２章　データの整理

１節　１次元のデータ⑴

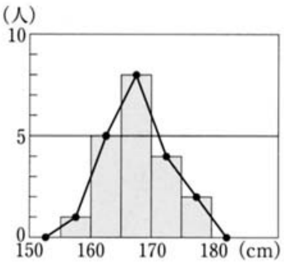
A

42

⑴

階級(cm) 以上　未満	階級値	度数(人)
155〜160	157.5	1
160〜165	162.5	5
165〜170	167.5	8
170〜175	172.5	4
175〜180	177.5	2
合　　計		20

⑵

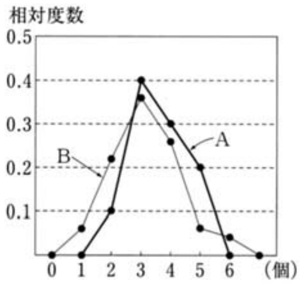


43

▼相対度数分布表

階級値	相対度数	
	A	B
0	0	0
1	0	0.06
2	0.1	0.22
3	0.4	0.36
4	0.3	0.26
5	0.2	0.06
6	0	0.04
計	1	1

▼相対度数折れ線

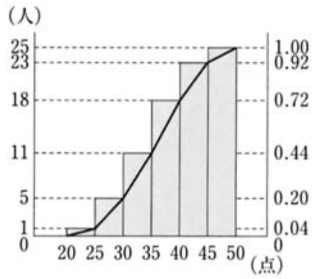


44

⑴

階級(点) 以上〜未満	度数(人)	相対度数	累積度数	累積相対度数
20〜25	1	0.04	1	0.04
25〜30	4	0.16	5	0.20
30〜35	6	0.24	11	0.44
35〜40	7	0.28	18	0.72
40〜45	5	0.20	23	0.92
45〜50	2	0.08	25	1.00
合計	25	1		

⑵



⑶　30 点未満の累積相対度数が 0.20 だから，全体の 20%

⑷　30 点未満，45 点未満の累積相対度数がそれぞれ 0.20，0.92 だから，30 点以上 45 点未満の相対度数は $0.92 - 0.20 = 0.72$ である。

よって，全体の 72%

45

$$\frac{1}{8}(103 + 95 + 91 + 108 + 96 + 119 + 87 + 81)$$

$$= \frac{780}{8} = 97.5(\mathrm{kg})$$

46

階級(点) 以上～未満	階級値 (点)	国語の度数 (人)	数学の度数 (人)
0～10	5	1	2
10～20	15	4	3
20～30	25	6	9
30～40	35	9	7
40～50	45	5	4
合計		25	25

国語の平均値は

$$\frac{1}{25}(5\times1+15\times4+25\times6+35\times9+45\times5)$$
$$=\frac{755}{25}=\frac{151}{5}=30.2\ (\text{点})$$

数学の平均値は

$$\frac{1}{25}(5\times2+15\times3+25\times9+35\times7+45\times4)$$
$$=\frac{705}{25}=\frac{141}{5}=28.2\ (\text{点})$$

47

⑴ 6 番目と 7 番目のデータの平均値だから

中央値は $\frac{32+36}{2}=\frac{68}{2}=34$

最頻値は 21，43

⑵ 中央値は 7 番目のデータだから 30

最頻値は 35

48

右の累積度数分布票から平均値は

$$\frac{89.42}{12}=7.451\cdots\fallingdotseq 7.45(\text{g})$$

メジアンは 6 番目と 7 番目の重さの平均で

$$\frac{7.45+7.46}{2}=7.455\fallingdotseq 7.46(\text{g})$$

モードは 7.46 g

重さ x(g)	本数 f	累計	xf
7.42	1	1	7.42
7.43	1	2	7.43
7.44	1	3	7.44
7.45	3	6	22.35
7.46	4	10	29.84
7.47	2	12	14.94
合計	12		89.42

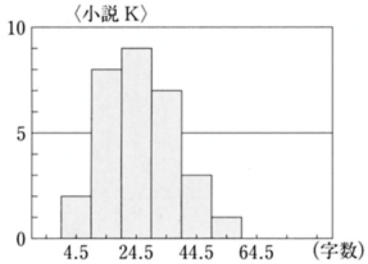
B

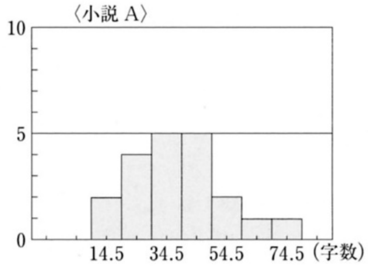
49

(1) ▼度数分布表

階級(字数)	階級値	度数	
		K	A
0～9	4.5	2	0
10～19	14.5	8	2
20～29	24.5	9	4
30～39	34.5	7	5
40～49	44.5	3	5
50～59	54.5	1	2
60～69	64.5	0	1
70～79	74.5	0	1
合計		30	20

▼ヒストグラム

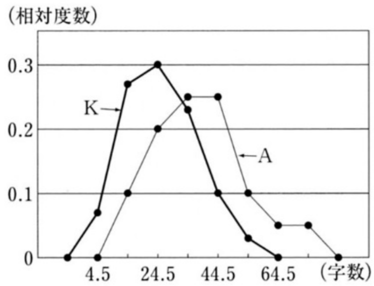




(2) ▼相対度数分布表

階級値	相対度数	
	K	A
4.5	0.07	0
14.5	0.27	0.10
24.5	0.30	0.20
34.5	0.23	0.25
44.5	0.10	0.25
54.5	0.03	0.10
64.5	0	0.05
74.5	0	0.05
合計	1	1

▼相対度数折れ線



50

平均値 $\bar{x}$ は

$$\bar{x} = \frac{1}{25}(0\times 2 + 2\times 4 + 4\times 7 + 6\times 8 + 8\times 4)$$

$$= \frac{116}{25} = 4.64\ (点)$$

人数が 25 人だから，得点を大きさの順に並べたときの

13 番目の得点が中央値である。

N 個の変量の中央の位置は，N が奇数のとき $\frac{N+1}{2}$ 番目

4 点以下の人数は　$2 + 4 + 7 = 13$ （人）である。

よって，中央値は 4（点）

6 点の人数が最大だから，最頻値は 6（点）

51

度数分布表にまとめると，下のようになる。

階級(点)	階級値(点)	人数
0〜 20	10	3
20〜 40	30	5
40〜 60	50	11
60〜 80	70	14
80〜100	90	7
計		40

⑴　平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x} = \frac{1}{40}(10\times3+30\times5+50\times11+70\times14+90\times7)$$

$$= \frac{2340}{40} = 58.5\ (点)$$

⑵　60 点未満が 19 人で，80 点未満が 33 人だから，得点を大きさの順に並べたときの 20 番目と 21 番目の得点は 60〜80 未満の階級にある。よって，中央値は 70 点

⑶　階級値 70 点の人数が最大だから，最頻値は 70 点

52

株の数が 21 株だから

$1+2+x+y+6+2=21$　より　$x+y=10$　…①

平均値は

$$\frac{1}{21}(2\times1+3\times2+4\times x+5\times y+6\times6+7\times2)$$

$$= \frac{4x+5y+58}{21}\ (個)$$

(i)　中央値が 4 個のとき

$\dfrac{4x+5y+58}{21}=4$　より　$4x+5y=26$　…②

①，②を解いて　$x=24$，$y=-14$（不適）

(ii)　中央値が 5 個のとき

$\dfrac{4x+5y+58}{21}=5$　より　$4x+5y=47$　…③

①，③を解いて　$x=3$，$y=7$

このとき，花の数が 4 以下は $1+2+x=6$（個）

5 以下は $1+2+x+y=13$（個）

となり，中央値が 5 である（適する）。

(i)，(ii) より　$x=3$，$y=7$

53

⑴　人数が 40 人だから

$8+x+10+4+y=40$

よって，$x+y=18$　…①

平均値が 38 点だから

$$\frac{1}{40}(10\times 8+30\times x+50\times 10+70\times 4+90\times y)=38$$

よって，$x+3y=22$　…②

①，②を解いて　$x=16,\ y=2$

⑵　中央値が 50 点だから，得点を低い順に並べたときの 20 番目と 21 番目の得点が階級 40〜60 に含まれるので

$8+x+10\geqq 21$　より　$x\geqq 3$　…③

$10+4+y\geqq 21$　より　$y\geqq 7$

①から　$y=18-x\geqq 7$　より　$x\leqq 11$　…④

③，④より　$3\leqq x\leqq 11$

よって，x のとりうる値は　3，4，5，…，11 の 9 個

⑶　中央値が 40 点であるから，得点を低い順に並べたときの 20 番目が階級 20〜40 に，21 番目が階級 40〜60 に含まれるので

$8+x=20$

よって，$x=12$

⑷　最頻値が 30 点だから

$x\geqq 11$　…⑤

①より　$y=18-x$　だから，平均値は

$$\frac{1}{40}\{10\times 8+30x+50\times 10+70\times 4+90(18-x)\}=62-\frac{3}{2}x$$

(i)　中央値が 30 点のとき

$62-\frac{3}{2}x=41$　より　$x=14$（⑤に適する）

このとき，$8+x=22$

だから，中央値は 30 点となる（適する）。

(ii)　中央値が 40 点のとき

$62-\frac{3}{2}x=51$　より　$x=\frac{22}{3}$（不適）

(iii)　中央値が 50 点のとき

$62-\frac{3}{2}x=61$　より　$x=\frac{2}{3}$（不適）

(i)，(ii)，(iii) から　$x=14$

54

a 以外のデータを小さい順に並べると

6，7，8，10，11，13，16

a を加えたデータの個数は 8 個だから

$a \leqq 8$ のとき中央値は $\dfrac{8+10}{2}=9$

$a=9$ のとき中央値は $\dfrac{9+10}{2}=9.5$

$a=10$ のとき中央値は $\dfrac{10+10}{2}=10$

$a \geqq 1$ のとき中央値は $\dfrac{10+11}{2}=10.5$

よって，9，9.5，10，10.5

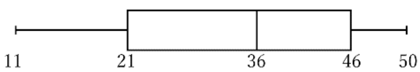
55

(1)

$$\underbrace{11\quad 14\quad 19\quad \overset{Q_1}{\blacktriangledown}\!\!\!\!\!\! 21\quad 25\quad 32\quad 35}_{\text{中央値が }Q_1}\quad \overset{Q_2}{36}\quad \underbrace{40\quad 42\quad 44\quad \overset{Q_3}{46}\quad 47\quad 48\quad 50}_{\text{中央値が }Q_3}$$

最大値 50，最小値 11，

$Q_1=21$，$Q_2=36$，$Q_3=46$



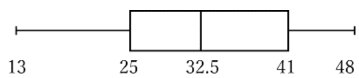
(2)

$$\underbrace{13\quad 15\quad 21\quad 23\ \overset{Q_1}{\blacktriangledown}\ 27\quad 28\quad 30\quad 32}_{\text{中央値が }Q_1}\ \overset{Q_2}{\blacktriangledown}\ \underbrace{33\quad 34\quad 38\quad 41\ \overset{Q_3}{\blacktriangledown}\ 41\quad 44\quad 45\quad 48}_{\text{中央値が }Q_3}$$

最大値 48，最小値 13

$Q_1=\dfrac{23+27}{2}=25$，

$Q_2=\dfrac{32+33}{2}=32.5$，$Q_3=\dfrac{41+41}{2}=41$



56

⑴　中央値はそれぞれ

A 組　65，B 組　67，C 組　63

よって，大きい順に　B 組，A 組，C 組

⑵　範囲はそれぞれ

A 組　$94-33=61$

B 組　$90-35=55$

C 組　$93-31=62$

よって，大きい順に　C 組，A 組，B 組

⑶　四分位範囲はそれぞれ

A 組　$79-48=31$

B 組　$74-51=23$

C 組　$75-47=28$

よって，大きい順に　A 組，C 組，B 組

⑷　C 組の中央値が 63 点だからいえない。

⑸　各組の Q_1 は，A 組：$Q_1=48$ 点，B 組：$Q_1=51$ 点，C 組：$Q_1=47$ 点

だから，A と C 組には 50 点以下は 13 人以上いて，B 組には 12 人以下である。

よって，いえる。

57

ヒストグラムから A，B，C スタジアムの Q_1，Q_2，Q_3 最大値最小値の入る階級はそれぞれ次のようになる。（単位千人）

	A	B	C
Q_1（第 1 四分位数）	7〜8	8〜9	7〜8
Q_2（第 2 四分位数）	8〜9	9〜10	9〜10
Q_3（第 3 四分位数）	10〜11	10〜11	10〜11
最大値	12〜13	12〜13	12〜13
最小値	5〜6	5〜6	5〜6

よって，A スタジアムの箱ひげ図は③

B スタジアムの箱ひげ図は②

C スタジアムの箱ひげ図は①

平均値が 20℃だから

$$\frac{1}{12}(16+15+14+x+20+y+26+25+23+21+20+18)=20$$

よって，　$x+y=42$　　…①

x，y を除いた 10 個のデータを小さい順に並べると

14　15　16　18　20　20　21　23　25　26

ここで，x，y は整数で　$14<x<20<y<26$　だから，

14　15　○　16　○　18　○　20

20　21　□　23　□　25　26

のいずれかの○に x が，いずれかの□に y が入る。

よって，　$x=15,\ 16,\ 17$　のとき　$Q_1=\dfrac{x+16}{2}$　　…②

$x=18,\ 19$　のとき　$Q_1=\dfrac{16+18}{2}=17$　　…③

また，　$Q_3=\dfrac{y+23}{2}$

四分位範囲が 7.5℃だから

②のとき　$\dfrac{y+23}{2}-\dfrac{x+16}{2}=7.5$　より

$y=x+8$　　…④

①，④を解いて　$x=17,\ y=25$（適する）

③のとき　$\dfrac{y+23}{2}-17=7.5$　より　$y=26$（不適）

以上から，　$x=17,\ y=25$

２章　データの整理

２節　１次元のデータ⑵

A

59

⑴　平均値　$\bar{x} = \frac{1}{5}(6+4+8+5+2) = \frac{25}{5} = 5$

分散　$s^2 = \frac{1}{5}\{(6-5)^2+(4-5)^2+(8-5)^2+(5-5)^2+(2-5)^2\} = \frac{20}{5} = 4$

$\boxed{\text{別解}}$

$\overline{x^2} = \frac{1}{5}(6^2+4^2+8^2+5^2+2^2) = \frac{145}{5} = 29$　より　$s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 29 - 5^2 = 4$

標準偏差　$s = \sqrt{4} = 2$

⑵　平均値　$\bar{x} = \frac{1}{6}(8+2+9+3+9+5) = \frac{36}{6} = 6$

分散　$s^2 = \frac{1}{6}\{(8-6)^2+(2-6)^2+(9-6)^2+(3-6)^2+(9-6)^2+(5-6)^2\} = \frac{48}{6} = 8$

標準偏差　$s = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \fallingdotseq 2.8$

$\boxed{\text{別解}}$

$\overline{x^2} = \frac{1}{6}(8^2+2^2+9^2+3^2+9^2+5^2) = \frac{264}{6} = 44$　より　$s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 44 - 6^2 = 8$

標準偏差　$s = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \fallingdotseq 2.8$

⑶　平均値　$\bar{x} = \frac{1}{7}(9+5+8+6+3+11+7) = \frac{49}{7} = 7$

分散　$s^2 = \frac{1}{7}\{(9-7)^2+(5-7)^2+(8-7)^2+(6-7)^2+(3-7)^2+(11-7)^2+(7-7)^2\} = \frac{42}{7} = 6$

標準偏差　$s = \sqrt{6} \fallingdotseq 2.4$

$\boxed{\text{別解}}$

$\overline{x^2} = \frac{1}{7}(9^2+5^2+8^2+6^2+3^2+11^2+7^2) = \frac{385}{7} = 55$　より　$s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 55 - 7^2 = 6$

標準偏差　$s = \sqrt{6} \fallingdotseq 2.4$

(4) 平均値　$\overline{x}=\frac{1}{8}(4+7+1+9+5+0+6+8)=\frac{40}{8}=5$

分散　$s^2=\frac{1}{8}\{(4-5)^2+(7-5)^2+(1-5)^2+(9-5)^2$

$+(5-5)^2+(0-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2\}$

$=\frac{72}{8}=9$

標準偏差　$s=\sqrt{9}=3$

$\boxed{\text{別解}}$

$\overline{x^2}=\frac{1}{8}(4^2+7^2+1^2+9^2+5^2+0^2+6^2+8^2)=\frac{272}{8}=34$　より　$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2=34-5^2=9$

標準偏差　$s=\sqrt{9}=3$

60

右の表から

x の平均値は　$\overline{x}=\frac{54}{10}=5.4$（点）

x^2 の平均値は　$\overline{x^2}=\frac{324}{10}=32.4$

階級値 x（点）	度数 f	xf	x^2f
2	1	2	4
4	3	12	48
6	4	24	144
8	2	16	128
計	10	54	324

よって，分散 s^2 と標準偏差 s は

$s^2=32.4-5.4^2=3.24$

$s=\sqrt{3.24}=1.8$（点）

分散 3.24，標準偏差 1.8（点）となる。

61

(1) 右の表から，x の平均値は　$\overline{x}=\frac{140}{20}=7$

x^2 の平均値は　$\overline{x^2}=\frac{1080}{20}=54$

階級値 x	度数 f	xf	x^2f
2	1	2	4
4	3	12	48
6	5	30	180
8	7	56	448
10	4	40	400
計	20	140	1080

よって，分散 s^2 と標準偏差 s は

$s^2=54-7^2=5$　　$s=\sqrt{5}\fallingdotseq 2.2$

(2) 右の表から，x の平均値は　$\overline{x}=\frac{190}{50}=3.8$

x^2 の平均値は　$\overline{x^2}=\frac{820}{50}=16.4$

階級値 x	度数 f	xf	x^2f
1	4	4	4
2	6	12	24
3	8	24	72
4	15	60	240
5	12	60	300
6	5	30	180
計	50	190	820

よって，分散 s^2 と標準偏差 s は

$s^2=16.4-3.8^2=1.96$　　$s=\sqrt{1.96}=1.4$

62

⑴　仮平均を 12 とし，$u = \dfrac{x-12}{4}$　とおく。

右の表から，u の平均値 $\overline{u}$，標準偏差 s_u は

階級値 x	f	u	uf	u^2f
4	1	−2	−2	4
8	2	−1	−2	2
12	4	0	0	0
16	6	1	6	6
20	3	2	6	12
計	16		8	24

$\overline{u} = \dfrac{8}{16} = 0.5$

$s_u = \sqrt{\dfrac{24}{16} - 0.5^2} = \sqrt{1.25} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

よって，求める x の平均値 $\overline{x}$，標準偏差 s_x は

$\overline{x} = 4\overline{u} + 12 = 4 \times 0.5 + 12 = 14$

$s_x = 4s_u = 4 \times \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5} \fallingdotseq 4.5$

⑵　仮平均を 55 とし，$u = \dfrac{x-55}{10}$　とおく。

右の表から，u の平均値 $\overline{u}$，標準偏差 s_u は

階級 以上〜未満	x	f	u	uf	u^2f
20〜30	25	1	−3	−3	9
30〜40	35	2	−2	−4	8
40〜50	45	4	−1	−4	4
50〜60	55	6	0	0	0
60〜70	65	5	1	5	5
70〜80	75	2	2	4	8
計		20		−2	34

$\overline{u} = \dfrac{-2}{20} = -0.1$

$s_u = \sqrt{\dfrac{34}{20} - (-0.1)^2} = \sqrt{1.69} = 1.3$

よって，求める x の平均値 $\overline{x}$，標準偏差 s_x は

$\overline{x} = 10\overline{u} + 55 = 10 \times (0.1) + 55 = 54$

$s_x = 10s_u = 10 \times 1.3 = 13$

63

⑴

階級値 x	度数 f	xf	x^2f
1	2	2	2
2	ア　**4**	8	イ　**16**
3	3	9	27
4	ウ　**1**	エ　**4**	16
計	10	オ　**23**	カ　**61**

⑵　平均値　$\overline{x} = \dfrac{23}{10} = 2.3$

⑶　x^2 の平均値　$\overline{x^2} = \dfrac{61}{10} = 6.1$　より

分散　$s^2 = 6.1 - 2.3^2 = 0.81$

よって，標準偏差　$s = \sqrt{0.81} = 0.9$

64

(1)

階級(kg) 以上〜未満	度数 (人)
25〜30	2
30〜35	5
35〜40	9
40〜45	3
45〜50	1
計	20

(2) $u = \dfrac{x - 37.5}{5}$ とおく。

階級(kg) 以上〜未満	x	f	u	uf	u^2f
25〜30	27.5	2	−2	−4	8
30〜35	32.5	5	−1	−5	5
35〜40	37.5	9	0	0	0
40〜45	42.5	3	1	3	3
45〜50	47.5	1	2	2	4
計		20		−4	20

上の表から，u の平均値 $\overline{u}$，標準偏差 s_u は

$$\overline{u} = \frac{-4}{20} = -0.2$$

$$s_u = \sqrt{\frac{20}{20} - (-0.2)^2} = \sqrt{0.96} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

よって，求める x の平均値 $\overline{x}$，標準偏差 s_x は

$$\overline{x} = 5\overline{u} + 37.5 = 5 \times (-0.2) + 37.5 = 36.5 \text{（kg）}$$

$$s_x = 5s_u = 5 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 2\sqrt{6} \fallingdotseq 4.9 \text{（kg）}$$

65

(1) u の平均 $\overline{u}$ は

$$\overline{u} = \frac{1}{30}(u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_{30}) = \frac{-6}{30} = -0.2$$

よって，x の平均値は $\overline{x}$

$$\overline{x} = 5\overline{u} + 7.5 = 5 \times (-0.2) + 7.8 = 6.8$$

(2) u の分散 $s_u{}^2$ は

$$s_u{}^2 = \frac{1}{30}(u_1{}^2 + u_2{}^2 + \cdots\cdots + u_{30}{}^2) - (\overline{u})^2$$

$$= \frac{24}{30} - (-0.2)^2 = 0.76$$

よって，x の分散 $s_x{}^2$ は

$$s_x{}^2 = 5^2 \times 0.76 = 19$$

66

⑴ $u=\dfrac{x-500}{8}$ に x のデータを代入する。

x のデータ	508	484	516	524	516	468	540	508
u のデータ	1	−2	2	3	2	−4	5	1

変量 u の平均は

$$\overline{u}=\frac{1}{8}(1-2+2+3+2-4+5+1)=\frac{8}{8}=1$$

変量 u の分散は

$$s^2{}_u=\frac{1}{8}(1+4+4+9+4+16+25+1)-1^2$$

$$=\frac{64}{8}-1=7$$

変量 u の標準偏差は　$s_u=\sqrt{7}$

⑵ $u=\dfrac{x-500}{8}$　より　$x=8u+500$

変量 x の平均は

$$\overline{x}=8\overline{u}+500=8\times1+500=508$$

変量 x の分散は

$$S_x^2=8^2S_u^2=64\times7=448$$

変量 x の標準偏差は

$$S_x=\sqrt{S_x^2}=\sqrt{448}=8\sqrt{7}$$

67

⑴ 80 点が 70 点（－10 点）に，40 点が 50 点（＋10 点）になっても，得点の合計は変化しないから平均値は変化しない。

偏差の 2 乗は　$(80-55)^2=625$　→　$(70-55)^2=225$

$(40-55)^2=225$　→　$(50-55)^2=25$

となるから分散は減少する。

⑵ 平均値は 55 点だから，55 点の人のデータを加えても平均値は変化しない。

偏差の 2 乗の和は $(55-55)^2=0$ だから修正前と変わらないが，人数が 1 人増加しているから分散は 96 より減少する。

68

A グループの点数の合計は　$20 \times 80 = 1600$

B グループの点数の合計は　$30 \times 70 = 2100$

よって，全体の平均値は　$\dfrac{1600 + 2100}{20 + 30} = \dfrac{3700}{50} = 74$ （点）

次に，A，B グループの点数の 2 乗の合計をそれぞれ u，v とすると，

$$\sqrt{\frac{u}{20} - 80^2} = 5, \quad \sqrt{\frac{v}{30} - 70^2} = 15$$

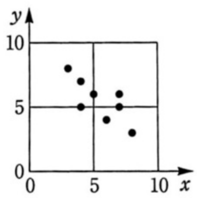
だから，$u = 128500$，$v = 153750$

よって，全体の標準偏差は

$$\sqrt{\frac{128500 + 153750}{20 + 30} - 74^2} = \sqrt{169} = 13 \text{（点）}$$

69

散布図から，傾きが負の直線の近くに多くの点が集まっているので，負の相関関係がある。



70

y ＼ x	5〜10	10〜15	15〜20	合計
15〜20	0	2	4	6
10〜15	2	5	0	7
5〜10	1	1	0	2
合計	3	8	4	15

71

$$\overline{x} = \frac{12 + 19 + 8 + 10 + 11}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

$$\overline{y} = \frac{14 + 16 + 10 + 9 + 13}{5} = \frac{62}{5} = 12.4$$

右の表から，共分散 s_{xy} は　$s_{xy} = \dfrac{41}{5} = 8.2$

番号	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
1	12	14	0	1.6	0
2	19	16	7	3.6	25.2
3	8	10	−4	−2.4	9.6
4	10	9	−2	−3.4	6.8
5	11	13	−1	0.6	−0.6
計	60	62	0	0	41

72

英語，数学，化学のデータをそれぞれ x，y，z とすると

x，y の分散について

$$6S_x{}^2 = (4-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (7-6)^2 + (5-6)^2 + (6-6)^2 = 10$$

$$6S_y{}^2 = (6-5)^2 + (2-5)^2 + (7-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (5-5)^2 = 16$$

$$6S_{xy} = (4-6)(6-5) + (8-6)(7-5) + (7-6)(4-5) + (5-6)(6-5) = 0$$

よって，$r = \dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_x}\sqrt{S_y}} = \dfrac{0}{\sqrt{10}\sqrt{16}} = 0$

y，z の分散について

$$6S_z{}^2 = (10-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (6-7)^2 + (4-7)^2 + (9-7)^2 = 24$$

$$6S_{yz} = (6-5)(10-7) + (2-5)(6-7) + (4-5)(6-7) + (6-5)(4-7) = 4$$

よって，$r = \dfrac{S_{yz}}{\sqrt{S_y}\sqrt{S_z}} = \dfrac{4}{\sqrt{16}\sqrt{24}} = \dfrac{\sqrt{6}}{12} \fallingdotseq 0.204$

x，z の分散について

$$6S_{xz} = (4-6)(10-7) + (7-6)(6-7) + (5-6)(4-7) = -4$$

よって，$r = \dfrac{S_{xz}}{\sqrt{S_x}\sqrt{S_z}} = \dfrac{-4}{\sqrt{10}\sqrt{24}} = -\dfrac{\sqrt{15}}{15} \fallingdotseq -0.258$

英語と数学　0,

数学と化学　0.204,

英語と化学　－0.258

73

⑴　A の相関係数 r_{A} は　$r_{\mathrm{A}} = \dfrac{18.9}{4.2 \times 7.5} = 0.6$

B の相関係数 r_{B} は　$r_{\mathrm{B}} = \dfrac{-56.7}{10.5 \times 7.2} = -0.75$

⑵

A の散布図は，相関係数が正だから　①，②，③のいずれか

次に，x，y の標準偏差がそれぞれ 4.2，7.5

中央値がそれぞれ 20.5，19.5 だから　③

B の散布図は，相関係数が負だから　④，⑤，⑥のいずれか

次に，x，y の標準偏差がそれぞれ 10.5，7.2 だから，⑤，⑥のいずれか

そして，中央値がそれぞれ 21，19 だから　⑤

(1) $\overline{x} = \dfrac{1}{20}(1 \times 4 + 3 \times 12 + 5 \times 4) = \dfrac{60}{20} = 3$

$\overline{y} = \dfrac{1}{20}(1 \times 12 + 3 \times 6 + 5 \times 2) = \dfrac{40}{20} = 2$

(2) x^2, y^2 の平均値は

$$\overline{x^2} = \frac{1}{20}(1^2 \times 4 + 3^2 \times 12 + 5^2 \times 4) = \frac{212}{20} = 10.6$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{20}(1^2 \times 12 + 3^2 \times 6 + 5^2 \times 2) = \frac{116}{20} = 5.8$$

よって, $s_x{}^2 = 10.6 - 3^2 = 1.6$

$s_y{}^2 = 5.8 - 2^2 = 1.8$

したがって

$$s_x = \sqrt{1.6} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \fallingdotseq 1.26$$

$$s_y = \sqrt{1.8} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \fallingdotseq 1.34$$

(3) $s_{xy} = \dfrac{1}{20}\{(1-3)(3-2) \times 2 + (1-3)(5-2) \times 2$

$+ (5-3)(1-2) \times 4\} = -\dfrac{24}{20} = -1.2$

(4) $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y} = \dfrac{-1.2}{\dfrac{2\sqrt{10}}{5} \times \dfrac{3\sqrt{5}}{5}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq -0.7$

発展問題

75

⑴ $z=x+y$ の平均値 $\overline{z}$ は

$$\overline{z}=\overline{x}+\overline{y}=7+4=11$$

z の分散 $s_z{}^2$ は $(z-\overline{z})^2$ の平均値で，

$$\begin{aligned}(z-\overline{z})^2&=\{(x+y)-(\overline{x}+\overline{y})\}^2\\&=\{(x-\overline{x})+(y-\overline{y})\}^2\\&=(x-\overline{x})^2+2(x-\overline{x})(y-\overline{y})+(y-\overline{y})^2\end{aligned}$$

だから，$s_z{}^2=3^2+2\cdot(-9)+6^2=27$

よって，z の標準偏差 s_z は

$$s_z=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

⑵ $z=x-y$ の平均値 $\overline{z}$ は

$$\overline{z}=\overline{x}-\overline{y}=7-4=3$$

z の分散 $s_z{}^2=(z-\overline{z})^2$ の平均値で，

$$\begin{aligned}(z-\overline{z})^2&=\{(x-y)-(\overline{x}-\overline{y})\}^2\\&=\{(x-\overline{x})-(y-\overline{y})\}^2\\&=(x-\overline{x})^2-2(x-\overline{x})(y-\overline{y})+(y-\overline{y})^2\end{aligned}$$

だから，$s_z{}^2=3^2-2\cdot(-9)+6^2=63$

よって，z の標準偏差 s_z は

$$s_z=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$$

⑶ $z=2x+3y$ の平均値 $\overline{z}$ は

$$\overline{z}=2\overline{x}+3\overline{y}=2\cdot7+3\cdot4=26$$

z の分散 $s_z{}^2$ は $(z-\overline{z})^2$ の平均値で，

$$\begin{aligned}(z-\overline{z})^2&=\{(2x+3y)-(2\overline{x}+3\overline{y})\}^2\\&=\{2(x-\overline{x})+3(y-\overline{y})\}^2\\&=4(x-\overline{x})^2+12(x-\overline{x})(y-\overline{y})+9(y-\overline{y})^2\end{aligned}$$

だから，$s_z{}^2=4\cdot3^2+12\cdot(-9)+9\cdot6^2=252$

よって，z の標準偏差 s_z は

$$s_z=\sqrt{252}=6\sqrt{7}$$

２章の問題

1

⑴　人数が 30 人だから

$1+4+x+12+y=30$　より　$x+y=13$　…①

平均値が 36 点だから

$$\frac{1}{30}(10\times1+20\times4+30\times x+40\times12+50\times y)=36$$

より　$3x+5y=51$　…②

①，②を解いて　$x=7$，$y=6$

⑵　中央値が 35 点だから，15 番目が 30 点，16 番目が 40 点である。

よって，$1+4+x=15$，$12+y=15$

これを解いて　$x=10$，$y=3$

⑶　中央値が 30 点だから，15 番目と 16 番目が 30 点である。

よって　$1+4+x\geqq16$　より，$x\geqq11$

また，①より　$y=13-x\geqq0$　だから　$x\leqq13$

ゆえに　$11\leqq x\leqq13$

よって　$x=11,\ 12,\ 13$

⑷　最頻値が 40 点だから

$x<12$　かつ　$y=13-x<12$　より

$1<x<12$

よって，$x=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$

⑸　最頻値が 2 つあるから，

最頻値が 30 点と 40 点のとき　$x=12$

最頻値が 40 点と 50 点のとき

$y=13-x=12$　より　$x=1$

よって，$x=1,\ 12$

2

⑴　A 店と C 店の Q_1 はおよそ 140 人だから，この 2 店は 150 人以下の日が 13 日以上あった。

⑵　B 店の Q_1 はおよそ 210 人で，他の 3 店の Q_1 はおよそ１５０゜人以下であるから最も多かったのは B 店である。

⑶　51 日間を調べた箱ひげ図だから Q_2 より大きいデータは 25 個ある。

D 店の Q_3 はおよそ 310 人だから 300 人以上であった日の可能性は 25 日である。

3

① 数学の四分位範囲はおよそ　$80-54=36$

物理の四分位範囲はおよそ　$74-51=23$

よって，正しくない。

② 散布図から正しい。箱ひげ図で，Q_1 がどちらも 50～60 の間にあることからも読みとれる。

よって正しい。

③ 散布図から数学が 80 点以上であっても物理が 60 点以下の人が 1 人いる。

よって，正しくない。

④ 散布図から数学の点数が最も低い学生は物理では下から 5 番目であるから正しくなて。

⑤ 散布図から正しい。

⑥ 散布図から考えて正しい。

⑦ ①より四分位範囲が数学の方が大きいから正しいと考えられる。

以上より正しいものは　②，⑤，⑥，⑦

4

⑴　平均値を b とすると

$$b = \frac{1}{4}\{7 + 9 + a + (4 - a)\} = 5$$

よって，平均値は 5

また，分散が 10 であるから

$$\frac{1}{4}\{7^2 + 9^2 + a^2 + (4 - a)^2\} - 5^2 = 10$$

整理して，$a^2 - 4a + 3 = 0$

$(a - 1)(a - 3) = 0$

よって，$a = 1,\ 3$

⑵　平均値を b とすると

$$\frac{1}{5}(3 + 5 + 7 + a + 4a) = b \quad \text{より} \quad a + 3 = b \cdots ①$$

標準偏差が 2，すなわち分散が 4 であるから

$$\frac{1}{5}\{3^2 + 5^2 + 7^2 + a^2 + (4a)^2\} - b^2 = 4$$

整理して，$17a^2 - 5b^2 + 63 = 0 \cdots ②$

①と②より b を消去して

$$17a^2 - 5(a + 3)^2 + 63 = 0$$

整理して，$2a^2 - 5a + 3 = 0$ $(a - 1)(2a - 3) = 0$

よって　$a = 1,\ \dfrac{3}{2}$

①より　$a = 1$ のとき，平均値は 4

$a = \dfrac{3}{2}$ のとき，平均値は $\dfrac{9}{2}$

⑶　平均値と分散を b とすると

$$\frac{1}{3}(1 + 4 + a) = b \quad \text{より} \quad a = 3b - 5 \cdots ①$$

$$\frac{1}{3}(1^2 + 4^2 + a^2) - b^2 = b \quad \text{より} \quad a^2 - 3b^2 - 3b + 17 = 0 \cdots ②$$

①と②より a を消去して

$$(3b - 5)^2 - 3b^2 - 3b + 17 = 0$$

整理して　$2b^2 - 11b + 14 = 0$ $(b - 2)(2b - 7) = 0$

よって　$b = 2,\ \dfrac{7}{2}$

①より　$a = 1,\ \dfrac{11}{2}$

5

⑴　表から，番号 1 の x の得点が 11，偏差 $x-\overline{x}$ が 2 であるから，x の平均値 b は

$$b = 11 - 2 = 9$$

よって，x の合計 a は　$a = 20 \times 9 = 180$

⑵　表から，x，y の分散はそれぞれ 27，12 であるから，標準偏差 s_x，s_y は

$$s_x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3},\ s_y = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

また，表から，x，y の共分散は　$s_{xy} = 13.5$

よって，相関係数 r は

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{13.5}{3\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}} = 0.75$$

別解　$$r = \frac{270}{\sqrt{540} \times \sqrt{240}} = \frac{270}{6\sqrt{15} \times 4\sqrt{15}} = 0.75$$

⑶　相関係数が正であるから，①，②のいずれかである。

次に，中央値について，①，②ともに x の中央値は 8.5 であるが，y の中央値が 11 である散布図は，②である。

また，②の点のばらつき具合は，変量 x の方が y よりも大きく，標準偏差について，$s_x > s_y$ に適する。

よって，②

⑷　平均値 $\overline{z}$ は

$$\overline{z} = \overline{x} + \overline{y} = 9 + 11 = 20$$

また，
$$\begin{aligned}(z-\overline{z})^2 &= \{(x+y) - (\overline{x}+\overline{y})\}^2 \\ &= \{(x-\overline{x}) + (y-\overline{y})\}^2 \\ &= (x-\overline{x})^2 + 2(x-\overline{x})(y-\overline{y}) + (y-\overline{y})^2\end{aligned}$$

だから，分散 $s_z{}^2$ は

$$\begin{aligned}s_z{}^2 &= s_x{}^2 + 2s_{xy} + s_y{}^2 \\ &= 27 + 2 \times 13.5 + 12 = 66\end{aligned}$$

標準偏差 s_z は，$s_z > 0$　より　$s_z = \sqrt{66} \fallingdotseq 8.12$

⑴　この 20 人のうち，国語の得点が 4 点の生徒は$1+4=\boxed{5}$ 人であり，英語の得点 y が国語の得点 x 以下の生徒は，$x=y$ である$1+1+2+1+1=6$ 人および$x>y$ の 2 人の計$\boxed{8}$人である。

⑵　国語の得点の平均値 A は

$$A=\frac{1}{20}(3\times2+4\times5+5\times8+6\times2+7\times2+8\times1)=\frac{100}{20}$$

$$=\boxed{5}.\boxed{0}\text{点}$$

英語の得点 y の分散 B の値は，右表より

$$B=\frac{1}{20}\{(-3)^2\times1+(-2)^2\times2+(-1)^2\times2+0^2\times8+1^2\times5+2^2\times2\}$$

$$=\frac{1}{20}(9+8+2+5+8)=\frac{32}{20}=\boxed{1}.\boxed{60}$$

y	$y-\overline{y}$	人数
8	2	2
7	1	5
6	0	8
5	−1	2
4	−2	2
3	−3	1
$\overline{y}=6.0$		20

⑶　この 20 人のうち，国語の得点が平均値 5.0 点と異なり，かつ，英語の得点も平均値 6.0 点と異なる生徒数は，国語が 5.0 点でない 12 人のうち，英語が 6.0 点でない人数を数えればよく，それは$\boxed{5}$人である。この 20 人について，国語の得点 x と英語の得点 y の共分散の値は，右表より

$$\frac{1}{20}\{(-2)\times(-3)\times1+(-2)\times(-2)\times1$$
$$+(-1)\times(-2)\times1+1\times2\times1+3\times2\times1\}$$

$$=\frac{1}{20}(6+4+2+2+6)=\frac{20}{20}=1$$

であるので，求める相関係数の値は

$$\frac{(x,\ y\text{の共分散})}{\sqrt{(x\text{の分散})}\sqrt{(y\text{の分散})}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1.60}\sqrt{1.60}}$$

$$=\frac{1}{1.6}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}=\boxed{0}.\boxed{625}$$

x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	人数
8	8	3	2	1
7	6	2	0	2
6	8	1	2	1
6	6	1	0	1
5	7	0	1	5
5	6	0	0	1
5	5	0	−1	2
4	6	−1	0	4
4	4	−1	−2	1
3	4	−2	−2	1
3	3	−2	−3	1
$\overline{x}=5.0$	$\overline{y}=6.0$			20

7

⑴　$n = 30$ とし，1 回目，2 回目の 30 人の得点をそれぞれ x_i，y_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ とする。また，それぞれの平均と分散を $\overline{x}$，$\overline{y}$，$\sigma_x{}^2$，$\sigma_y{}^2$ とおく。

このとき表の結果から

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 62 \qquad \therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 62n \qquad \cdots\cdots①$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 60 \qquad \therefore \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 60n \qquad \cdots\cdots②$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - \overline{x}^2 = 36$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = 3880n \qquad \cdots\cdots③$$

$$\sigma_y{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2 - \overline{y}^2 \qquad \cdots\cdots④$$

また，2 回全体の得点の平均を m とすると

$$m = \frac{1}{2}(\overline{x} + \overline{y}) = 61 \qquad \cdots\cdots⑤$$

であり，分散は 44 であるから

$$\frac{1}{2n}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - m)^2\right\} = 44$$

$$\therefore \quad \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i{}^2\right) - 2m(\overline{x} + \overline{y} - m) = 88$$

したがって，①～③および⑤から

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2 = 88 + 2m(\overline{x} + \overline{y} - m) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2$$

$$= 88 + 2 \cdot 61 \cdot 61 - 3880 = 3650$$

よって，④より

$$\sigma_y{}^2 = 3650 - 60^2 = 50$$

⑵　共分散を $\sigma_{xy}(= 20)$，相関係数を r とすると，⑴の結果より

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{20}{6 \cdot \sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\ (= 0.471\cdots)$$

⑶　3 回目の 24 人の得点を $z_i (i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 24)$ とし，平均を $\bar{z}$，分散を ${\sigma_z}^2$ とすると

$$\bar{z} = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{24} z_i = 54 \qquad \therefore \quad \sum_{i=1}^{24} z_i = 1296$$

$${\sigma_z}^2 = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{24} {z_i}^2 - \bar{z}^2 = 51 \qquad \therefore \quad \sum_{i=1}^{24} {z_i}^2 = 71208$$

また，3 回全体の平均を μ とすると

$$\mu = \frac{1}{84}\left(\sum_{i=1}^{30} x_i + \sum_{i=1}^{30} y_i + \sum_{i=1}^{24} z_i\right)$$
$$= \frac{1}{84}(1860 + 1800 + 1296) = 59$$

よって，3 回全体の得点の分散を σ^2 とすると

$$\sigma^2 = \frac{1}{84}\left(\sum_{i=1}^{30} {x_i}^2 + \sum_{i=1}^{30} {y_i}^2 + \sum_{i=1}^{24} {z_i}^2\right) - 59^2$$
$$= \frac{1}{84}(116400 + 109500 + 71208) - 3481 = 3537 - 3481 = 56$$

8

A 君の偏差値

数学　$T = \dfrac{10(86-50)}{15} + 50 = 74$

国語　$T = \dfrac{10(54-60)}{20} + 50 = 47$

よって，合計は $74 + 47 = 121$

B 君の偏差値

数学　$T = \dfrac{10(56-50)}{15} + 50 = 54$

国語　$T = \dfrac{10(84-60)}{20} + 50 = 62$

よって，合計は $54 + 62 = 116$

A 君の合計（121）が B 君の合計（116）より大きい。

9

⑴　$u = x + 3$　の平均値 $\overline{u}$ は

$\overline{u} = \overline{x} + 3 = 9.4 + 3 = 12.4$

$v = 2y$ の平均値 $\overline{v}$ は

$\overline{v} = 2\overline{y} = 2 \times 7.1 = 14.2$

⑵　$u = x + 3$　の標準偏差 s_u は

$s_u = s_x = 5.6$

$v = 2y$ の標準偏差 s_v は

$s_v = 2s_y = 2 \times 4.5 = 9$

⑶　$(u - \overline{u})(v - \overline{v}) = \{(x + 3) - (\overline{x} + 3)\}(2y - 2\overline{y})$

$= 2(x - \overline{x})(y - \overline{y})$

だから，u と v の共分散 s_{uv} は

$s_{uv} = 2s_{xy} = 2 \times (-18.9) = -37.8$

⑷　u と v の相関係数 r は

$$r = \frac{s_{uv}}{s_u s_v} = \frac{-37.8}{5.6 \times 9} = -0.75$$