４章　推定と検定

１節　統計的推測

A

116

(1)

X	1	3	5	計
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

(2) $m = E(X) = 1\times\frac{2}{9}+3\times\frac{3}{9}+5\times\frac{4}{9} = \frac{31}{9}$

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{1^2\times\frac{2}{9}+3^2\times\frac{3}{9}+5^2\times\frac{4}{9}-\left(\frac{31}{9}\right)^2} = \frac{10\sqrt{2}}{9}$$

より

$$E(\overline{X}) = m = \frac{31}{9},\ \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{4}}\times\frac{10\sqrt{2}}{9} = \frac{5\sqrt{2}}{9}$$

平均 $\frac{31}{9}$，標準偏差 $\frac{5\sqrt{2}}{9}$

117

自由度 12 のカイ 2 乗分布に従う X に対し

(1) $P(a \leqq X) = 0.950$ をみたす a は， $a = X_{12}^2(0.950) = 5.2260$

(2) $P(X < b) = 0.975$ のとき， $P(b \leqq X) = 1 - P(X < b) = 0.025$

であり， これをみたす b は， $b = X_{12}^2(0.025) = 23.3367$

118

自由度 20 の t 分布に従う T に対し

(1) $P(|T| \leqq a) = 0.01$ をみたす a は， $a = t_{20}(0.01) = 2.845$

(2) $P(T < b) = 0.05$ において，b は負で

$P(T < b) + P(|b| < T) = 0.05 \times 2 = 0.10$

よって， $|b| = t_{20}(0.10) = 1.725$ であり， $b = -1.725$

119

$\sigma = 1.5$, $n = 16$, $\overline{X} = 7.2$　より　母平均 m の信頼区間は

信頼度 95%では

$$7.2 - \frac{1.96\times1.5}{\sqrt{16}} \leqq m \leqq 7.2 + \frac{1.96\times1.5}{\sqrt{16}} \quad \text{から} \quad 6.465 \leqq m \leqq 7.935$$

信頼度 99%では

$$7.2 - \frac{2.58\times1.5}{\sqrt{16}} \leqq m \leqq 7.2 + \frac{2.58\times1.5}{\sqrt{16}} \quad \text{から} \quad 6.233 \leqq m \leqq 8.168$$

120

$\overline{X} = 56.3$, $n = 100$ で n が大きな値であるから，$\overline{X}$ の分布は正規分布で近似する。母標準偏差は標本標準偏差で代用して

$\sigma = 10.2$　より信頼度 95%の信頼区間は

$$56.3 - \frac{1.96 \times 10.2}{\sqrt{100}} \leqq m \leqq 56.3 + \frac{1.96 \times 10.2}{\sqrt{100}} \quad \text{から} \quad 54.30 \leqq m \leqq 58.30$$

121

$\overline{X} = 50.3$, $n = 400$ より $\overline{X}$ の分布は正規分布で近似し，母標準偏差は標本標準偏差で代用して，

$\sigma = 1.5$　より母平均 m の信頼度 99%の信頼区間は

$$50.3 - \frac{2.58 \times 1.5}{\sqrt{400}} \leqq m \leqq 50.3 + \frac{2.58 \times 1.5}{\sqrt{400}} \quad \text{から} \quad 50.11 \leqq m \leqq 50.49$$

122

標準比率は $p' = \dfrac{36}{100} = 0.36$, $n = 100$

針が下に向く確率を p' とすると母比率 P の信頼度 95%の信頼区間は

$$0.36 - 1.96\sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{100}} \leqq p \leqq 0.36 + 1.96\sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{100}} \quad \text{より} \quad 0.27 \leqq p \leqq 0.45$$

123

標本の大きさ $n = 21$，標本標準偏差 $S = 3.2$,

$X_{n-1}^2(0.025) = X_{20}^2(0.025) = 34.1696$,

$X_{n-1}^2(0.975) = X_{20}^2(0.975) = 9.5908$ より

母分散 σ^2 の信頼度 95%の信頼区間は

$$\frac{21 \times 3.2^2}{34.1696} \leqq \sigma^2 \leqq \frac{21 \times 3.2^2}{9.5908}$$

から　$6.293 \leqq \sigma^2 \leqq 22.421$

124

標本の大きさ $n = 26$，標本平均 $\overline{X} = 43$，標本標準偏差 $S = 10$,

$t_{n-1}(0.05) = t_{25}(0.05) = 2.060$ より

母平均 m の信頼度 95%の信頼区間は

$$43 - \frac{2.060 \times 10}{\sqrt{26} - 1} \leqq m \leqq 43 + \frac{2.060 \times 10}{\sqrt{26} - 1}$$

から　$38.88 \leqq m \leqq 47.12$

B

125

母標準偏差σ，大きさ n の標本偏差を$\overline{X}$ とすると信頼度 95%の母平均 m の信頼区間は

$\overline{X}-\dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+\dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$　であるから　$\dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\leqq\dfrac{\sigma}{10}$　となればよい

$\sqrt{n}\geqq19.6$　より　$n\geqq384.16$

よって，$n\geqq385$

126

標本の大きさを n とすると，母標準偏差は$\sigma=2$（万円）より，平均月収（母平均）の信頼度 95%の信頼区間の幅が 3 千円以下となるのは

$2\times\dfrac{1.96\times2}{\sqrt{n}}\leqq0.3$　より　$\sqrt{n}\geqq26.13$　　$n\geqq682.8$

よって，683 世帯以上を抽出すればよい。

127

真の不良率（母比率）を p とする。標本比率は $p'=0.05$ と考えて，標本の大きさを n とすると p の信頼度 99%の信頼区間の幅が 0.04 までの範囲となるのは

$2\times2.58\times\sqrt{\dfrac{0.05\times0.95}{n}}\leqq0.04$　より　$\sqrt{n}\geqq28.11$　　$n\geqq790.17$

よって，791 個以上を抽出すればよい

４章　推定と検定

２節　仮説の検定

A

128

標本平均は $\overline{X} = \frac{1}{9}(28+13+16+28+29+12+14+12+10) = 18$

$$n = 9,\ \sigma = 10 \quad より \quad |Z| = \left| \frac{18-25}{\frac{10}{\sqrt{9}}} \right| = \frac{21}{10} = 2.1 \geqq 1.96$$

よって，仮説は棄却されるので $m = 25$ とはいえない。

129

男子と女子の出生率は等しいとする。すなわち母比率 $p = 0.5$ と仮説をたてる。

$n = 1596 + 1540 = 3136,\ X = 1596$ 　より

$$|Z| = \left| \frac{1596 - 3136 \cdot 05}{\sqrt{3136 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} \right| = 1 < 1.96$$

よって，仮説は棄却されないので出生率は相等しいと認めてよい。

130

母比率は　$p = \frac{1}{6}$ と仮説をたてる。標本の大きさは $n = 500$，$X = 100$ より

$$|Z| = \left| \frac{1000 - 500 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{500 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} \right| = 2 \geqq 1.96$$

であるから，仮説は棄却される。よって，1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ ではないと判断してよい。

131 ⑴ 標本平均 $\overline{X}$ は

$$\overline{X} = \frac{1}{100}(199\times15+200\times20+201\times30$$
$$+202\times20+203\times15)=201(\mathrm{mL})$$

⑵ 標本分散は $V(X)=\dfrac{1}{100}\{(199-201)^2\times15+(200-201)^2\times20$
$$+(201-201)^2\times30+(202-201)^2\times20+(203-201)^2\times15\}=1.6(\mathrm{mL})^2$$

⑶ 平均内容量は表示のとおりであると，すなわち母平均は $m=200$ と仮説をたてる。母標準偏差は標本標準偏差で代用すると

$$\sigma=\sqrt{1.6},\quad n=100 \quad \text{より} \quad |Z|=\left|\frac{201-200}{\dfrac{\sqrt{1.6}}{\sqrt{100}}}\right| \fallingdotseq 7.9 \geqq 1.96$$

よって，仮説は棄却されるから，内容量は表示のとおりとはいえない。

132

標本平均 $\overline{X}=18$，標本分散 $S^2=\dfrac{502}{9}$ であり，

⑴ 母標準偏差は $\sigma=5$ と仮説をたてる。 $n=9$，

$X_{n-1}^2(0.975)=X_8^2(0.975)=2.1797$，

$X_{n-1}^2(0.025)=X_8^2(0.025)=17.5345$ より

棄却域は　$U\leqq2.1797,\ 17.5345\leqq U$ である。

$S^2=\dfrac{502}{9},\ \sigma^2=5^2$　より

$$U=\frac{9\times\dfrac{502}{9}}{5^2}=20.08\geqq17.5345$$

であるから，仮説は棄却される。よって，$\sigma=5$ とはいえない。

⑵ 母平均は $m=24$ と仮説をたてる。

$t_{n-1}(0.05)=t_8(0.05)=2.306$ より棄却域は $|T|\geqq2.306$

$$|T|=\left|\frac{18-24}{\sqrt{\dfrac{502}{9}}\Big/\sqrt{9-1}}\right|=2.272<2.306$$

であるから，仮説は棄却されず，$m=24$ といえる。

133

賛成：反対：わからないの比　$p_1:p_2:p_3=\frac{3}{8}:\frac{2}{8}:\frac{3}{8}\,(k=3)$ と仮説をたてる。

自由と $k-1=2$ より棄却域は $U \geqq X_2^2(0.05)=5.9915$ である。
標本の大きさ $n=1000$，$X_1=395$，$X_2=270$，$X_3=335$ より

$$U=\frac{\left(395-1000\times\frac{3}{8}\right)^2}{1000\times\frac{3}{8}}+\frac{\left(270-1000\times\frac{2}{8}\right)^2}{1000\times\frac{2}{8}}$$

$$+\frac{\left(335-1000\times\frac{3}{8}\right)^2}{1000\times\frac{3}{8}}=6.9333\geqq 5.9915$$

であるから，仮説は棄却され，世論に変化はあったと考えられる。

B

134

異色の球が含まれている仮説をたてると，題意より赤球 2 個と他の色の球 1 個の場合しかない。ここで，3 回とも赤球ばかりの確率 p は

$$p=\left(\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\right)^3=\frac{1}{27}\fallingdotseq 0.037\leqq 0.05$$

より，仮説は棄却される。よって，異色の球が含まれているとはいえない。

４章の問題

1

A 種の標本比率は $p' = \dfrac{90}{300} = 0.3$

標本の大きさは $n = 300$ より，母比率 p の信頼度 95%の信頼区間は

$$0.3 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{300}} \leqq p \leqq 0.3 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{300}} \quad \text{から} \quad 0.248 \leqq p \leqq 0.352$$

よって，原野全体では 24.8%～35.2%と考えられる。

2

(1) $10 - \dfrac{1.96 \times 2}{\sqrt{100}} \leqq m \leqq 10 + \dfrac{1.96 \times 2}{\sqrt{100}}$ より信頼度 95%の信頼区間は $9.61 \leqq m \leqq 10.39$

(2) 母平均 m の信頼度 95％の信頼区間は

$$\overline{X} - \frac{1.96 \times 2}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + \frac{1.96 \times 2}{\sqrt{n}} \quad \text{であるから} \quad -\frac{1.96 \times 2}{\sqrt{n}} \leqq \overline{X} - m \leqq \frac{1.96 \times 2}{\sqrt{n}}$$

すなわち $\left|\overline{X} - m\right| \leqq \dfrac{1.96 \times 2}{\sqrt{n}}$

これより $\dfrac{1.96 \times 2}{\sqrt{n}} \leqq \dfrac{1}{2}$ となればよいから $\sqrt{n} \geqq 1.96 \times 4 = 7.84$

ゆえに $n \geqq 61.47$

よって，n は 62 以上の整数とすればよい。

3

母集団標準偏差を σ とする。実験データの平均（標本平均）を $\overline{X}$ ，真の値（母平均）を m，データ（標本）の大きさを n とすると真の値 m の信頼度 95%の信頼区間は

$$\overline{X} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{であるから}$$

$| \overline{X} - m | \leqq \dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$ より $\dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \leqq 0.1\sigma$ であればよい。

$\sqrt{n} \geqq \dfrac{1.96}{0.1} = 19.6$ より $n \geqq 384.16$

よって，385 個以上のデータをとればよい。

4

192粒の中でX粒発芽したとする。発芽率がA地産と同じ75%とすると，Xは二項分布B（192，0.75）に従う。このとき平均mと標準偏差σは

$$m = np = 192 \times 0.75 = 144$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{192 \times 0.75 \times 0.25} = 6$$

より，Xは正規分布N（144，6^2）で近似できる。

$Z = \dfrac{X - m}{\sigma} = \dfrac{X - 144}{6}$ とおくと信頼度95%でA地産と同じと考えられるのは

$-1.96 \leqq Z \leqq 1.96$　より　$-1.96 \leqq \dfrac{X - 144}{6} \leqq 1.96$

これより，$132.24 \leqq X \leqq 155.76$

よって，$133 \leqq X \leqq 155$

5

Xは二項分布$B(10,\ p)$に従うから

平均は$E(X) = 10p$

分散は$V(X) = 10p(1 - p)$

これより　$\dfrac{X}{10} - p$ の分散は

$$V\left(\frac{X}{10} - p\right) = \frac{1}{10^2}V(X) = \frac{1}{10}p(1 - p)$$

$$= \frac{1}{10}\left\{-\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right\}$$

となり，$p = \dfrac{1}{2}$ のとき最大値$\dfrac{1}{40}$

6

母平均は$m = 65$，母標準偏差は$\sigma = 4.8$

体重に変化がないと仮説をたてる。標本の大きさは$n = 10$で，標本平均は

$\overline{X} = \dfrac{692}{10} = 69.2$　であるから

$$|Z| = \left|\frac{69.2 - 65}{\frac{4.8}{\sqrt{10}}}\right| = \frac{7\sqrt{10}}{8} \fallingdotseq 2.77 \geqq 1.96$$

よって，仮説は棄却されるから，異常な変化を与えたといえる。

7

異常でないと仮説をたてると，母比率は $p = 0.2$

標本の大きさは $n = 1225$， $X = 211$ より

$$|Z| = \left| \frac{211 - 1225 \cdot 0.2}{\sqrt{1225 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} \right| \fallingdotseq 2.43 \geqq 1.96$$

よって，仮説は棄却されるから，異常であるといえる。

8

(1) ${}_3\mathrm{C}_3 \left(\frac{15}{16}\right)^3 \times {}_2\mathrm{C}_2 \left(\frac{8}{9}\right)^2 \times \frac{24}{25} = \frac{5}{8}$

(2) (1)の仮説は正しいとすると，母比率は $p = \frac{5}{8}$

標本の大きさは $n = 960$， $X = 640$ であるから

$$|Z| = \left| \frac{640 - 960 \cdot \frac{5}{8}}{\sqrt{960 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8}}} \right| = \frac{8}{3} \fallingdotseq 2.67 \geqq 1.96$$

よって，仮説は棄却されるから，仮説は正しいとはいえない。

9

新しい薬の副作用の発生率は変わらないと仮説をたてると母比率は $p = 0.04$

標本の大きさは $n = 400$， $X = 8$ である。ここで，対立仮説を $p < 0.04$ と考えて片側検定を行う。二項分布を正規分布で近似すると

$0.5 - 0.05 = 0.45$ であるから

与えられた表より $P(0 \leqq Z \leqq 1.65) = 0.45$

したがって， $P(Z \leqq -1.65) = 0.05$

$$Z = \frac{8 - 400 \cdot 0.04}{\sqrt{400 \cdot 0.04 \cdot 0.96}} \fallingdotseq -2.04 \leqq -1.65$$

より，仮説は棄却されるから，副作用の発生する割合は低いといえる。

10

仮説 H_0 のもとで，X は二項分布 $B(10,\ 0.4)$ に従う。

$$0.04 = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

より　$P(X = 0) = {}_{10}C_0\left(\frac{3}{5}\right)^{10} \fallingdotseq 0.006$

$$P(X = 1) = {}_{10}C_1\,\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{9} \fallingdotseq 0.040$$

$$P(X = 2) = {}_{10}C_2\left(\frac{2}{5}\right)^{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{8} \fallingdotseq 0.121$$

よって，$P(X \leqq 1) \fallingdotseq 0.006 + 0.04 = 0.046$

$P(X \leqq 2) \fallingdotseq 0.006 + 0.04 + 0.121 = 0.167$

より　条件（C）を満足する x は $x = 0,\ 1$

11

標本の大きさ $n = 10$，標本平均 $\overline{X} = 29.76$，標本分散 $S^2 = 0.5684$

⑴　$\sigma = 1.4$ と帰無仮説をたて，対立仮説は $\sigma < 1.4$ とする。

棄却域は　$U \leqq X^2_{n-1}(0.99) = X^2_9(0.99) = 2.0879$ である。

$$U = \frac{10 \times 0.5684}{1.4^2} = 2.9 > 2.0879$$

から，仮説は棄却されず，強度のばらつきは小さくなったといえない。

⑵　仮説は⑴と同様。

棄却域は　$U \leqq X^2_{n-1}(0.95) = X^2_9(0.95) = 3.3251$ である。

$U = 2.9 \leqq 3.3251$

から，仮説は棄却され，強度のばらつきは小さくなったといえる。

⑶　$\sigma = 1.4$ と帰無仮説をたて，対立仮説は $\sigma \neq 1.4$ とする。

$X^2_9(0.975) = 2.7004$，$X^2_9(0.025) = 19.0228$ より棄却域は

$U \leqq 2.7004$，$19.0228 \leqq U$ である。

$U = 2.9 \in (2.7004,\ 19.0228)$

から，仮説は棄却されず，強度のばらつきは変化していないといえる。

12

標本の大きさ $n = 5$，標本平均 $\overline{X} = 82$，標本標準偏差 $S = \sqrt{1440}$

⑴　$t_{n-1}(0.05) = t_4(0.05) = 2.776$　より　母平均 m の信頼度 95%の信頼区間は

$$82 - \frac{2.776 \times \sqrt{1440}}{\sqrt{5-1}} \leqq m \leqq 82 + \frac{2.776 \times \sqrt{1440}}{\sqrt{5-1}}$$

から　$29.33 \leqq m \leqq 134.67$

⑵　母分散 σ^2 は既知で $S^2 = 1440$ に等しいものとする。

このとき，母平均 m の信頼度 95%の信頼区間は

$$82 - \frac{1.96 \times \sqrt{1440}}{\sqrt{5}} \leqq m \leqq 82 + \frac{1.96 \times \sqrt{1440}}{\sqrt{5}}$$

から　$48.74 \leqq m \leqq 115.26$

13

月～金の各曜日で来客の比率は一様とする。すなわち

$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 = \frac{1}{5} : \frac{1}{5} : \frac{1}{5} : \frac{1}{5} : \frac{1}{5} \ (k = 5)$ と仮説をたてる。

自由度 $k - 1 = 4$ より棄却域は $U > X_4^2(0.05) = 9.4877$ である。

標本の大きさ $n = 160$，

$X_1 = 32$，$X_2 = 20$，$X_3 = 29$，$X_4 = 41$，$X_5 = 38$　より

$$U = \frac{\left(32 - 160 \times \frac{1}{5}\right)^2}{160 \times \frac{1}{5}} + \frac{\left(20 - 160 \times \frac{1}{5}\right)^2}{160 \times \frac{1}{5}} + \frac{\left(29 - 160 \times \frac{1}{5}\right)^2}{160 \times \frac{1}{5}}$$

$$+ \frac{\left(41 - 160 \times \frac{1}{5}\right)^2}{160 \times \frac{1}{5}} + \frac{\left(38 - 160 \times \frac{1}{5}\right)^2}{160 \times \frac{1}{5}}$$

$$= 8.4375 \leqq 9.4877$$

であるから，仮説は棄却されず，各曜日一様に来客があるといえる。