵ 原点 $(0,\ 0,\ 0)$ から点 $(1,\ 1,\ \sqrt{2})$ までの距離が求める球面の半径 r を与えるので

$r^2=(1-0)^2+(1-0)^2+\left(\sqrt{2}-0\right)^2=4=2^2$

∴ $x^2+y^2+z^2=2^2$

⑶ 中心 C は AB の中点なので　$\mathrm{C}\left(\dfrac{5+0}{2},\ \dfrac{6+1}{2},\ \dfrac{4-1}{2}\right)$

半径は OC の長さなので

$$r^2=\left(0-\frac{5}{2}\right)^2+\left(1-\frac{7}{2}\right)^2+\left(-1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{75}{4}$$

よって　$\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{75}{4}$

⑷ 中心 $(-1,\ 4,\ 2)$ から yz 平面 $x=0$ に垂線をおろすと $(0,\ 4,\ 2)$ で交わることになるので，

求める球面の半径は 1

よって　$(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=1$

B 問題

48　x 軸上の求める点を $\mathrm{P}(x,\ 0,\ 0)$ とおくと $\mathrm{PA}^2=\mathrm{PB}^2$ より

$(x-1)^2+4+9=(x-3)^2+16+25$

これより　$x=9$　　∴　$(9,\ 0,\ 0)$

49　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}\right)$　…①

ところで，線分PQの中点をMとすると

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right)$,

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{d}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$,

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EQ}}=\vec{e}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$　であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{d}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{e}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}\right)$　…②

①＝②であるから$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

よって，Rは線分 PQ の中点である。

50

⑴　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　より　$2(x+3)+x(x+1)+(x-3)x^2=0$

よって　$x^3-2x^2+3x+6=0$

左辺に $x=-1$ を代入すると 0 なので因数定理より左辺は $x+1$ でわりきれる。

従って　$(x+1)(x^2-3x+6)=0$

x は実数であるから $x=-1$

⑵　$\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1\cdot(x+1)+(-1)\cdot(-5)+2\cdot x}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{(x+1)^2+25+x^2}}$

∴　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3x+6}{\sqrt{6}\sqrt{2x^2+2x+26}}$

∴　$6=\sqrt{x^2+x+13}=2(3x+6)$

∴　$\sqrt{x^2+x+13}=x+2\cdots$①

∴　$x^2+x+13=(x+2)^2=x^2+4x+4$

∴　$x=3$　(これは①を満たす)

50　つづき

(3)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=x+8+6(x+1)=0$　より　$x=-2$　…①

$\vec{b}\cdot\vec{c}=-2x^2-4+6(x+4)=0$ より $-2x^2+6x+20=0$

つまり，$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)=0$

よって　$x=-2,\ 5$　…②

$\vec{c}\cdot\vec{a}=-2x-2+(x+4)(1+1)=0$ より $x^2+3x+2=0$

よって　$x=-2,\ -1$　…③

①，②，③のいずれも満たす x は　$x=-2$

51　$|\vec{a}|=\sqrt{4+1+4}=3$，

$|\vec{b}|=\sqrt{16+1+64}=9$ より $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向の単位ベクトルは

それぞれ　$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$，$\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\left(\dfrac{4}{9},\ \dfrac{1}{9},\ -\dfrac{8}{9}\right)$

であり，これらのなす平行四辺形は菱形である。

よって　$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\left(\dfrac{10}{9},\ \dfrac{-2}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$　…①　は$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を 2 等分するベクトルである。

①の大きさは　$\sqrt{\left(\dfrac{10}{9}\right)^2+\left(\dfrac{-2}{9}\right)^2+\left(\dfrac{2}{9}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{108}}{9}=\dfrac{6\sqrt{3}}{9}$

よって，①の方向の単位ベクトルは

$$\frac{9}{6\sqrt{3}}\left(\frac{10}{9},\ \frac{-2}{9},\ \frac{2}{9}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}(5,\ -1,\ 1)=\left(\frac{5\sqrt{3}}{9},\ -\frac{\sqrt{3}}{9},\ \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

52　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}$　…①

ここで一辺の長さをlとすると。

$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=l$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}=l\cdot l\cdot\cos 60°=\dfrac{l^2}{2}$　であるから

①$=\dfrac{l^2}{2}-\dfrac{l^2}{2}=0$　　∴　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

53

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(4,\ 2,\ 3\right)+t\left(-9,\ -3,\ 3\right)$

$=\left(4-9t,\ 2-3t,\ 3+3t\right)$…① と表せる。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-36+81t-6+9t+9+9t=0$

よって $t=\dfrac{1}{3}$ ①より H は$\left(1,\ 1,\ 4\right)$

⑵ $\mathrm{AB}=\sqrt{(-9)^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{99}$，$\mathrm{OH}=\sqrt{1^2+1^2+4^2}=\sqrt{18}$ より

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{99}\sqrt{18}=\dfrac{9}{2}\sqrt{66}$

54

⑴ $\vec{p}=\vec{a}+t\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$ …①

∴ $\vec{p}=(1-t)\,\vec{a}+t\,\vec{b}$

⑵ ①の式を成分で表すと

$\left(x,\ y,\ z\right)=\left(1,\ 1,\ 2\right)+t\left(-2,\ 1,\ -1\right)$

$=\left(1-2t,\ 1+t,\ 2-t\right)$ …②

zx 平面との交点は $y=0$ のときだから②より $t=-1$

このとき②から $x=1-2(-1)=3$，$z=2-(-1)=3$

よって $\left(3,\ 0,\ 3\right)$

発展問題

55 点 D が平面 ABC 上にある条件は

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ $(s+t+u=1)$ であるから

$\left(x,\ y,\ z\right)=s\left(1,\ -1,\ 1\right)+t\left(2,\ -1,\ -1\right)+u(-1,\ 2,\ -4)$

$=\left(s+2t-u,\ -s-t+2u,\ s-t-4u\right)$

$$\begin{cases} x=s+2t-u & \cdots① \\ -4=-s-t+2u & \cdots② \\ 2=s-t-4u & \cdots③ \end{cases}$$

これと $1=s+t+u$ …④ を連立して解くと

①＋②より $x-4=t+u$，②＋③より$-2=-2t-2u$，③－④より $1=-2t-5u$ であるから

$s=0$，$t=2$，$u=-1$，$x=5$

1 章の問題

1

⑴ $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$|\overrightarrow{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 = -5$

⑵ $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 　これより　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$

⑶ $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2 + 2\,\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2$

$= 5 + 2 \cdot (-5) + 10 = 5$

2

⑴ $(4,\ -2) = k(x,\ 4) = (kx,\ 4k)$ となる実数 k がある。

$-2 = 4k$ より $k = -\dfrac{1}{2}$

これを $4 = kx$ に代入して $x = -8$

⑵ $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{q} = 0$ より $4 \cdot 2 + (-2) \cdot y = 0$

よって　$y = 4$

3　$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+2}\right) = \dfrac{2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{9}$

4　垂直なベクトルの1つは $(3,\ -2)$

$(3,\ -2) \cdot (x,\ y) = 0$ となる $x,\ y$ を 1 組選ぶと,

平行なベクトルの 1 つは $(2,\ 3)$

5　直線の方向ベクトルの 1 つは $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (1,\ 2,\ 3) - (-1,\ 5,\ -2) = (2,\ -3,\ 5)0$

$\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$ を通るので

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{5}$$

6　直線 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z}{6}$ の方向ベクトルは $(2,\ -3,\ 6)$

直線 $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-1}{a}$ の方向ベクトルは $(3,\ 4,\ a)$

この 2 つの直線が垂直になるには　$(2,\ -3,\ 6) \perp (3,\ 4,\ a)$

よって，$2 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 + 6 \cdot a = 0$　∴　$a = 1$

1章の問題　つづき

7　平面 $2x+3y-bz+2=0$ の法線ベクトルは $(2,\ 3,\ -b)$,

平面 $4x+cy-8z+5=0$ の法線ベクトルは $(4,\ c,\ -8)$,

これらが平行であれば2平面は平行である。

よって $(2,\ 3,\ -b)=k(4,\ c,\ -8)=(4k,\ ck,\ -8k)$ となる実数 k が存在すればよい。

$2=4k$ から $k=\dfrac{1}{2}$

これを $ck=3,\ -8k=-b$ に代入すれば $c=6,\ b=4$

$\therefore\ \ b=4,\ c=6$

8　点 $(-2,\ 2,\ -1)$ を中心とし，半径2の球の方程式は

$(x+2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$

これを展開すれば

$x^2+4x+y^2-4y+z^2+2z+5=0$

これと $x^2+y^2+z^2+mx+ay+bz+n=0$ の係数を比較して

$m=4,\ n=5$

9　求める平面に垂直なベクトルは

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(2-1,\ 3-(-2),\ 4-(-3)\right)=(1,\ 5,\ 7)$

点 $\mathrm{A}(1,\ -2,\ -3)$ を通って，ベクトル $(1,\ 5,\ 7)$ に

垂直な平面は $(x-1)+5(y+2)+7(z+3)=0$

$\therefore\ \ x+5y+7z+30=0$

１章の問題　つづき

10

⑴　題意から $(x-x_0)+3(y-y_0)=0$　よって　$x+3y-x_0-3y_0=0$

$$\left(\Longrightarrow y=-\frac{1}{3}(x-x_0)+y_0\right)$$

⑵　$k\vec{a}+b=(-k+t,\ 2k+3)$で

$(k\vec{a}+b)\perp\vec{c}$

$\Longrightarrow (k\vec{a}+b)\cdot\vec{c}=0$

$\Longrightarrow 1(-k+t)+3(2k+3)=0$

$\Longrightarrow t+5k+9=0$

⑶　$\left|k\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{10}$

$\Longrightarrow\ (-k+1)^2+(2k+3)^2=10$

⑷　$\begin{cases} t+5k+9=0 & \cdots① \\ (-k+t)^2+(2k+3)^2=10 & \cdots② \end{cases}$

①より$t=-5k-9$，これを②に代入すると

$(-6k-9)^2+(2k+3)^2=10$

$\Longrightarrow k^2+3k+2=0$

$\Longrightarrow (k+2)(k+1)=0$

$\therefore\quad k=-2$ または $k=-1$

①から

$k=-2\Longrightarrow t=1$

$k=-1\Longrightarrow t=-4$

$(k,\ t)=(-2,\ 1)$ または $(-1,\ -4)$

1章の問題 つづき

11

⑴ C が AB を $t:(1-t)$ に内分する点であるとして

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\cdots$① とおく。

一方，$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ はそれぞれ $\vec{a}$ の方向，$\vec{b}$ の方向の単位ベクトルであるから

これらのなす平行四辺形は菱形であり

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ は $\vec{a}$ となす角，$\vec{b}$ となす角が等しいベクトルである。

従って　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$=\dfrac{s}{|\vec{a}|}\vec{a}+\dfrac{s}{|\vec{b}|}\vec{b}$ と表せる。　…②

よって　①，②より

$$1-t=\frac{s}{|\vec{a}|}\quad\cdots③\qquad t=\frac{s}{|\vec{b}|}\quad\cdots④$$

③＋④より

$$1=\left(\frac{1}{|\vec{a}|}+\frac{1}{|\vec{b}|}\right)s\quad\text{なので}\quad s=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$$

よって②より

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a}+\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}\qquad\therefore\quad\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$$

⑵ ⑴から　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$　であるから

$$\therefore\quad\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=\frac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{\left||\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}\right|}$$

12　点 A$(1,\ 0,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$ に垂直な平面 α の方程式は

$x-1+y+z=0$　…①

原点と対称な点 P は，原点を通り方向ベクトルが $(1,\ 1,\ 1)$ の直線上にあるから，点 P の座標は $(2t,\ 2t,\ 2t)$ と置ける。このとき，原点と点 P の中点 $(t,\ t,\ t)$ は平面①上にあるので，

$$t-1+t+t=\ \text{より}\ t=\frac{1}{3}$$

したがって，点 P の座標は　$\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

13

⑴ 平面 α に垂直なベクトルは，直線 ℓ の方程式が

$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-0}{\frac{1}{2}}=\dfrac{z-0}{1}$ であるから $\left(1,\ \dfrac{1}{2},\ 1\right)$

点 $(1,\ 2,\ 3)$ を通るので α は，$x-1+\dfrac{1}{2}(y-2)+z-3=0$

すなわち $2x+y+2z-10=0$

⑵ 距離は $\boxed{教}$ P.63 点と平面の距離の公式より

$$\frac{|2a+b+2c-10|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{|2a+b+2c-10|}{3}$$

⑶ 球の中心の座標を $C(a,\ b,\ c)$ とすると，C から 4 つの平面，

平面 α，$x=0$，$y=0$，$z=0$ までの距離がすべて等しいから，

$$\frac{|2a+b+2c-10|}{3}=a=b=c$$

よって

$$\frac{|2a+a+2a-10|}{3}=a$$

$\Longrightarrow |5a-10|=3a$

$\Longrightarrow 5a-10=\pm 3a$

$\Longrightarrow 5a\mp 3a=10$

$\Longrightarrow 8a=10$ または $2a=10$

$\Longrightarrow a=\dfrac{5}{4}$ または $a=5$

ここで，原点から平面 α までの距離は $\dfrac{|2\cdot 0+1\cdot 0+2\cdot 0-10|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{10}{3}$ であるから，

中心 C が$(5,\ 5,\ 5)$ となる。

$a=5$ は不適。

したがって，求める半径は $\dfrac{5}{4}$

１章の問題 つづき

14

⑴ 原点を通って，ベクトル $(1,\ 1,\ 1)$ に垂直な平面の方程式は $x+y+z=0$ で，
交点 B はこの平面と直線の λ との交点である。直線 λ の方程式の媒介変数表示は

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 0)+t(1,\ 1,\ 1)=(1+t,\ 2+t,\ t)$$

この点が平面 $x+y+z=0$ 上にあるのは

$$(1+t)+(2+t)+t=0$$

つまり $t=-1$ のときで，このとき，交点 B の座標は $(0,\ 1,\ -1)$ である。

⑵ 原点を通り，直線 λ を含む平面に垂直なベクトルを $(a,\ b,\ c)$ とすると

$$(a,\ b,\ c)\perp(1,\ 1,\ 1) \quad かつ \quad (a,\ b,\ c)\perp(0,\ 1,\ -1)$$

つまり $a+b+c-0$ …① かつ $b-c=0$ …②

①＋②より $a+2b=0$ よって $a=-2b$

②より $c=b$

従って $\begin{cases} a=-2k \\ b=k \\ c=k \end{cases}$ $(k$は任意$)$と表せる。

したがって，求める平面の法線ベクトルの 1 つは $(2,\ -1,\ -1)$ でありかつ平面は原点を通るので
平面の方程式は $2x-y-z=0$

15

⑴ $\begin{cases} x+y+2z-1=0 & \cdots① \\ 2x-y+z+1=0 & \cdots② \end{cases}$

①と②両方をみたす点 $(x,\ y,\ z)$ のもつ条件を求めればよい。

①＋②から $3x+3z=0 \Longrightarrow -z=x$

これを①に代入して $x+y+2(-x)-1=0 \Longrightarrow y-1=x$

よって $x=y-1=-z$

16

原点から平面 π までの距離 d は $\boxed{教}$ P.63 点と平面の距離の公式より

$$d=\frac{|0-0+0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

球面 S と平面 π が交わってできる円の半径を r とすれば S の半径が 2 であることより，
$2^2=r^2+d^2$ が成り立つから

$$r^2=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$$

求める円の面積は $\pi r^2=\dfrac{11}{3}\pi$