大学研究室探訪

東邦大学

理学部　准教授　**野田健夫**

1. 東邦大学理学部について

東邦大学理学部は化学科・生物学科・生物分子科学科・物理学科・情報科学科・生命圏環境科学科の計６学科からなる。化学・生物・物理など高校の科目名を冠した学科が並ぶ中に数学科はないが，情報科学科は２年次以降に数理知能科学コースとメディア生命科学コースの２コースに分かれ，前者で数理科学の諸分野を学ぶことができるので数学科に近い。教員養成課程も設置されており中高の数学の教員免許を取得することも可能である。

2. 動的幾何ソフトウエアによる探索的学習

筆者の研究内容は本来トポロジーと力学系であるが，動的幾何ソフトウエア Cinderella (https://cinderella.de/) と出会ってから数学教育の分野にも関心を抱き，いくつかの研究を行ってきた。

動的幾何ソフトウエアとしては GeoGebra が有名だが， Cinderella も同様の機能をもつソフトウエアである。幾何学的な作図を画面上で行った後に幾何要素をマウスドラッグで動かし，作図全体の変化を観察することができる。また Cinderella にはプログラミング言語 CindyScript があり，初等幾何的な作図に限らず幅広い数理モデルを構成することができる。更に CindyJS という JavaScript フレームワークを使ってコンテンツを HTML ファイルに書き出すことができ，PC だけでなくタブレットやスマートフォンのブラウザ上で操作可能な形でコンテンツを配布することも可能である。CindyJS 開発者のウェブサイト（https://cindyjs.org/）の Gallery には数々の楽しい数学コンテンツが掲載されており，ブラウザ上でそのまま体験できるので訪ねてみることをお勧めしたい。

筆者が動的幾何ソフトウエアの教育利用に興味を抱いたのは，動的な数学モデルを学習者に操作させることにより手軽に探索的学習を実践できるためである。手で触れて動かせるコンテンツを眺めているうちに何かを感じ，それが数学的概念と結びついていることに気付いて腑に落ちる，そのような学び方が実現するとよいと思っている。

3. 動的幾何コンテンツを用いた教材開発

筆者が担当する授業で実際に使用した動的幾何コンテンツの実例の中から２つほど紹介したい。

１つ目は平面曲線の曲率に関するものである。曲線の１点で２次の接触をなす円は曲率円とよばれ，その半径を曲率半径，そして曲率半径の逆数に符号をつけたもの曲率と定義する。きついカーブほど曲率円が小さく曲率は大きい。曲線がパラメータ表示で与えられれば微分して曲率を具体的に表示することが可能だが，図形的概念はまず図形で理解してほしいと思い図１のような動的幾何コンテンツを作成した。図中の $P_0, \cdots, P_4$ を動かすと，これらの点を通るように曲線が変形し，それに応じて右側の曲率関数も動的に変化する。曲線の形を柔軟に変えることができるので，曲率の大小と符号の図形的意味，変曲点がどのような点であるかを学ぶことができる。

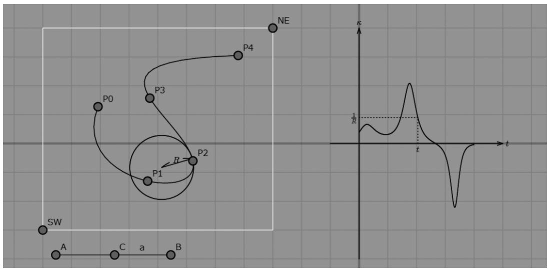

図１　平面曲線の曲率

もう１つは $x(t)$, $y(t)$ を未知関数とする定数係数連立線形微分方程式 $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ に関するものである。この方程式の解 $(x(t),\ y(t))$ をパラメータ表示された曲線とみなせば一般解は平面を埋め尽くす曲線族となり，係数行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルに応じて様々な模様が現れる。図２に挙げたものは典型的な模様の例の一部であ

る。この模様の変化を探索するコンテンツが図３のもので，スライダーで a，b，c，d の値を調節すると解曲線族のなす模様が変形していく。

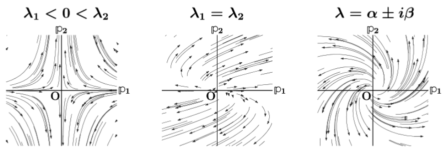

図２　固有値と解曲線族

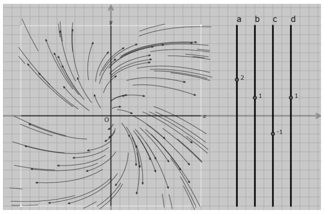

図３　解曲線族の探索コンテンツ

4. モデル操作の学習行動分析

動的幾何コンテンツを学生たちに操作させると，こちらが想像していたようには事が運ばないこともあり，それはそれで興味深い。東邦大薬学部の金子真隆氏と共同研究を行っている次の話題はそのような例の１つである。

微積分の授業で学ぶテイラー展開は次の式で与えられる：

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

右辺は $x = a$ を中心とした多項式による最良近似であり，次数が上がるほど近似の精度が高まるということを理解してほしいのだが，式が複雑なせいかなかなかそれが学生たちに伝わらない。そこで動的幾何コンテンツで最良近似を体験してもらおうと考えた。図４は $x = 0$ を中心とする近似式

$$\sqrt{1+x} \approx a + bx + cx^2 + dx^3$$

を探索するコンテンツの操作画面である。スライダーで係数 a，b，c，d を調節すると多項式関数 $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ のグラフが変形し，これを $x = 0$ の近傍でできるだけ $y = \sqrt{1+x}$ のグラフに近づけることを目標とする。実際に自分で操作するとテイラー展開の与える係数に近い値になったので，これなら学生たちも同じようにテイラー展開を「発見」してくれるのではないだろうか，と期待していた。

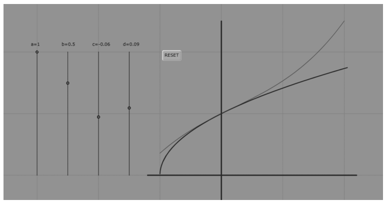

図４　多項式近似コンテンツ

ところが，タブレットに実装して学生たちに操作させてみると，必ずしもテイラー展開による理論値に近いとは言えない結果を出す者が多い。学生たちが何を考えてどのような操作をしているかが気になってきたので，今度はコンテンツの操作ログデータを記録しながら同じ実験を行ってみた。

操作ログデータを分析すると，学生たちの探索過程には２つの典型的な局面が現れることが分かった。１つはおおよそ $a \to b \to c \to d$ の順に値を調整して絞り込んでいく傾向（パターンA）で，テイラー展開による理論値に近づいていく。もう１つは不規則に b，c，d を少しずつ動かす傾向（パターンB）で，b が微分係数 $f'(0) = \frac{1}{2}$ から外れることも多い。これはどうやら，近似の中心が $x = 0$ であることを考えずに，画面に描画されるグラフ全体の誤差を平均的に小さくしようとしているらしい。確かに理論値のグラフ（図５左）は $x = 0$ から遠い部分の誤差が大きくなるので，図５右のような状態の方がよりよい近似と思われたのであろう。

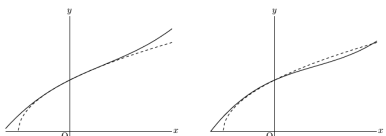

図５　理論値の近似（左）と全体的近似の例（右）

学生たちの探索はパターンＡとＢのどちらか一方のみとは限らず，ＡからＢへ，あるいはＢからＡに移行する者もいる。テイラー展開を教える立場としてはＡが正しくＢは間違いなのだが，Ｂの探索の後に近似の中心を思い出しＡに移った者はこのテーマへの理解がより深まってい

るといえる。このように学習者の探索過程を調査することは，教授者の指導方法や介入の在り方について示唆を与えるところが大きいと筆者は考える。

5. 非ユークリッド幾何の作図

Cinderellaには球面幾何・双曲幾何の非ユークリッド幾何モデルの作図機能もあるのが面白い。ここでは，東邦大理学部の安冨真一氏と筆者が探索したChapple-Eulerの公式の非ユークリッド版を紹介したい。

初等幾何におけるChapple-Eulerの公式は，平面内の三角形ABCの外接円の半径をR，内接円の半径をr，外心と内心との距離をdとするとき，$d=\sqrt{R(R-2r)}$が成り立つというもので（図６），この式から不等式 $R \geqq 2r$ も導かれる。逆に半径と中心間の距離がこの関係式を満たすように２つの円を描くと，外側の円周上のどの点から始めても大小の円をそれぞれ外接円・内接円とする三角形が一意に定まることも知られている(Poncelet の定理)。

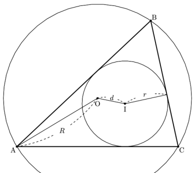

図６　Chapple-Euler の公式

安冨氏は高校時代に球面幾何に興味を持ち，上記公式の類似物が成立するのではないかと考えた。球面幾何は半径１の球面で大円を直線とみなす幾何学で，三角形の外接円と内接円も一意に定まる。また２点間の距離は球の中心から２点を見込む角に等しい。安冨氏の昔のノートには次の等式が記され，二等辺三角形の場合の証明が付けられていた：

$$\tan d=\frac{\sqrt{\tan R(\tan R-2\tan r)}}{\sqrt{\tan^2 r+(1+\tan r\tan R)^2}}$$

これを改めて考えてみようということで，Cinderellaの球面幾何で作図したのが図７である。大小の２円を描き，外側の円周上に１点P_1をとって内側の円への接線を引き外側の円との交点P_2をとり，更にP_2から同様の操作を繰り返してP_3，P_4をとる。ここで２円の中心間の距離を調節するとP_4がP_1に一致して三角形が閉じる

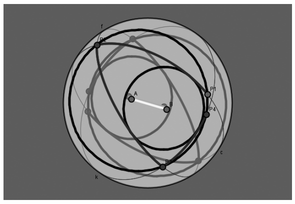
図７　球面版 Chapple-Euler の公式

場合が一度だけ起こる。この状態で更に外側の円上でP_1の位置を動かすと，２円に内接・外接したまま三角形がぐるりと一周回転できるのが観察され，球面幾何でもPonceletの定理が成り立ちそうなことが分かる（事実成立することが知られている)。以上をまとめると，Ponceletの定理から内接円・外接円を共有する一つの三角形について証明すれば十分であり，すでに二等辺三角形について証明されているので先の予想の等式は実際に成立していることが分かった。同様の考察を重ね，Chapple-Eulerの公式については次の双曲幾何版も導くことができた。(後で調べたところ同値な式がすでに発表されており，残念ながら新発見とはいえない。)

この話のどこでCinderellaが役に立ったかを問われれば，それはモデルを操作して結論を確信したところにある。動的幾何ソフトウエアは答えを出すツールではないが，探索を通じて仮説を立てるのに役立つ。きっと成り立つと信じている命題には証明の道筋も見つかりやすいものだし，煩雑な式変形は数式処理ソフトウエアに任せることができる。ぜひ多くの方に動的幾何ソフトウエアを使って数学モデルの探索を楽しんでいただきたいと思う。

通巻第 83 号　2021年　9月 25日　発行
©編修･発行　実教出版株式会社　代表者　小田良次
発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町５
TEL. 03-3238-7777
https://www.jikkyo.co.jp/