３章　確率分布

１節　確率分布

A

76

(1) $P(X=k)=\dfrac{{}_3C_k\times{}_2C_{3-k}}{{}_5C_3}$ 　($k=1,\ 2,\ 3$)　より

X	1	2	3	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

(2) $P(2\leqq X\leqq 3)=P(X=2)+P(X=3)=\dfrac{6}{10}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{7}{10}$

77

(1)

表の枚数	0	1	2	3	4	5	6	7
裏の枚数	7	6	5	4	3	2	1	0
X	7	5	3	1	1	3	5	7

より

$$P(X=1)={}_7C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{35}{64}$$

$$P(X=3)={}_7C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_7C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{64}$$

$$P(X=5)={}_7C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_7C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{7}{64}$$

$$P(X=7)=\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{64}$$

よって

X	1	3	5	7	計
P	$\frac{35}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

(2) $P(X\geqq 3)=P(X=3)+P(X=5)+P(X=7)$

$$=\frac{21}{64}+\frac{7}{64}+\frac{1}{64}=\frac{29}{64}$$

78

ジョーカーの入っていない 52 枚のトランプのうち，エースは 4 枚，7 または 8 のカードは 8 枚，絵札は 12 枚，それ以外は 28 枚ある。

もらえる金額 X とその値をとる確率は右の表のようになり，求める期待値は

X	1000	700	100	−200	計
P	$\frac{4}{52}$	$\frac{8}{52}$	$\frac{12}{52}$	$\frac{28}{52}$	1

$$1000\times\frac{4}{52}+700\times\frac{8}{52}+100\times\frac{12}{52}+(-200)\times\frac{28}{52}$$

$$=\frac{1}{52}(4000+5600+1200-5600)=100\text{(円)}$$

79

取り出される白球の個数を X とすると，$X=0, 1, 2$ で，それぞれの確率は

$X=0$ のとき $\dfrac{{}_2C_2}{{}_7C_2}=\dfrac{1}{21}$

$X=1$ のとき $\dfrac{{}_5C_1\times{}_2C_1}{{}_7C_2}=\dfrac{10}{21}$

$X=2$ のとき $\dfrac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\dfrac{10}{21}$

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	1

であるから，白球の個数の期待値は $0\times\dfrac{1}{21}+1\times\dfrac{10}{21}+2\times\dfrac{10}{21}=\dfrac{30}{21}=\dfrac{10}{7}$ （個）

80

サイコロの目	1	2	3	4	5	6
正の約数	1	1, 2	1, 3	1, 2, 4	1, 5	1, 2, 3, 6
X	1	2	2	3	2	4

より，確率変数 X の確率分布は次のようになる。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって

平均 $E(X)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{3}{6}+3\times\dfrac{1}{6}+4\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{3}$

分散 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=\left(1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{3}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

81

$P(X=0)=\dfrac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\dfrac{1}{10}$

$P(X=1)=\dfrac{{}_2C_1\times{}_3C_2}{{}_5C_3}=\dfrac{6}{10}$

$P(X=2)=\dfrac{{}_2C_2\times{}_3C_1}{{}_5C_3}=\dfrac{3}{10}$

よって，X の確率分布は

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

平均　$E(X)=0\times\dfrac{1}{10}+1\times\dfrac{6}{10}+2\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{6}{5}$

分散　$V(X)=\left(0^2\times\dfrac{1}{10}+1^2\times\dfrac{6}{10}+2^2\times\dfrac{3}{10}\right)-\left(\dfrac{6}{5}\right)^2=\dfrac{9}{5}-\dfrac{36}{25}=\dfrac{9}{25}$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\dfrac{3}{5}$

82

赤球の出る個数を X，得点を Y とすると

$Y=6X-3(2-X)=9X-6$　($X=0,\ 1,\ 2$)

X の確率分布は，$P(X=k)=\dfrac{{}_2C_k\cdot{}_4C_{2-k}}{{}_6C_2}$　より

X	0	1	2	計
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$E(X)=0\times\dfrac{6}{15}+1\times\dfrac{8}{15}+2\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{2}{3}$

$V(X)=0^2\times\dfrac{6}{15}+1^2\times\dfrac{8}{15}+2^2\times\dfrac{1}{15}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{16}{45}$

$\therefore$　$E(Y)=E(9X-6)=9E(X)-6=9\times\dfrac{2}{3}-6=0$

$V(Y)=V(9X-6)=9^2\times V(X)=9^2\times\dfrac{16}{45}=\dfrac{144}{5}$

平均　0，分散　$\dfrac{144}{5}$

83

条件より　$E(X)=-3,\ V(X)=5$　で，

$$E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b$$
$$=-3a+b \text{ より } -3a+b=0 \quad \cdots①$$

また　$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$　より

$E(Y^2)=V(Y)+\{E(Y)\}^2$　と変形できる。

ここで　$V(Y)=V(aX+b)=a^2V(X)=5a^2$　だから

$E(Y^2)=5a^2+0^2$　より　$5a^2=10$　$\cdots②$

②より　$a^2=2$　$\therefore$　$a=\pm\sqrt{2}$　$a>0$　だから　$a=\sqrt{2}$

①に代入して　$b=3\sqrt{2}$

84

(1)　1 回目に出た目を X，2 回目に出た目を Y とすると，X，Y は互いに独立で，

1 から 6 までの値を等確率 $\dfrac{1}{6}$ でとるから

$$E(X)=E(Y)=(1+2+3+4+5+6)\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

$$V(X)=V(Y)=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)\times\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

これより，目の和の平均と分散は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2E(X)=7$$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=2V(X)=\frac{35}{6}$$

Z	2	3	4	5	$\cdots$	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\cdots$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

(2)　X，Y は独立であるから，積の平均は

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\{E(X)\}^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$$

85

A，B それぞれの袋から球を取り出す試行は独立だから，X，Y も独立である。

まず，X の確率分布は

$$P(X=k)=\frac{{}_2\mathrm{C}_k\times{}_4\mathrm{C}_{2-k}}{{}_6\mathrm{C}_2}$$ （$k=0$，1，2）より

X	0	1	2	計
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

となる。

$$E(X)=\frac{0\times6+1\times8+2\times1}{15}=\frac{2}{3}$$

$$V(X)=\frac{0^2\times6+1^2\times8+2^2\times1}{15}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{45}$$

次に，Y の確率分布は

$$P(X=m)=\frac{{}_3\mathrm{C}_m\times{}_3\mathrm{C}_{2-m}}{{}_6\mathrm{C}_2}$$ （$m=0$，1，2）より

Y	0	1	2	計
P	$\frac{3}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{3}{15}$	1

となる。

$$E(Y)=\frac{0\times3+1\times9+2\times3}{15}=1$$

$$V(Y)=\frac{0^2\times3+1^2\times9+2^2\times3}{15}-1^2=\frac{2}{5}$$

(1) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$ （平均）

また X，Y は独立だから

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{16}{45}+\frac{2}{5}=\frac{34}{45}$$ より

$$\sigma(X+Y)=\sqrt{V(X+Y)}=\sqrt{\frac{34}{45}}=\frac{\sqrt{170}}{15}$$ （標準偏差）

(2) $E(X-Y)=E(X+(-Y))$

$=E(X)+E(-Y)=E(X)-E(Y)=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$ （平均）

また X，Y は独立だから

$$\begin{aligned}V(X-Y)&=V(X+(-Y))\\&=V(X)+V(-Y)=V(X)+(-1)^2V(Y)\\&=V(X)+V(Y)=\frac{16}{45}+\frac{2}{5}=\frac{34}{45}\end{aligned}$$ より

$$\sigma(X-Y)=\sqrt{V(X-Y)}=\sqrt{\frac{34}{45}}=\frac{\sqrt{170}}{15}$$ （標準偏差）

86

X が二項分布　$B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$　に従うから

$$P(X=k)={}_{10}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ 10)$$

$$={}_{10}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$ である。

(1)　$P(X\leqq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$$={}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$=({}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$=(1+10+45)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{7}{128}$$

(2)　$P(4\leqq X\leqq 6)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$

$$=({}_{10}\mathrm{C}_4+{}_{10}\mathrm{C}_5+{}_{10}\mathrm{C}_6)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$=(210+252+210)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{21}{32}$$

(3)　$P(X\leqq 9)=1-P(X=10)$

$$=1-{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1023}{1024}$$

87

サイコロを 1 回投げて，1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ だから，24 回投げたとき k 回 1 の目が出る確率は

$$P(X=k)={}_{24}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{24-k}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ 24)$$　となる。

よって，X は二項分布　$B\left(24,\ \frac{1}{6}\right)$　に従うから

平均　$E(X)=24\times\frac{1}{6}=4$

分散　$V(X)=24\times\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{10}{3}$

88

⑴　$B\left(5,\ \dfrac{1}{6}\right)$　より

平均　$E(X)=5\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

分散　$V(X)=5\times\dfrac{1}{6}\times\left(1-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{25}{36}$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{25}{36}}=\dfrac{5}{6}$

⑵　$B\left(200,\ \dfrac{3}{4}\right)$　より

平均　$E(X)=200\times\dfrac{3}{4}=150$

分散　$V(X)=200\times\dfrac{3}{4}\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{75}{2}$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{75}{2}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

⑶　$B\left(1000,\ \dfrac{1}{2}\right)$　より

平均　$E(X)=1000\times\dfrac{1}{2}=500$

分散　$V(X)=1000\times\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=250$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{250}=5\sqrt{10}$

B

89

(i)　余りが 0 のとき　出た目の和は 4，8，12 だから　$P(X=0)=\dfrac{3+5+1}{36}=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

(ii)　余りが 1 のとき　出た目の和は 5，9 だから　$P(X=1)=\dfrac{4+4}{36}=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

(iii)　余りが 2 のとき　出た目の和は 2，6，10 だから　$P(X=2)=\dfrac{1+5+3}{36}=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

(iv)　余りが 3 のとき　出た目の和は 3，7，11 だから　$P(X=3)=\dfrac{2+6+2}{36}=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$

よって，X の確率分布は

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$	1

90

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_2}{{}_5C_3}=\frac{6}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$$

より，X の確率分布は次のようになる。

X	1	2	3	計
P	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

よって　平均　$E(X)=1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{2}$

分散　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=\left(1^2\times\frac{6}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{20}$$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{20}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

91

確率分布より

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}$$
$$=\frac{0+3+6+3}{8}=\frac{3}{2}$$

$$V(X)=\left(0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$=\frac{0+3+12+9}{8}-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

よって　$E(Y)=E(aX+b)$

$$=aE(X)+b$$
$$=\frac{3}{2}a+b \qquad \therefore\ \frac{3}{2}a+b=0\ \cdots①$$

$$V(Y)=V(aX+b)=a^2V(X)=\frac{3}{4}a^2 \qquad \therefore\ \frac{3}{4}a^2=1\ \cdots②$$

②から　$a^2=\frac{4}{3}$　より　$a=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ここで　$a>0$　だから　$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

①に代入して　$b=-\sqrt{3}$

92

50 円硬貨の表の枚数を X，100 円硬貨の表の枚数を Y とすると，X，Y は独立である。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

より

$$E(X)=\frac{0\times1+1\times2+2\times1}{4}=1$$

$$V(X)=\frac{0^2\times1+1^2\times2+2^2\times1}{4}-1^2=\frac{1}{2}$$

Y	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

より

$$E(Y)=1$$

$$V(Y)=\frac{1}{2}$$

よって　$T=50X+100Y$　より

平均　$E(T)=E(50X+100Y)=50E(X)+100E(Y)$

$=50\times1+100\times1=150$

分散　$V(T)=V(50X+100Y)=50^2V(X)+100^2V(Y)$

$=2500\times\frac{1}{2}+10000\times\frac{1}{2}=6250$

標準偏差　$\sigma(T)=\sqrt{V(T)}=\sqrt{6250}=25\sqrt{10}$

93

1 題につき，正解する確率は $\frac{1}{2}$ だから，10 題解答したとき k 個正解する確率は

$$P(X=k)={}_{10}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$ となる。

よって，X は二項分布　$B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$　に従うから

平均　$E(X)=10\times\frac{1}{2}=5$

分散　$V(X)=10\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

94

1回の試行で，表が2枚，裏が2枚出る確率は　$ {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

100回投げたとき k 回「表2枚・裏2枚」となる確率は

$$P(X=k)={}_{100}C_k\left(\frac{3}{8}\right)^k\left(\frac{5}{8}\right)^{100-k}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$$ となる。

よって，X は二項分布　$B\left(100,\ \frac{3}{8}\right)$　に従うから

平均　$E(X)=100\times\frac{3}{8}=\frac{75}{2}$

$V(X)=100\times\frac{3}{8}\times\left(1-\frac{3}{8}\right)=\frac{375}{16}$　より

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{375}{16}}=\frac{5\sqrt{15}}{4}$

95

⑴　二項分布　$B(n,\ p)$　の

平均が6だから　$np=6$　　…①

分散が2だから　$np(1-p)=2$　　…②

①を②に代入して　$6(1-p)=2$　　$\therefore\ \ p=\frac{2}{3}$　このとき　$n=9$

⑵　①より　$B\left(9,\ \frac{2}{3}\right)$　だから

$$\frac{p_4}{p_3}=\frac{{}_9C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^5}{{}_9C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^6}=\left(\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{2^4}{3^9}\right)\times\left(\frac{3\cdot2\cdot1}{9\cdot8\cdot7}\times\frac{3^9}{2^3}\right)=3$$

96

種子 1 個の発芽率が 80%だから，確率　$\dfrac{80}{100}=\dfrac{4}{5}$

300 個まくとき k 個発芽する確率は

$$P(X=k)={}_{300}\mathrm{C}_k\left(\frac{4}{5}\right)^k\left(\frac{1}{5}\right)^{300-k}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ 300)$$ となる。

よって，X は二項分布　$B\left(300,\ \dfrac{4}{5}\right)$　に従うから

期待値　　$E(X)=300\times\dfrac{4}{5}=240$　（個）

$$V(X)=300\times\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=48$$　より

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

97

⑴　サイコロを 1 回投げて，1，2，3，4 のいずれかの目が出る確率は　$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

n 回投げたとき x 回 1，2，3，4 のいずれかの目が出る確率は

$$P(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{n-x}\quad (x=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n)$$ となる。

よって，X は二項分布　$B\left(n,\ \dfrac{2}{3}\right)$　に従うから

平均　$E(X)=n\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}n$

分散　$V(X)=n\times\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{9}n$

⑵　$x+y=n$　より　$y=n-x$

これを　$Z=x-y$　に代入して

$Z=x-(n-x)=2x-n=2X-n$

よって

平均　$E(Z)=E(2X-n)=2E(X)-n=2\times\dfrac{2}{3}n-n=\dfrac{1}{3}n$

分散　$V(Z)=V(2X-n)=2^2V(X)=4\times\dfrac{2}{9}n=\dfrac{8}{9}n$

発展問題

98

1 のカードが

1 回目に出る確率は　$\dfrac{1}{n}$

2 回目に出る確率は　$\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{1}{n}$

3 回目に出る確率は　$\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-2}{n-1}\times\dfrac{1}{n-2}=\dfrac{1}{n}$

同様にして

n 回目に出る確率は　$\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{n}$

よって，引いた回数 X の期待値を E とすると

$$
\begin{aligned}
E &= 1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}+3\times\frac{1}{n}+\cdots+n\times\frac{1}{n}\\
&= (1+2+3+\cdots+n)\times\frac{1}{n}\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\times\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}
\end{aligned}
$$

99

$$P(X=1)=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

$X=k\ (k\geqq 2)$　のとき

$P(X=k)=P(X\leqq k)-P(X\leqq k-1)$　だから

$$P(X=2)=P(X\leqq 2)-P(X=1)$$
$$=\left(\frac{2}{6}\right)^3-\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{7}{216}$$

$$P(X=3)=P(X\leqq 3)-P(X\leqq 2)$$
$$=\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{19}{216}$$

$$P(X=4)=P(X\leqq 4)-P(X\leqq 3)$$
$$=\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{37}{216}$$

$$P(X=5)=P(X\leqq 5)-P(X\leqq 4)$$
$$=\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{61}{216}$$

$$P(X=6)=P(X\leqq 6)-P(X\leqq 5)$$
$$=\left(\frac{6}{6}\right)^3-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$$

よって，X の確率分布は

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{91}{216}$	1

平均　$E(X)=1\times\frac{1}{216}+2\times\frac{7}{216}+3\times\frac{19}{216}+4\times\frac{37}{216}+5\times\frac{61}{216}+6\times\frac{91}{216}$

$$=\frac{1+14+57+148+305+546}{216}=\frac{1071}{216}=\frac{119}{24}$$

分散　$V(X)=\left(1^2\times\frac{1}{216}+2^2\times\frac{7}{216}+3^2\times\frac{19}{216}+4^2\times\frac{37}{216}+5^2\times\frac{61}{216}+6^2\times\frac{91}{216}\right)-\left(\frac{119}{24}\right)^2$

$$=\frac{1+28+171+592+1525+3276}{216}-\left(\frac{119}{24}\right)^2$$

$$=\frac{5593}{216}-\left(\frac{119}{24}\right)^2=\frac{2261}{1728}$$

100

1 番目のカードの数字を X，2 番目のカードの数字を Y とすると，復元抽出だから X，Y は独立になる。

$$E(X) = E(Y) = \frac{3+4+5+6+7}{5} = 5$$

$$V(X) = V(Y) = \frac{3^2+4^2+5^2+6^2+7^2}{5} - 5^2 = 2$$

(1) $m = E(T) = E(10X+Y)$

$= E(10X) + E(Y) = 10E(X) + E(Y)$

$= 10 \times 5 + 5 = 55$

$V(T) = V(10X+Y) = V(10X) + V(Y)$

$= 100V(X) + V(Y) = 100 \times 2 + 2 = 202$ より

$\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = \sqrt{202}$

(2) $T \leqq \frac{6}{5}m = \frac{6}{5} \times 55 = 66$

復元抽出だから，2 桁の数字は全部で $5^2 = 25$ 通りあり，

$T > 66$ をみたすのは　$T = 67,\ 73,\ 74,\ 75,\ 76,\ 77$ の 6 通りである。

よって求める確率は

$$P\left(T \leqq \frac{6}{5}m\right) = 1 - P\left(T > \frac{6}{5}m\right)$$

$$= 1 - \frac{6}{25} = \frac{19}{25}$$

３章　確率分布

２節　正規分布

A

101

(1) $P(0 \leqq X \leqq 1) = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) dx$

$= \left[-\frac{1}{4}x^2 + x\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$

$E(X) = \int_0^1 x\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right) dx$

$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

$= \frac{-1+3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(2) $P(0.5 \leqq X \leqq 2) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) dx$

$= \left[-\frac{1}{4}x^2 + x\right]_{\frac{1}{2}}^1 = (-1+2) - \left(-\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$

$= 1 + \frac{1}{16} - \frac{1}{2} = \frac{16+1-8}{16} = \frac{9}{16}$

$E(X) = \int_0^2 x\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right) dx$

$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \left(-\frac{1}{6} \times 8 + \frac{1}{2} \times 4\right)$

$= -\frac{8}{6} + \frac{4}{2} = \frac{2}{3}$

102

(1) $P(1 \leqq Z \leqq 2.5) = P(0 \leqq Z \leqq 2.5) - P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= 0.4938 - 0.3413 = 0.1525$

(2) $P(-1 \leqq Z \leqq 1.5) = P(0 \leqq Z \leqq 1) + P(0 \leqq Z \leqq 1.5)$

$= 0.3413 + 0.4332 = 0.7745$

(3) $P(Z \leqq 2) = P(Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq 2)$

$= 0.5 + 0.4772 = 0.9772$

(4) $P(-0.4 \leqq Z) = P(0 \leqq Z \leqq 0.4) + P(0 \leqq Z)$

$= 0.1554 + 0.5 = 0.6554$

103

X が $N(10,\ 1.5^2)$ に従うので

$T = \dfrac{X-10}{1.5}$ は $N(0,\ 1)$ に従う。

⑴　$P(10 \leqq X \leqq 11.5) = P(0 \leqq T \leqq 1) = 0.3413$

⑵　$P(13 \leqq X) = P(2 \leqq T)$

$= 0.5 - P(0 \leqq T \leqq 2)$

$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

⑶　$P(7 \leqq X \leqq 14.5) = P(-2 \leqq T \leqq 3)$

$= P(0 \leqq T \leqq 2) + P(0 \leqq T \leqq 3)$

$= 0.4772 + 0.4987 = 0.9759$

⑷　$P(X \leqq 5.5) = P(T \leqq -3)$

$= 0.5 - P(0 \leqq T \leqq 3)$

$= 0.5 - 0.4987 = 0.0013$

104

⑴　テープの長さを X cm とすれば，X が $N(9.9,\ 0.4^2)$ に従うので，$T = \dfrac{X-9.9}{0.4}$ は $N(0,\ 1)$ に従う。

よって

$P(9.5 \leqq X \leqq 10.5) = P(-1 \leqq T \leqq 1.5)$

$= P(-1 \leqq T \leqq 0) + P(0 \leqq T \leqq 1.5)$

$= P(0 \leqq T \leqq 1) + P(0 \leqq T \leqq 1.5)$

$= 0.3413 + 0.4332 = 0.7745$

枚数 300 を掛けると　$300 \times 0.7745 = 232.35$

したがって，約 232 枚と考えられる。

⑵　$P(10.5 \leqq X) = P(1.5 \leqq T)$

$= 0.5 - P(0 \leqq T \leqq 1.5)$

$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$

枚数 300 を掛けると　$300 \times 0.0668 = 20.04$

したがって，約 20 枚と考えられる。

105

丸棒の長さを Xmm とすれば，X が $N(10.0,\ 0.2^2)$ に従うので，$T=\dfrac{X-10.0}{0.2}$ は $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，

(1) $P(9.7\leqq X\leqq 10.3)=P(-1.5\leqq T\leqq 1.5)$

$=2\times P(0\leqq T\leqq 1.5)$

$=2\times 0.4332=0.8662$

よって　$100\times 0.8662=86.62$　より　およそ　87%

(2) $P(10.5\leqq X)=P(2.5\leqq T)$

$=0.5-P(0\leqq T\leqq 2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$

よって　$100\times 0.0062=6.2$　より　およそ　0.6%

106

1 の目の出る回数 X は，2 項分布 $B\left(300,\ \dfrac{1}{6}\right)$　に従い

$$E(X)=300\times\frac{1}{6}=50$$

$$V(X)=300\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{3}\fallingdotseq 41.7$$

よって，$N(50,\ 41.7)$　に従う

確率変数 X について　$P(X\geqq 60)$　を求めればよい。

$T=\dfrac{X-60}{\sqrt{41.7}}$　は $N(0,\ 1)$ に従うので，正規分布表を用いて

$P(X\geqq 60)=P(T\geqq 1.55)$

$=P(T\geqq 0)-P(0\leqq T\leqq 1.55)$

$=0.5-0.4393=0.0606$

107

1 回目の出る回数を X とすると，X は $B\left(200,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従い

$$E(X)=200\times\frac{1}{6}=\frac{100}{3}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{200\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=\sqrt{\frac{250}{9}}=\frac{5\sqrt{10}}{3}$$

よって，$N\left(\dfrac{100}{3},\ \dfrac{5\sqrt{10}}{3}\right)$ に従う

ここで $Z=\dfrac{X-\dfrac{100}{3}}{\dfrac{5\sqrt{10}}{3}}$ とおくと Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

$$X=30 \quad のとき \quad Z=\frac{30-\dfrac{100}{3}}{\dfrac{5\sqrt{10}}{3}}=-0.63$$

$$X=40 \quad のとき \quad Z=\frac{40-\dfrac{100}{3}}{\dfrac{5\sqrt{10}}{3}}=1.26$$

であるから

$$\begin{aligned}P(30\leqq X\leqq 40)&=P(-0.63\leqq Z\leqq 1.26)\\&=P(-0.63\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 1.26)\\&=P(0\leqq Z\leqq 0.62)+P(0\leqq Z\leqq 1.26)\\&=0.2357+0.3962=0.6319\end{aligned}$$

108

賛成する人数を X とすると，X は $B\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従い

$$E(X)=100\times\frac{1}{2}=50$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5$$

よって，$N(50,\ 5^2)$ に従う

ここで $Z=\dfrac{X-50}{5}$ とおくと Z は $N(0,\ 1)$ に従う

$$X=60 \quad のとき \quad Z=\frac{60-50}{5}=2$$

であるから

$$\begin{aligned}P(60\leqq X)&=P(2\leqq Z)\\&=P(Z\geqq 0)-P(0\leqq Z\leqq 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

B

109

$$P\left(-\frac{1}{2} \leqq X \leqq 1\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= \left\{0 - \left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right)\right\} + \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1+4}{8} = \frac{5}{8}$$

$$E(X) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} x \times (-x)\,dx + \int_{0}^{1} x \times x\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} -x^2\,dx = \int_{0}^{1} x^2\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} = \left\{0 - \left(\frac{-1}{3} \times \frac{-1}{8}\right)\right\} + \left(\frac{1}{3} - 0\right)$$

$$= \frac{-1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{-1+8}{24} = \frac{7}{24}$$

110

ボルトの直径を Xmm とすれば，X が $N(12,\ 0.3^2)$　に従うので

$T = \dfrac{X-12}{0.3}$　は $N(0,\ 1)$ に従う。よって

⑴ $P(12.5 \leqq X) = P(1.67 \leqq T)$

$= 0.5 - P(0 \leqq T \leqq 1.67)$

$= 0.5 - 0.4525 = 0.0475$

よって　$100 \times 0.0475 = 4.75$　より　およそ　4.8%

⑵ $P(11.9 \leqq X \leqq 21.1) = P(-0.33 \leqq T \leqq 0.33)$

$= 2 \times P(0 \leqq T \leqq 0.33)$

$= 2 \times 0.1293 = 0.2586$

よって　$100 \times 0.2586 = 25.86$　より　およそ　25.9%

111

⑴　受験者の成績 X は，$N(185,\ 68^2)$ に従う。

ここで　$Z = \dfrac{X-185}{68}$　とおくと

Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

$X = 300$　のとき　$Z = \dfrac{300-185}{60} \fallingdotseq 1.69$

であるから

$P(300 \leqq X) = P(1.69 < Z)$

$= 0.5 - 0.4545$

$= 0.0455$

$2830 \times 0.0455 \fallingdotseq 128.76$

よって　全体で 129 番ぐらいと考えられる。

⑵　合格者は 500 人であるから　$\dfrac{500}{2830} \times 100 \fallingdotseq 17.7$

すなわち　約 17.7%のところに当たる。

よって　$P(Z > u) = 0.177$　となる u の値を求めると

$P(0 \leqq Z \leqq u) = 0.5 - P(Z > u)$

$= 7.5 - 0.177 = 0.323$

したがって　巻末の正規分布表から　$u = 0.93$

これに対する X の値は　$0.93 = \dfrac{X-185}{68}$　から　$X = 248.24$

ゆえに 248 点ぐらいと考えられる。

112

⑴　解くことのできる問題数を X とすると，X は $B(50,\ 0.8)$ に従う。

$m = np = 50 \times 0.8 = 40$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \times 0.8 \times 0.2} = 2.828\ \cdots \fallingdotseq 2.83$

であるから　X は $N(40,\ 2.83^2)$ に従う。

ここで　$Z = \dfrac{X - 40}{283}$　とおくと　Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X = 45$ のとき　$Z = \dfrac{45 - 40}{2.83} \fallingdotseq 1.77$

$P(45 \leqq X) = P(1.77 \leqq Z)$

$= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 1.77)$

$= 0.5 - 0.4616 = 0.0384$

⑵　90%の確率で解くので

$P(Z > u) = 0.1$　となる u の値を求めると，

$P(0 \leqq Z \leqq u) = 0.5 - P(Z > u)$

$= 0.5 - 0.1 = 0.4$

したがって　巻末の正規分布表から　$u = 1.28$

これに対する X の値は

$0.4 = \dfrac{X - 40}{2.83}$　から　$X = 43.622$

ゆえに最大は 43 題であると考えられる。

113

不良品の個数を X とすると　X は $B(3000,\ 0.05)$　に従う。

$m = np = 3000 \times 0.05 = 150$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{3000 \times 0.05 \times 0.95} = \sqrt{142.5} \fallingdotseq 11.94$

であるから X は $N(150,\ 11.94^2)$ に従う。

ここで　$Z = \dfrac{X - 150}{11.94}$　とおくと　Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X = 130$ のとき　$Z = \dfrac{130 - 150}{11.94} \fallingdotseq -1.68$

$P(X \leqq 130) = P(Z \leqq -1.68)$

$= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 1.68)$

$= 0.5 - 0.4535 = 0.0465$

114

⑴　勝ち数を X とすると　X は $B(150,\ 0.56)$　に従う。

$m=np=150\times 0.56=84$

$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{150\times 0.56\times 0.44}=6.079\cdots\fallingdotseq 6.08$

であるから X は $N(84,\ 6.08^2)$ に従う。

ここで　$Z=\dfrac{X-84}{6.08}$　とおくと　Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=75$ のとき　$Z=\dfrac{75-84}{6.08}\fallingdotseq -1.48$

$$\begin{aligned}P(X\leqq 75)&=P(Z\leqq -1.48)\\&=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1.48)\\&=0.5-0.4306=0.0694\end{aligned}$$

⑵　$X=90$ のとき　$Z=\dfrac{90-84}{6.08}\fallingdotseq 0.99$

$X=100$ のとき　$Z=\dfrac{100-84}{6.08}\fallingdotseq 2.63$

$$\begin{aligned}P(90\leqq X\leqq 100)&=P(0.99\leqq Z\leqq 2.63)\\&=P(0\leqq Z\leqq 2.63)-P(0\leqq Z\leqq 0.99)\\&=0.4957-0.3389=0.1568\end{aligned}$$

発展問題

115

⑴　評点 1　$P(X < m - 1.5\alpha)$

$= P(Z < -1.5) = 0.5 - P(0 \leqq Z < 1.5)$

$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$

$\therefore \quad 100 \times 0.0668 \fallingdotseq 7$（人）

評点 2　$P(m - 1.5\alpha \leqq X < m - 0.5\alpha)$

$= P(-1.5 \leqq Z < -0.5)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 1.5) - P(0 \leqq Z < 0.5)$

$= 0.4332 - 0.1915 = 0.2417$

$\therefore \quad 100 \times 0.2417 \fallingdotseq 24$（人）

評点 3　$P(m - 0.5\alpha \leqq X < m + 0.5\alpha)$

$= P(-0.5 \leqq Z < 0.5)$

$= 2 \times P(0 \leqq Z < 0.5) = 2 \times 0.1915 = 0.383$

$\therefore \quad 100 \times 0.383 \fallingdotseq 38$（人）

評点 4　$P(m + 0.5\alpha \leqq X < m + 1.5\alpha)$

$= P(0.5 \leqq Z < 1.5)$

$= P(0 \leqq Z < 1.5) - P(0 \leqq Z \leqq 0.5)$

$= 0.4332 - 0.1915 = 0.2417$

$\therefore \quad 100 \times 0.2417 \fallingdotseq 24$（人）

評点 5　$P(m + 1.5\alpha \leqq X)$

$= P(1.5 \leqq Z) = 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 1.5)$

$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$

$\therefore \quad 100 \times 0.0668 \fallingdotseq 7$（人）

⑵　生徒の得点を X' とすると

X' は $N(70,\ 12^2)$ に従う。

ここで　$Z' = \dfrac{X' - 70}{12}$　とおくと　Z' は $N(0,\ 1)$ に従う

$X' = 80$　のとき　$Z' = \dfrac{80 - 70}{12} \fallingdotseq 0.833$　であるから　$P(0.5 \leqq Z' < 1.5)$　となり

$m + 0.5\alpha \leqq 80 < m + 1.5\alpha$　の区間である。

ゆえに　80 点の生徒の評点は 4 である。

３章　確率分布

３章の問題

1

得点を X とすると，$X=10,\ 8,\ 5,\ 0$ で，それぞれの確率は

得点 X	10	8	5	0	計
正解数	5	4	3	2，1，0	
得点 P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{16}{32}$	1

$X=10$ のとき，全問正解だから　$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

$X=8$ のとき，4 問正解だから　${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{32}$

$X=5$ のとき，3 問正解だから　${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}$

$X=0$ のとき，正解数が 2 問以下だから　$1-\left(\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}\right)=\frac{16}{32}$

よって得点の期待値は

$$10\times\frac{1}{32}+8\times\frac{5}{32}+5\times\frac{10}{32}+0\times\frac{16}{32}=\frac{100}{32}=\frac{25}{8}\ (\text{点})$$

2

⑴　$X=3$ となるのは $(1,\ 2,\ 3)$ を選んだときであるから，確率は

$$P(X=3)=\frac{1}{{}_9C_3}=\frac{1}{84}$$

⑵　$X=4$ となるのは $(a,\ b,\ 4)$ の組で a，b は 1，2，3 の内の 2 つの数の場合であるから

$$P(X=4)=\frac{1\times{}_3C_2}{{}_9C_3}=\frac{3}{84}=\frac{1}{28}$$

⑶　⑵と同様にして

$$P(X=5)=\frac{1\times{}_4C_2}{{}_9C_3}=\frac{6}{84}=\frac{1}{14}$$

$$P(X=6)=\frac{1\times{}_5C_2}{{}_9C_3}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$$

$$P(X=7)=\frac{1\times{}_6C_2}{{}_9C_3}=\frac{15}{84}=\frac{5}{28}$$

$$P(X=8)=\frac{1\times{}_7C_2}{{}_9C_3}=\frac{21}{84}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=9)=\frac{1\times{}_8C_2}{{}_9C_3}=\frac{28}{84}=\frac{1}{3}$$

⑷　$E(X)=3\times\frac{1}{84}+4\times\frac{3}{84}+5\times\frac{6}{84}+6\times\frac{10}{84}$

$$+7\times\frac{15}{84}+8\times\frac{21}{84}+9\times\frac{28}{84}=\frac{630}{84}=\frac{15}{2}$$

3

⑴　$X(8)=2$　となるのは，正の向きに 5 回，負の向きに 3 回動いたときだから，

その確率は

$${}_8\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{56}{32\times 8}=\frac{7}{32}$$

⑵　7 回の移動のうち，正の向きを a 回，負の向きを b 回とすると

$(a,\ b)=(3,\ 4),\ (4,\ 3)$ のとき $|X(7)|=1$,

$(a,\ b)=(2,\ 5),\ (5,\ 2)$ のとき $|X(7)|=3$

$(a,\ b)=(1,\ 6),\ (6,\ 1)$ のとき $|X(7)|=5$

$(a,\ b)=(0,\ 7),\ (7,\ 0)$ のとき $|X(7)|=7$,

であるから，求める期待値は

$$1\times{}_7\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 2+3\times{}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^5\times 2$$

$$+5\times{}_7\mathrm{C}_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6\times 2+7\times{}_7\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^7\times 2=\frac{35}{16}$$

4

$$P(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{4}{10}$$

$$P(X=4)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=5)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{10}$$

$$P(X=6)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{10}$$

よって，X の確率分布は

X	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

平均　$E(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{4}{10}+4\times\frac{1}{10}+5\times\frac{2}{10}+6\times\frac{2}{10}$

$$=\frac{2+12+4+10+12}{10}=4$$

分散　$V(X)=\left(2^2\times\frac{1}{10}+3^2\times\frac{4}{10}+4^2\times\frac{1}{10}+5^2\times\frac{2}{10}+6^2\times\frac{2}{10}\right)-4^2$

$$=\frac{4+36+16+50+72}{10}-16=\frac{9}{5}$$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

5

条件より

$$P(X=2k-1)=\frac{1}{n}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ n)$$

だから

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$
$$=\frac{1}{n}\left\{2\times\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}=\frac{1}{n}(n^2+n-n)=n$$

$$V(X)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2\cdot\frac{1}{n}-\{E(X)\}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)-n^2$$
$$=\frac{1}{n}\left\{4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\times\frac{1}{2}n(n+1)+n\right\}-n^2$$
$$=\frac{1}{n}\times\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}-n^2$$
$$=\frac{1}{3}(4n^2+6n+2-6n-6+3)-n^2=\frac{1}{3}(n^2-1)$$

よって，平均　$E(Y)=E(3X+2)=3E(X)+2=3n+2$

分散　$V(Y)=V(3X+2)=9V(X)=3(n^2-1)$

6

(1) $P(X=0)=\frac{1}{{}_{10}C_5}=\frac{1}{252}$，$P(X=1)=\frac{{}_5C_4\cdot{}_5C_1}{{}_{10}C_5}=\frac{25}{252}$

$P(X=2)=\frac{{}_5C_3\cdot{}_5C_2}{{}_{10}C_5}=\frac{100}{252}$，$P(X=3)=\frac{{}_5C_2\cdot{}_5C_3}{{}_{10}C_5}=\frac{100}{252}$

$P(X=4)=\frac{{}_5C_1\cdot{}_5C_4}{{}_{10}C_5}=\frac{25}{252}$，$P(X=5)=\frac{{}_5C_5}{{}_{10}C_5}=\frac{1}{252}$

これを表にすると

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{25}{252}$	$\frac{100}{252}$	$\frac{100}{252}$	$\frac{25}{252}$	$\frac{1}{252}$	1

(2) $E(X)=0\times\frac{1}{252}+1\times\frac{25}{252}+2\times\frac{100}{252}+3\times\frac{100}{252}+4\times\frac{25}{252}+5\times\frac{1}{252}=\frac{630}{252}=\frac{5}{2}$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{252}+1^2\times\frac{25}{252}+2^2\times\frac{100}{252}+3^2\times\frac{100}{252}+4^2\times\frac{25}{252}+5^2\times\frac{1}{252}$$
$$=\frac{1}{252}(25+400+900+400+25)=\frac{1750}{252}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{1750}{252}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{175}{252}=\frac{25}{36}$$

(3) $10000\times\frac{1}{252}+1000\times\frac{25}{252}+100\times\frac{100}{252}=\frac{45000}{252}=\frac{1250}{7}$

7

⑴　B から白石を取り出す確率は　$\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{2}$

A から取り出した白石が B から取り出される確率は　$\frac{3}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

よって，求める確率は　$\frac{1}{10}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

⑵　$P(X=0)=\frac{3}{6}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

$P(X=1)=\frac{3}{6}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\frac{3}{6}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20}$

$P(X=2)=\frac{3}{6}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}+\frac{3}{6}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20}$

$P(X=3)=\frac{3}{6}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

$P(Y=0)=\frac{3}{6}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

$P(Y=1)=\frac{3}{6}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}+\frac{3}{6}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20}$

$P(Y=2)=\frac{3}{6}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\frac{3}{6}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20}$

$P(Y=3)=\frac{3}{6}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

X と Y の平均，X^2 と Y^2 の平均は確率分布が同じなので等しいから

$E(X)=E(Y)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}$　　$\therefore$　$E(X)=E(Y)=\frac{3}{2}$

$E(X^2)=E(Y^2)=0^2\times\frac{1}{20}+1^2\times\frac{9}{20}+2^2\times\frac{9}{20}+3^2\times\frac{1}{20}=\frac{27}{10}$　　$\therefore$　$E(X^2)=E(Y^2)=\frac{27}{10}$

分散は　$V(X)$，$V(Y)$ とも

$V(X)=V(Y)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{27}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{20}$　　$\therefore$　$V(X)=V(Y)=\frac{9}{20}$

$E\left(\frac{2}{5}X+\frac{3}{5}Y\right)=\frac{2}{5}E(X)+\frac{3}{5}E(Y)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

8

⑴　X_1の確率分布

X_1	1	2	5	計
P	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

$$E(X_1)=1\times\frac{5}{10}+2\times\frac{3}{10}+5\times\frac{2}{10}=\frac{5+6+10}{10}=\frac{21}{10}$$

$$\begin{aligned}V(X_1)&=E({X_1}^2)-E(X_1)^2\\&=1^2\times\frac{5}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+5^2\times\frac{2}{10}-\left(\frac{21}{10}\right)^2\\&=\frac{670-441}{100}=\frac{229}{100}\end{aligned}$$

⑵　$Z=X_1+X_2$のとり得る値は　2，3，4，6，7，10

$$P(Z=2)=\left(\frac{5}{10}\right)^2=\frac{25}{100}$$

$$P(Z=3)={}_2\mathrm{C}_1\times\frac{5}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$$

$$P(Z=4)=\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{9}{100}$$

$$P(Z=6)={}_2\mathrm{C}_1\times\frac{5}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{20}{100}$$

$$P(Z=7)={}_2\mathrm{C}_1\times\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{12}{100}$$

$$P(Z=10)=\left(\frac{2}{10}\right)^2=\frac{4}{100}$$

$Z=X_1+X_2$の確率分布

Z	2	3	4	6	7	10	計
P	$\frac{25}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{4}{100}$	1

$$\begin{aligned}P(Z\leqq4)&=P(Z=2)+P(Z=3)+P(Z=4)\\&=\frac{25}{100}+\frac{30}{100}+\frac{9}{100}=\frac{64}{100}=\frac{16}{25}\end{aligned}$$

⑶　$W=X_1-X_2$ のとり得る値は　$-4,\ -3,\ -1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 4$

$$P(W=-4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$$

$$P(W=-3)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{50}$$

$$P(W=-1)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$$

$$P(W=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{19}{50}$$

$$P(W=1)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{20}$$

$$P(W=3)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{50}$$

$$P(W=4)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

また⑵より　$P(Z\leqq 4)=\dfrac{64}{100}$

よって $a<0$ のとき

$$P(W\leqq a)\leqq P(W\leqq -1)$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{3}{50}+\frac{3}{20}=\frac{31}{100}\leqq P(Z\leqq 4)$$

$a\geqq 0$ のとき

$$P(W\leqq a)\geqq P(W\leqq 0)$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{3}{50}+\frac{3}{20}+\frac{19}{50}=\frac{69}{100}>P(Z\leqq 4)$$

したがって　$P(W\leqq a)\leqq P(Z\leqq 4)$ を満たす最大の整数は　$a=-1$

⑷　$S=X_1+X_2+\cdots+X_n=n+1$ となるのは

数字 1 が $n-1$ 回，数字 2 が 1 回のときである。

$$\therefore\quad {}_n\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{10}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

9

⑴　x 軸と $f(x)=k-|x-1|$ で囲まれた部分の面積が 1 となるように k の値を定める。

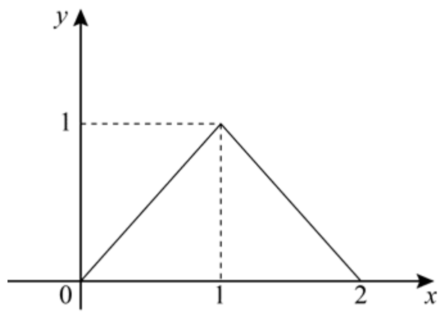
$k=1$　のとき　$f(x)=1-|x-1|$

(i)　$0\leqq x<1$

$$f(x)=1-(1-x)=x$$

(ii)　$1\leqq x\leqq 2$

$$f(x)=1-(x-1)=-x+2$$



(i) (ii) のグラフは右図のようになるので

x 軸と $y=f(x)$ で囲まれた面積が 1 である。

よって　$k=1$

⑵

$$E(X)=\int_0^2 xf(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 x\cdot x\,dx+\int_1^2 x(2-x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{3}-0+\left(4-\frac{8}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=1$$

平均 1

$$V(X)=\int_0^2 (x-1)^2 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 (x-1)^2 x\,dx+\int_1^2 (x-1)^2(2-x)\,dx$$
$$=\int_0^1 (x^3-2x^2+x)\,dx+\int_1^2 (-x^3+4x^2-5x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{6}$$

$$\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

標準偏差 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

10

X は $B(1900,\ 0.05)$ に従う。

$$m=np=1900\times 0.05=95$$
$$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{1900\times 0.05\times 0.95}=9.5$$

であるから　X は $N(95,\ 9.5^2)$ に従う。

ここで　$Z=\dfrac{X-95}{9.5}$ とおくと

Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=76$ のとき　$Z=\dfrac{76-95}{9.5}=-2$

$X=114$ のとき　$Z=\dfrac{114-95}{9.5}=2$

$$P(76\leqq X\leqq 114)=P(-2\leqq Z\leqq 2)$$
$$=2\times P(0\leqq Z\leqq 2)$$
$$=2\times 0.4772=0.9544$$

11

⑴　n 回の移動のうち，$+1$ の移動が a 回あるとする。

-1 の移動は $n-a$ 回あるから

$$S_n = 1\times a + (-1)\times(n-a) \quad \therefore \quad a = \frac{S_n + n}{2}$$

このときの確率は

$$P\left(\frac{S_n + n}{2}\right) = P(a) = {}_n\mathrm{C}_a P^a (1-p)^{n-a}$$

よって　$\frac{1}{2}(S_n + n)$ は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う

⑵　$X = \frac{S_{100} + 100}{2}$ とおくと，X は $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

$$m = np = 100\times\frac{1}{2} = 50$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

であるから　X は $N(50,\ 5^2)$ に従う。

ここで　$U = \frac{X-50}{5}$ とおくと

U は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

原点から 22 以上隔たっている確率は

$$\begin{aligned}
&P(|S_{100}| \geqq 22)\\
&= 1 - P(|S_{100}| < 22)\\
&= 1 - P(|2X - 100| < 22)\\
&= 1 - P(|X - 50| < 11)\\
&= 1 - P\left(\left|\frac{X-50}{5}\right| < \frac{11}{5}\right)\\
&= 1 - P(|U| < 2.2) \leqq 1 - P(|U| < 1.96)\\
&= 1 - 0.95 = 0.05
\end{aligned}$$

よって　$P(|S_{100}| \geqq 22) \leqq 0.05$

12

⑴　X は $B\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。

$$P(X=k)={}_{100}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{100-k}$$

⑵　$m=np=100\times\dfrac{1}{2}=50$

$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{100\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}}=5$

⑶　X は $N(50,\ 5^2)$ に従う。

ここで　$Z=\dfrac{X-50}{5}$ とおくと

Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=50$ のとき $Z=\dfrac{50-50}{5}=0$

$X=60$ のとき $Z=\dfrac{60-50}{5}=2$

$P(50\leqq X\leqq 60)=P(0\leqq Z\leqq 2)=0.4772$

$P(|X-50|<a)=P(|5Z|<a)$

$=P\left(-\dfrac{a}{5}<Z<\dfrac{a}{5}\right)=2P\left(0<Z<\dfrac{a}{5}\right)=0.95$

ゆえに　$P\left(0<Z<\dfrac{a}{5}\right)=0.475$

正規分布表より　　$P(0<Z<1.96)=0.475$　であるから

$\dfrac{a}{5}=1.96$　　$\therefore$　$a=9.8$