専門基礎ライブラリー　機械設計
（詳細解答）

第 13 章　演習問題

1．線材の直径 d=4mm，コイルの平均径 D=40mm，ばねの有効巻数 N_a=8 の引張コイルばねのばね定数を求めなさい。また，このばねに F=40N の荷重がかかったときのたわみとこの状態での最大ねじり応力を求めなさい。ただし，材料のせん断弾性係数 G=80×10³MPa とする。

（解答）

d=4mm, D=40mm, Na=8, F=40N, G=80×10³MPa

・コイルばねの変形量：δ　→式（13-4）より

$$\delta=\frac{2U}{F}=\frac{8NaD^3F}{Gd^4}$$

$$\delta=\frac{8\times8\times(40\times10^{-3})^3\times40}{80\times10^3\times10^6\times(4\times10^{-3})^4}=0.008\ (\mathrm{m})=\mathbf{8\ (mm)}$$

・ばね定数：κ　→式（13-5）より

$$\kappa=\frac{F}{\delta}=\frac{Gd^4}{8NaD^3}$$

$$\kappa=\frac{40}{0.008}=5\times10^3\ (\mathrm{N/m})$$

・ばね指数：c

$$c=\frac{D}{d}=\frac{40}{4}=10$$

・応力修正係数：κ_t →式（13-8）より

$$\kappa_t=\frac{4c-1}{4c-4}+\frac{0.615}{c}$$

$$\kappa_t=\frac{4\times10-1}{4\times10-4}+\frac{0.615}{10}=1.1448\cdots$$

$$=1.145$$

・最大ねじり応力：τ →式（13-6）と式（13-7）より

$$\tau=\kappa_t\tau_o=\kappa_t\frac{8DF}{\pi d^3}$$

$$=1.145\times\frac{8\times(40\times10^{-3})\times40}{\pi\times(4\times10^{-3})^3}=72915422.89\ (\mathrm{Pa})$$

$$=\mathbf{72.9\ (MPa)}$$

2．図 13-4 のようなねじりコイルばね（線材の直径 d=5mm, コイルの平均径 D=30mm）に, R=50mm, 荷重=80N でねじりモーメントを作用させたとき、ねじれ角を 30°にしたい。コイルの有効巻数とこの状態での最大曲げ応力を求めなさい。線材はステンレス鋼 SUS302 とする。

（解答）

D=5mm, D=30mm, R=50mm, F=80N, ϕ=30°, E=1.86×10^{5}N/mm^2（SUS302）

式（13-10）より、

$$\phi = \frac{64DNa}{Ed^4}FR\frac{180}{\pi} \cong \frac{3667DNa}{Ed^4}FR$$

$$Na = \frac{\phi}{FR}\frac{Ed^4}{3667D} = \frac{30}{80\times50}\times\frac{1.86\times10^5\times5^4}{3667\times30} = 7.9254\cdots \cong \mathbf{7.9}\text{（巻）}$$

$$c = \frac{D}{d} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\chi_b = \frac{4c^2 - c - 1}{4c(c-1)} = \frac{4\times6^2 - 6 - 1}{4\times6\times(6-1)} = 1.1416\cdots$$

式（13-11）より、

$$\sigma = \chi_b\sigma_o = \chi_b\frac{Ed\phi}{360DNa} = 1.1416\times\frac{1.86\times10^5\times5\times30}{360\times30\times7.9254} = \mathbf{372.1}\quad\text{(MPa)}$$

3．式（13-17）を導きなさい。

式（13-16）より、

$$|\sigma(x)| = \frac{|M(x)|}{Z(x)} = \frac{6Fx}{\frac{bo}{l}x\cdot t^2} = \frac{6Fl}{bo\cdot t^2} \quad \text{←曲げ応力の最大値（}x = l\text{）}$$

平等強さのはりでは、曲げ応力が一定であることから、式（13-15）より、

$$b(x) = \frac{bo}{l}x \ \text{(mm)}$$

図 13-7 のように、右端の幅が bo で先端に向かって幅が狭くなる三角形状のはりの断面二次モーメントは式（13-15）より、

$$I(x) = \frac{b(x)t^3}{12} = \frac{x}{l}\frac{bot^3}{12} = \frac{x}{l}I_o$$

ここで、$I_o = \frac{bo\cdot t^3}{12}$ と表される。I_oは右端（$x = l$）における断面二次モーメントである。

次にこのはりのたわみを考える。

断面二次モーメントも x の関数であり、たわみ曲線を求める基礎式は、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)}$$

となる。したがって、この平等強さのはりの基礎式は、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Fx}{E\frac{x}{l}I_o} \qquad \text{よって、} \qquad EI_o\frac{d^2y}{dx^2} = Fl$$

となり、これを積分して、

$$EI_o \frac{dy}{dx} = Flx + c_1 \qquad ①$$

$$EI_o y = \frac{Fl}{2} x^2 + c_1 x + c_2 \qquad ②$$

となる。右端（$x = l$）でのたわみ角とたわみが 0 であるから、式①と式②より、

$$c_1 = -Fl^2, \qquad c_2 = \frac{Fl^3}{2}$$

したがって、はりのたわみ角およびたわみの式は、

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{Fl(x-l)}{EI_o} \qquad ③$$

$$y = \frac{Fl}{EI_o}\left(\frac{x^2}{2} - lx + \frac{l^2}{2}\right) \qquad ④$$

となり、いずれも先端（$x = 0$）で最大値になる。

$$\theta_{max} = \frac{Fl^2}{EI_o}$$

$$\boldsymbol{y_{max} = \frac{Fl}{EI_o}\left(\frac{0^2}{2} - l \times 0 + \frac{l^2}{2}\right) = \frac{Fl^3}{2EI_o} = \frac{Fl^3}{2E} \cdot \frac{12}{b_o t^3} = \frac{6F}{Eb_o}\left(\frac{l}{t}\right)^3} \qquad (13\text{-}17)$$