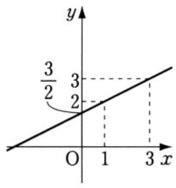
１章　微分法

１節　いろいろな関数表示の微分法

A

1

⑴ $\begin{cases} x = 2t+1 & \cdots① \\ y = t+2 & \cdots② \end{cases}$

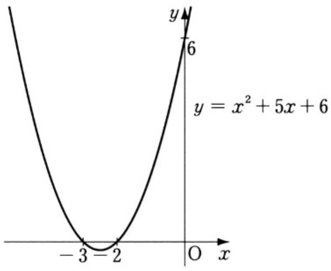


①－2×②より　$x-2y=-3$　　$\therefore$　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

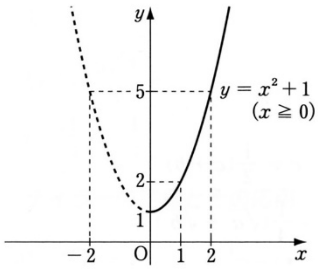
⑵ $\begin{cases} x = t-2 & \cdots① \\ y = t^2+t & \cdots② \end{cases}$

①より　$t=x+2$

②に代入し，整理すると　$y=x^2+5x+6$



⑶ $\begin{cases} x = \sqrt{t} & \cdots① \\ y = t+1 & \cdots② \end{cases}$



①の両辺を 2 乗して②に代入すると　$y=x^2+1$

ただし，①より　$x \geqq 0$

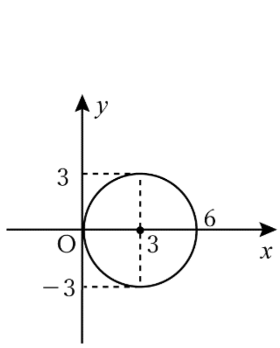
⑷ $\begin{cases} x = 3\sin t+3 & \cdots① \\ y = 3\cos t & \cdots② \end{cases}$

①より　$\dfrac{x-3}{3}=\sin t$

②より　$\dfrac{y}{3}=\cos t$

よって　$\left(\dfrac{x-3}{3}\right)^2+\left(\dfrac{y}{3}\right)^2=\sin^2 t+\cos^2 t$

$=1$　（公式 $\boxed{8}$ ）



従って　$(x-3)^2+y^2=3^2$　（公式 $\boxed{11}$ ）

2

⑴　$y = -2x + 5$ に $x = t + 1$ を代入

$$\therefore \quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 3 \end{cases}$$

⑵　$y = -2x + 5$ に $x = -\frac{1}{2}t$ を代入

$$\therefore \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = t + 5 \end{cases}$$

3

$$\begin{cases} x = t^2 + \frac{1}{t^2} & \cdots ① \\ y = t - \frac{1}{t} & \cdots ② \end{cases}$$

②の両辺を 2 乗すると　$y^2 = \left(t - \frac{1}{t}\right)^2$

$y^2 = t^2 - 2 \times t \times \frac{1}{t} + \left(\frac{1}{t}\right)^2$

$y^2 = t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}$

$y^2 = x - 2$　（①を代入）

$y = \pm\sqrt{x-2}$ より $x > 2$ のとき2つ，$x = 2$ のとき1つ。

4

(1) $\dfrac{dx}{dt} = (2t^2)' = 4t$, $\dfrac{dy}{dt} = (t^2 - 1)' = 2t$ より $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t}{4t} = \dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3'}{(2t-1)'} = \dfrac{0}{2} = 0$

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(t^2 + \dfrac{1}{t^2}\right)'}{\left(t - \dfrac{1}{t}\right)'} = \frac{2t - \dfrac{2}{t^3}}{1 + \dfrac{1}{t^2}} = \frac{2t^4 - 2}{t^3 + t} = 2\frac{t^2 - 1}{t} = 2\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2\sin t - 1)'}{(2\cos t + 4)'} = \dfrac{2\cos t}{-2\sin t} = -\dfrac{1}{\tan t} = -\cot t$

5

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 3 \fallingdotseq 0$ より t の範囲はすべての実数

(2) $\dfrac{dx}{dt} = 1 - \cos t$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において $\dfrac{dx}{dt} = 0$ となるのは

$1 - \cos t = 0$

$\cos t = 1$

$t = 0,\ 2\pi$

よって，$\dfrac{dy}{dx}$ の値が定まるのは $0 < t < 2\pi$

(3) $\dfrac{dx}{dt} = 2t - 3$

$\dfrac{dx}{dt} = 0$ となるのは $2t - 3 = 0$ より $t = \dfrac{3}{2}$ 一方，$y \log t$ の定義域より $t > 0$

よって，$\dfrac{dy}{dx}$ の値が定まるのは $t \fallingdotseq \dfrac{3}{2}$，$t > 0$

6

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 14t = 0$ のとき，すなわち $t = 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ の値は定まらない。

よって，$t \fallingdotseq 0$ とすると $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2 - 12}{14t}$

$\dfrac{dy}{dx} = 0$ より $3t^2 - 12 = 0$ $\therefore\ t = \pm 2$

求める x は

$t = 2$ のとき $x = 7 \times 2^2 + 2 = 30$

$t = -2$ のとき $x = 7 \times (-2)^2 + 2 = 30$ $\therefore\ x = 30$

⑵ $\dfrac{dx}{dt} = -\sin t = 0$ のとき，すなわち　$t = 0,\ \pi,\ 2\pi$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ の値は定まらない。

よって，$t \neq 0,\ \pi,\ 2\pi$ とすると　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\cos t}{\sin t} = -\cot t$

このとき，$\dfrac{dy}{dx} = 0$ となるのは $-\cot t = 0$　　$\therefore\ \ t = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

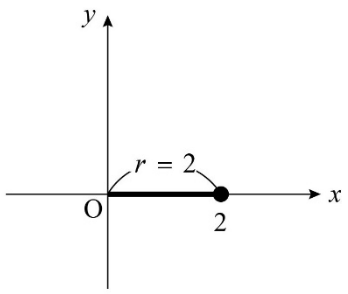
$t = \dfrac{\pi}{2}$ の時　$x = 0$

$t = \dfrac{3}{2}\pi$ の時　$x = 0$

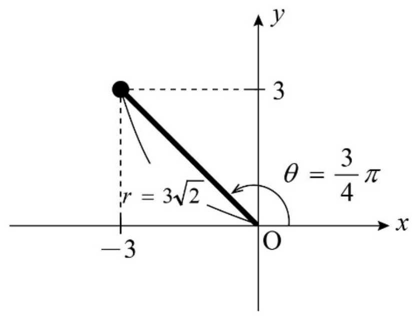
$\therefore\ \ x = 0$

7

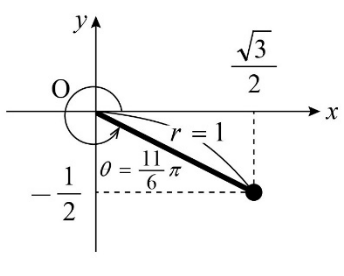
⑴ $(2,\ 0)\ \longrightarrow\ (2,\ 0)$



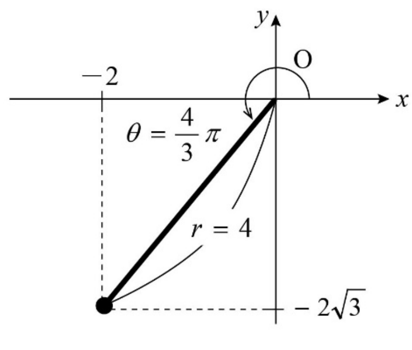
⑵ $(-3,\ 3)\ \longrightarrow\ \left(3\sqrt{2},\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$



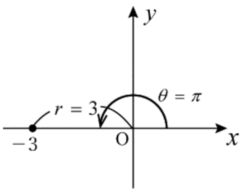
⑶ $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)\ \longrightarrow\ \left(1,\ \dfrac{11}{6}\pi\right)$



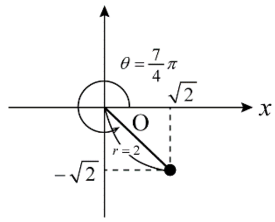
⑷ $\left(-2,\ -2\sqrt{3}\right)\ \longrightarrow\ \left(4,\ \dfrac{4}{3}\pi\right)$



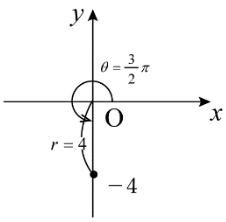
(5) $\left(-3,\ 0\right) \longrightarrow \left(3,\ \pi\right)$



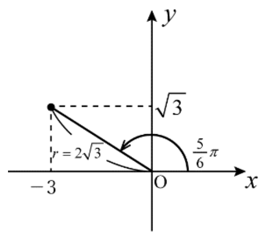
(6) $\left(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right) \longrightarrow \left(2,\ \frac{7}{4}\pi\right)$



(7) $\left(0,\ -4\right) \longrightarrow \left(1\,4,\ \frac{3}{2}\pi\right)$

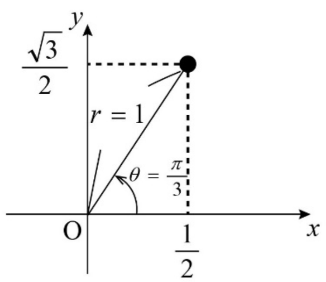


(8) $\left(-3,\ \sqrt{3}\right) \longrightarrow \left(2\sqrt{3},\ \frac{5}{6}\pi\right)$

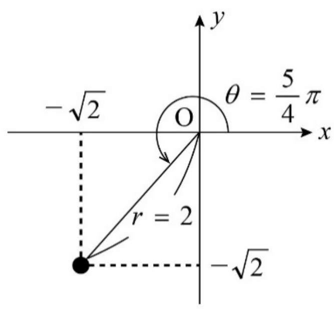


8

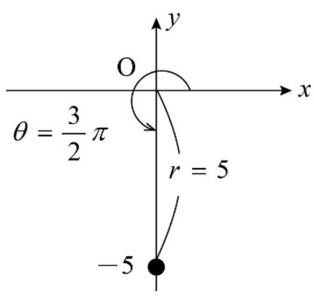
(1) $\left(1,\ \frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



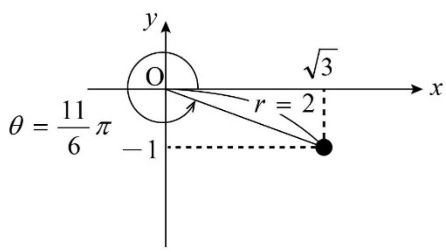
(2) $\left(2,\ \frac{5}{4}\pi\right) \longrightarrow \left(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$



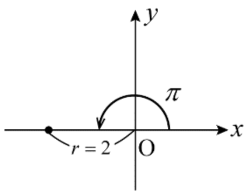
(3) $\left(5,\ \frac{3}{2}\pi\right) \longrightarrow \left(0,\ -5\right)$



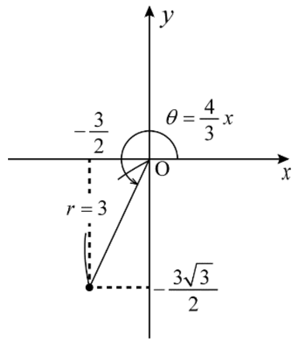
(4) $\left(2,\ \frac{11}{6}\pi\right) \longrightarrow \left(\sqrt{3},\ -1\right)$



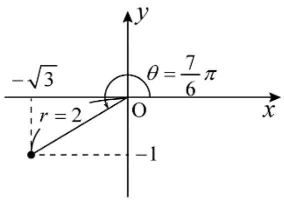
(5) $\left(2,\ \pi\right) \longrightarrow \left(-2,\ 0\right)$



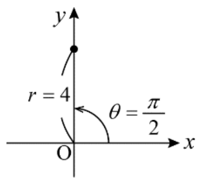
(6) $\left(3,\ \dfrac{4}{3}\pi\right) \longrightarrow \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$



(7) $\left(7,\ \dfrac{7}{6}\pi\right) \longrightarrow \left(-\sqrt{3},\ -1\right)$



(8) $\left(4,\ \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \left(0,\ -4\right)$

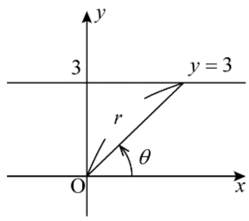


9

(1) 極座標$(r,\ \theta)$と直交座標$(x,\ y)$の間には次のような関係が成り立つ。

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$r\sin\theta = 3$ より $y = 3$

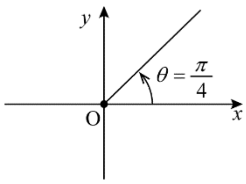


(2) $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ より

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{y}{x}$$

$$1 = \frac{y}{x}$$

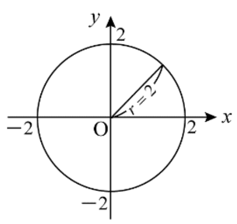
$$y = x$$



$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ より $y = x\ (x \geqq 0)$

(3) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ より $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$

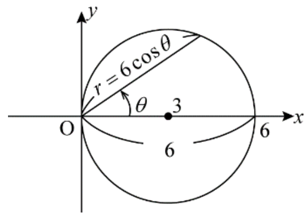
$$x^2 + y^2 = 4$$



(4) $r=6\cos\theta$ の両辺に r を掛けると　$r^2=6r\cos\theta$

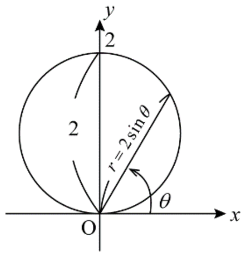
$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$x=r\cos\theta$　より　$x^2+y^2=6x$

$$(x-3)^2+y^2=3^2$$

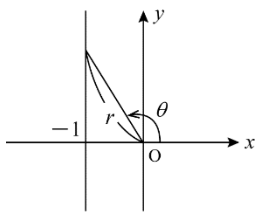


(5) $r=2\sin\theta$　より　$r^2=2r\sin\theta$

よって　$x^2+y^2=2y$



(6) $r\cos\theta=-1$　より　$x=-1$



(7) $r=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

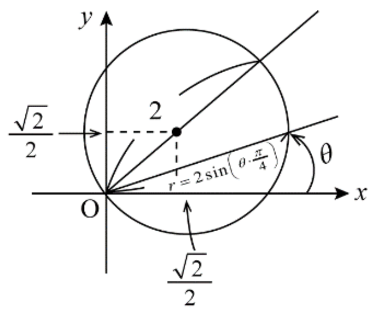
$=2\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$（公式 $\boxed{9}$ ）

$=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)$

よって

$r^2=\sqrt{2}(r\sin\theta+r\cos\theta)$

$x^2+y^2=\sqrt{2}(y+x)$



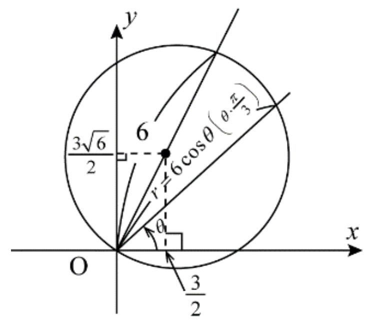
グラフは(5)のグラフを θ 方向に $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転した図形

(8) $r=6\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=6\left(\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$（公式 $\boxed{9}$ ）

$r^2=6\left(r\cos\theta\cdot\dfrac{1}{2}+r\sin\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$x^2+y^2=3x+3\sqrt{3}y$



グラフは(4)のグラフを θ 方向に $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した図形

10

(1) $r\cos\theta - r\sin\theta = -1$ より $r = \dfrac{-1}{\cos\theta - \sin\theta}$

(2) $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$ より $r^2 - 6r\cos\theta - 8r\sin\theta = 0$

よって $r = 6\cos\theta + 8\sin\theta$

(3) $r\cos\theta = 8$ より $r = \dfrac{8}{\cos\theta}$

(4) $r\sin\theta = 5(r\cos\theta)^2 = 5r^2\cos^2\theta$ より $\sin\theta = 5r\cos^2\theta$

よって $r = \dfrac{\sin\theta}{5\cos^2\theta}$

(5) $2^{-2}\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$ より $r^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

(6) $r\cos\theta r\sin\theta = 1$ より $r^2 = \dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta}$

(7) $(r^2)^2 = r^2\cos^2\theta r\sin\theta$ より $r = \cos^2\theta\sin\theta$

(8) $r^2(r^2 - 3r\sin\theta) = -4r^3\sin^3\theta$ より $r - 3\sin\theta = -4\sin^3\theta$

よって　$r = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ $(=\sin 3\theta)$

11

(1)　$r = f(\theta)$ が与えられたとき，直交座標 $(x,\ y)$ と極座標 $(r,\ \theta)$ の関係より

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$r = 2$ より　$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$

このとき　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)}{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)} = \dfrac{(2\sin\theta)'}{(2\cos\theta)'} = \dfrac{2\cos\theta}{-2\sin\theta} = -\cot\theta$

(2)　$r = 2\theta$ のとき　$\begin{cases} x = 2\theta\cos\theta \\ y = 2\theta\sin\theta \end{cases}$

このとき　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2\theta\sin\theta)'}{(2\theta\cos\theta)'} = \dfrac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta + \theta(-\cos\theta)}$

$= \dfrac{\tan\theta + \theta}{1 - \theta\tan\theta}$

(3)　$r = 2a\cos\theta$ より　$\begin{cases} x = 2a\cos\theta\cdot\cos\theta = 2a\cos^2\theta \\ y = 2a\cos\theta\cdot\sin\theta = a\sin 2\theta \end{cases}$

このとき　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(a\sin 2\theta)'}{(2a\cos^2\theta)'} = \dfrac{2a\cos 2\theta}{4a\cos\theta\cdot(-\sin\theta)}$

$= \dfrac{2a\cos 2\theta}{-2a\sin 2\theta} = -\cot 2\theta$

(4)　$r = \sin 2\theta$ より　$\begin{cases} x = \sin 2\theta\cdot\cos\theta \\ y = \sin 2\theta\cdot\sin\theta \end{cases}$

このとき　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\sin 2\theta\cdot\sin\theta)'}{(\sin 2\theta\cos\theta)'} = \dfrac{2\cos 2\theta\cdot\sin\theta + \sin 2\theta\cos\theta}{2\cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta}$

$= \dfrac{\left(\dfrac{2\cos 2\theta\sin\theta + \sin 2\theta\cos\theta}{\cos 2\theta\cos\theta}\right)}{\left(\dfrac{2\cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta}{\cos 2\theta\cos\theta}\right)}$

$= \dfrac{2\tan\theta + \tan 2\theta}{2 - \tan 2\theta\tan\theta}$

12

⑴ $x^2 + y^2 - 5 = 0$

$$y^2 = -x^2 + 5$$

$$y = \pm\sqrt{5 - x^2}$$

$y \geqq 0$ より $y = \sqrt{5 - x^2}$

⑵ $4x - y^2 = 0$

$$y^2 = 4x$$

$$y = \pm 2\sqrt{x}$$

$y \geqq 0$ より $y = 2\sqrt{x}$

⑶ $4x^2 + 5y^2 = 20$

$$5y^2 = -4x^2 + 20$$

$$y^2 = -\frac{4}{5}x^2 + 4$$

$$y = \pm\sqrt{4 - \frac{4}{5}x^2}$$

$y \geqq 0$ より $y = \sqrt{4 - \frac{4}{5}x^2}$

⑷ $x^2 - y^2 = 1$

$x^2 - 1 = y^2$

$x \geqq 0$ より $y = \sqrt{x^2 - 1}$

⑸ $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$y^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1)$

$= 1 - x^2 + 2x - 1$

$= -x^2 + 2x$

$y \geqq 0$ より $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$

⑹

「$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 21 = 0$」

$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 21 = 0$

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

$$(y - 3)^2 = 4 - (x + 4)^2$$

$$y - 3 = \pm\sqrt{4 - (x + 4)^2}$$

$y \geqq 0$ より $y = 3 + \sqrt{4 - (x + 4)^2}$

13

(1) $y^2 = 4x$

$y = 2\sqrt{x}$ （$y \geqq 0$ より）

$\dfrac{dy}{dx} = 2 \times \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

別解 $y^2 = 4x$

両辺をxで微分すると

$2y\dfrac{dy}{dx} = 4$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(2) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

$4x^2 + y^2 = 4$

$y^2 = 4 - 4x^2$

$y = 2\sqrt{1-x^2}$ （$y \geqq 0$ より）

$\dfrac{dy}{dx} = 2 \times \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times (-2x)$

$= -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

別解 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

両辺をxで微分すると

$2x + \dfrac{1}{2}y \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{y}$

$= \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $x^2 - 4y^2 = 1$

$x^2 - 1 = 4y^2$ より $y^2 = \dfrac{x^2-1}{4}$

$y \geqq 0$ より $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2}$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2-1)'$

別解 与式の両辺をxで微分して

$2x - 8y\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{8y}$

$= \dfrac{x}{4y} = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2-1}}$

(4) $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$y^2 = 1-(x^2-2x+1)$

$= -x^2 + 2x$

$y \geqq 0$ より $y = \sqrt{-x^2+2x}$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}(-x^2+2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-x^2+2x)'$

$= \dfrac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x}}$

$= \dfrac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x}}$

別解 与式の両辺をxで微分して

$2(x-1) + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$

$y\dfrac{dy}{dx} = -(x-1)$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(x-1)}{y}$

$= \dfrac{-(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x}}$

$= \dfrac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x}}$

(5) $x^2+y^2+2x=0$

$(x+1)^2+y^2-1=0$

$y^2=1-(x+1)^2$

$y=\sqrt{1-(x+1)^2}$ （$y \geqq 0$ より）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{1-(x+1)^2}}\times(-2x-2)$$

$$=-\frac{x+1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$$

別解 $x^2+y^2+2x=0$

両辺をxで微分すると

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}+2=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}=-2-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-x}{y}$$

$$=\frac{-x-1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$$

(6) $x^2-4y^2-8y=0$

$x^2-4(y^2+2y)=0$

$x^2-4(y+1)^2+4=0$

$(y+1)^2=\frac{1}{4}x^2+1$

$y+1=\sqrt{\frac{1}{4}x^2+1}$ （$y \geqq 0$ より $y+1>0$）

$y=\sqrt{\frac{1}{4}x^2+1}-1$

$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}-1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\times 2x$$

$$=\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}}$$

別解 $x^2-4y^2-8y=0$

両辺をxで微分すると

$$2x-8y\frac{dy}{dx}-8\frac{dy}{dx}=0$$

$$(8y+8)\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{4(y+1)}$$

$$=\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}}$$

14

(1) $y^2-4x=0$

$2y\frac{dy}{dx}-4=0$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{2y}=\frac{2}{y}$

(2) $x^2+4y^2-16=0$

$2x+8y\frac{dy}{dx}=0$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$

(3) $x^3+y^3=1$

$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=0$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2}{y^2}$

(4) $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

$2(x-3)+2(y-2)\frac{dy}{dx}=0$

$(y-2)\frac{dy}{dx}=3-x$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx}=\frac{3-x}{y-2}$

(5) $xe^x + ye^y = 1$

$$(e^x + xe^x) + (e^y + ye^y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(1 + y)e^y \frac{dy}{dx} = -(1 + x)e^x \qquad \therefore \ \frac{dy}{dx} = -\frac{1 + x}{1 + y} e^{x-y}$$

(6) $x^2 - 4y^2 - 8y = 0$ より

$$2x - 8y\frac{dy}{dx} - 8\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(8y - 8)\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y - 4}$$

15

(1) $\sin x + \cos y = 1$

$$\cos x - \sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \therefore \ \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin y}$$

(2) $xy = 4$

$$y + x\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \therefore \ \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

(3) $x^2 + 3xy + y^2 = 1$

$$2x + \left(3y + 3x\frac{dy}{dx}\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2x + 3y) + (3x + 2y)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \therefore \ \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}$$

(4) $x + y = \log\dfrac{1}{xy}$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{1}{xy}\right)} \times \frac{-\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)}{(xy)^2} \qquad (\text{公式}\boxed{23}\ \boxed{25})$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$xy + xy\frac{dy}{dx} = -y - x\frac{dy}{dx}$$

$$(xy + x)\frac{dy}{dx} = -xy - y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x + 1)}{x(y + 1)}$$

(5) $\cos x \sin y = 1$

$$-\sin x \sin y + \cos x \cos y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\cos x \cos y \frac{dy}{dx} = \sin x \sin y$$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$

$= \tan x \tan y$

(6) $e^{2x} \cos 3y = e$

$$e^{2x} \frac{d(2x)}{dx} \cos 3y + e^{2x}(-\sin 3y) \frac{d(3y)}{dx} = 0$$

$$2e^{2x} \cos 3y - e^{2x} \sin 3y \frac{d(3y)}{dy} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3e^{2x} \sin 3y \frac{dy}{dx} = 2e^{2x} \cos 3y$$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{3} \cot 3y$

16

(1) $r^2 = 4\theta$ より $2r \dfrac{dr}{d\theta} = 4$ よって $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{2}{r}$

(2) $r^2 = 9 \sin 2\theta$

$2r \dfrac{dr}{d\theta} = 9 \cdot 2 \cos 2\theta$ $\quad \therefore \dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{9 \cos 2\theta}{r}$

(3) $r^2 = 4 \cos \theta$

$2r \dfrac{dr}{d\theta} = 4(-\sin 2\theta) \dfrac{d(2\theta)}{d\theta} = -8 \sin 2\theta$ よって $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{-8 \sin 2\theta}{2r} = \dfrac{-4 \sin 2\theta}{r}$

(4) $r^2 = \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta$

$r^2 = \cos 4\theta$ （公式 $\boxed{10}$②）

$2r \dfrac{dr}{d\theta} = -4 \sin 4\theta$ $\quad \therefore \dfrac{dr}{d\theta} = -\dfrac{2 \sin 4\theta}{r}$

(5) $r^2 = 18 \sin \theta \cos \theta$ より

$r^2 = 9 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$ （公式 $\boxed{10}$①）

$= 9 \sin 2\theta$

よって $2r \dfrac{dr}{d\theta} = 9 \cdot 2 \cos 2\theta$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{9 \cos 2\theta}{r}$$

⑹　$r^2\cos\theta\sin\theta=1$

$r^2 2\cos\theta\sin\theta=2$　（公式 $\boxed{10}$ ①）

$r^2\cdot\sin 2\theta=2$

よって　$2r\dfrac{dr}{d\theta}\cdot\sin 2\theta+r^2\cdot 2\cos 2\theta=0$

$r\dfrac{dr}{d\theta}\cdot\sin 2\theta=-r^2\cos 2\theta$

$\dfrac{dr}{d\theta}=-r\cot 2\theta$

B

17

⑴　$t=1$のとき $x=2$，$y=0$　より

求める接線の接点は　(2，0)

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(t^2-t)'}{(t+1)'}=\dfrac{2t-1}{1}=2t-1$

$t=1$のとき $\dfrac{dy}{dx}=1$　より　接線の傾きは　1

傾き m，(a，b) を通る直線は

㋐　$y-b=m(x-a)$　なので　$y-0=1\cdot(x-2)$　　∴　$y=x-2$

⑵　$t=2$ のとき $x=\dfrac{2}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$　より

求める接線の接点は　$\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)'}{\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)'}=\frac{\dfrac{(t^2)'(1+t^2)-t^2(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{(t)'(1+t^2)-t^2(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}}$$ （公式 $\boxed{23}$）

$$=-\frac{2t(1+t^2)-t^2\cdot 2t}{1+t^2-2t^2}=\frac{2t}{1-t^2}$$

$t=2$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{1-4}=-\dfrac{4}{3}$

よって接線の傾きは　$-\dfrac{4}{3}$

以上より接線の方程式は⑴ ㋐より　$y-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{4}{3}\left(x-\dfrac{2}{5}\right)$

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$$

18

$y^2=8x$

$2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=8$　　$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{y}$　よって接線の傾きは $y=4$ を代入して 1

一方，接線は（2，4）を通るので，⑴ ㋐ より

$y-4=1\cdot(x-2)$

$\therefore$　$y=x+2$

19

$x^2-xy+y^2=1$　両辺を x で微分すると

$2x-y-x\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=0$　　$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x-2y}$　よって接線の傾きは $x=0$， $y=1$ を代入して $\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$

一方接線は（0，1）を通るので⑴ ㋐より

$y-1=\dfrac{1}{2}(x-0)$　　$\therefore$ $y=\dfrac{1}{2}x+1$

20

⑴　$x^3+xy+y^2=a^2$　両辺を x で微分すると

$3x^2+y+x\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=0$　　$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2+y}{x+2y}$

⑵　$\sin x+\sin y-\sin(x+y)=0$

両辺を x で微分すると

$\dfrac{d\sin(x+y)}{dx}=\cos(x+y)\cdot\dfrac{d(x+y)}{dx}$ より

$\cos x+\cos y\dfrac{dy}{dx}-\cos(x+y)\cdot\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)=0$

$\cos x+\cos y\dfrac{dy}{dx}-\cos(x+y)-\cos(x+y)\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\cos x+\cos(x+y)}{\cos y-\cos(x+y)}$

⑶　$e^x+e^y=e^{x+y}$　両辺を x で微分すると $\dfrac{de^{x+y}}{dx}=e^{x+y}\cdot\dfrac{d(x+y)}{dx}$ より

$e^x+e^y\cdot\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)$

$(e^y-e^{x+y})\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}-e^x$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^{x+y}-e^x}{e^{x+y}-e^y}$

１章　微分法

２節　平均値の定理とその応用

A

21

⑴　$f(x)$は閉区間$[0,\ 1]$で連続

　　　開区間$(0,\ 1)$で微分可能

$f(0)=0=f(1)$ なので

$f'(x)=2x-1=0$ となる $x(0<x<1)$ が存在する。

$x=\dfrac{1}{2}$ より $c=\dfrac{1}{2}$ とすればよい。

⑵　$f(x)$は閉区間$[0,\ 1]$で連続

　　　開区間$(0,\ 1)$で微分可能

$f(0)=0=f(1)$ なので

$f'(x)=3x^2-2x=0$ となる $x(0<x<1)$ が存在する。

$x=0,\ \dfrac{2}{3}$ より $c=\dfrac{2}{3}$ とすればよい。

⑶　$f(x)$は閉区間$[0,\ 2]$で連続

　　　開区間$(0,\ 2)$で微分可能

$f(0)=0=f(2)$ なので

$$f'(x)=\frac{1}{2}(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x-x^2)'$$

$=\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=0$ となる $x\ (0<x<2)$ が存在する。

$x=1$ より $c=1$ とすればよい。

⑷　$f(x)$は閉区間$[0,\ 2]$で連続

　　　開区間$(0,\ 2)$で微分可能

$f(0)=\sqrt{2}=f(2)$ なので

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-2x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\ (x^2-2x+2)'$$

$=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}=0$ となる $x(0<x<2)$ が存在する。

$x=1$ より $c=1$ とすればよい。

⑸　$f(x)$は閉区間$[0,\ 2\pi]$で連続

開区間$(0,\ 2\pi)$で微分可能

$f(0)=\sin 0=0,\quad f(2\pi)=\sin 2\pi=0\quad\therefore\quad f(0)=f(2\pi)=0$

このとき，ロールの定理より　$f'(c)=0$を満たすcが存在する。

$$f'(c)=\cos c=0\qquad\therefore\quad c=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

これらの値は，区間$[0,\ 2\pi]$に含まれる。

⑹　$f(x)$は閉区間$[0,\ 2\pi]$で連続

開区間$(0,\ 2\pi)$で微分可能

$f(0)=1=f(2\pi)$ なので

$f'(x)=-\sin x+\cos x=0$ となる $x\,(0<x<2)$ が存在する。

$\cos x=\sin x$

$1=\tan x$

よって $x=\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

従って $c=\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$ とすればよい。

⑺　$f(x)$は閉区間$[0,\ 2\pi]$で連続

開区間$(0,\ 2\pi)$で微分可能

$f(0)=\cos 0-\sin 0=1$

$f(2\pi)=\cos 2\pi-\sin 2\pi=1\quad\therefore\quad f(0)=f(2\pi)=1$

このとき，ロールの定理より　$f'(c)=0$を満たすcが存在する。

$$f'(c)=-\sin c-\cos c=0$$

$$-\cos c=\sin c$$

$$-1=\frac{\sin c}{\cos c}$$

$$-1=\tan c\qquad\therefore\quad c=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

22

⑴　$f(x)=x^2$ は閉区間$[0,\ 3]$で連続

開区間$(0,\ 3)$で微分可能なので，平均値の定理より

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$$

となる c が存在する。

このとき，$\dfrac{3^2-0^2}{3-0}=2\cdot c$　　　$c=\dfrac{3}{2}$　（$0<c<3$ に適する）

⑵　$f(x)=\sqrt{x^2-1}$　は閉区間$[1,\ 4]$で連続

開区間$(1,\ 4)$で微分可能なので，平均値の定理より

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$$

となる c が存在する。

このとき，$\dfrac{\sqrt{4^2-1}-\sqrt{1^2-1}}{3}=\dfrac{1\times 2c}{2\sqrt{c^2-1}}$　　　$\dfrac{\sqrt{15}}{3}=\dfrac{c}{\sqrt{c^2-1}}$　　　$c^2=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\quad c=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

$1<c<4$　より　$c=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

⑶　$f(x)=\log x$　のとき，平均値の定理より

$\dfrac{f(e)-f(1)}{e-1}=f'(c)$　となるcが存在する

$$\frac{\log e-\log 1}{e-1}=\frac{1}{c}$$

$\dfrac{1-0}{e-1}=\dfrac{1}{c}$　　　$\therefore\quad c=e-1$　（$1<c<e$に適する）

⑷　$f(x)=\mathrm{Sin}^{-1}x$　のとき，平均値の定理より　$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$　となるcが存在する

$$\frac{\mathrm{Sin}^{-1}(1)-\mathrm{Sin}^{-1}(0)}{1-0}=\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

$\dfrac{\frac{\pi}{2}-0}{1-0}=\dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}}$　　　$\therefore\quad c=\sqrt{1-\dfrac{4}{\pi^2}}$　（$0<c<1$ のため）

⑸　$f(x)=x^2-x$ は閉区間［－1，2］で連続

開区間（－1，2）で微分可能

なので $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(x)$ つまり $0=2x-1$

となる $x\,(-1<x<2)$ が存在する。

$x=\dfrac{1}{2}$ より $c=\dfrac{1}{2}$ とすればよい。

⑹　$f(x)=x^3-x^2$ は閉区間［－1，2］で連続

開区間（－1，2）で微分可能

なので $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(x)$

つまり $\dfrac{(8-4)-(-1-1)}{3}=3x^2-2x$ となる $x\,(-1<x<2)$ が存在する。

$2=3x^2-2x$

$3x^2-2x-2=0$ より

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+6}}{3}$

よって $c=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{3}$ とすればよい。

⑺　$f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ は閉区間［0，1］で連続

開区間（0，1）で微分可能

なので $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(x)$

つまり $\dfrac{\frac{\pi}{4}-0}{1}=\dfrac{1}{1+x^2}$ となる $x\,(0<x<1)$ が存在する。

$x^2+1=\dfrac{4}{\pi}$

$x^2=\dfrac{4}{\pi}-1$　　$x=\pm\sqrt{\dfrac{4}{\pi}-1}$

よって $c=\sqrt{\dfrac{4}{\pi}-1}$ とすればよい。

⑻　$f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ は閉区間$[-1,\ 2]$で連続

開区間$(-1,\ 2)$で微分可能

なので　$\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(x)$

つまり　$\dfrac{\frac{1}{4}-1}{3}=-(x+2)^{-2}$ となる $x\,(-1<x<1)$ が存在する。

$$-\frac{1}{4}=-\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$(x+2)^2=4$$

$$x\neq 2=\pm 2$$

$$x=0,\ \ 4$$

よって $c=0$ とすればよい。

23

⑴　$f(x)=x^2,\ \ g(x)=x$ は閉区間$[0,\ 2]$で連続

開区間$(0,\ 2)$で微分可能，　$f'(x)\neq 0$ である。

よって $\dfrac{g(2)-g(0)}{f(2)-f(0)}=\dfrac{(x)'}{(x)'}$ となる $x(0<x<2)$ が存在する。

$\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2x}$ より $x=1$

よって $c=1$ とすればよい。

⑵　$f(x)=x^2,\ \ g(x)=x^3$ は閉区間$[0,\ 1]$で連続

開区間$(0,\ 1)$で微分可能，　$f'(x)\neq 0$ である。

よって $\dfrac{g(1)-g(0)}{f(1)-f(0)}=\dfrac{(x^3)'}{(x^2)'}$ となる $x\,(0<x<1)$ が存在する。

$\dfrac{1}{1}=\dfrac{3x^2}{2x}$ より $x=\dfrac{2}{3}$

よって $c=\dfrac{2}{3}$ とすればよい。

⑶　$f(x)=x^3,\ \ g(x)=x^2+1$ は閉区間$[0,\ 3]$で連続

開区間$(0,\ 3)$で微分可能，　$f'(x)\neq 0$ である。

よって $\dfrac{g(3)-g(0)}{f(3)-f(0)}=\dfrac{(x^2+1)'}{(x^3)'}$ となる $x\,(0<x<3)$ が存在する。

$\dfrac{10-1}{27-0}=\dfrac{2x}{3x^2}$ より $\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3x}$

$$x=2$$

よって $c=2$ とすればよい。

(4) $f(x)=e^x$,　$g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ は閉区間$[0,\ \log 2]$で連続

開区間$(0,\ \log 2)$で微分可能，　$f'(x)\neq 0$ である。

よって $\dfrac{g(\log 2)-g(0)}{f(\log 2)-f(0)}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)'}{(e^x)'}$ となる $x(0<x<\log 2)$ が存在する。

$$\frac{\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{e^x}$$

よって $\log 2=\dfrac{1}{e^x}$

$$e^x=\frac{1}{\log 2}\qquad \log e^x=\log\left(\frac{1}{\log 2}\right)$$

従って $x=\log\left(\dfrac{1}{\log 2}\right)$

つまり $c=\log\left(\dfrac{1}{\log 2}\right)$ とすればよい。

$$=\log(\log 2)^{-1}=-\log(\log 2)$$

24

(1) $\dfrac{0}{0}$ の不定形であるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x^2-x-6)'}{(x^3-8)'}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{4x-1}{3x^2}=\frac{7}{12}$$

別解 $$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{x^2+2x+4}=\frac{7}{12}$$

(2) $\dfrac{0}{0}$ の不定形であるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}$$
$$=2$$

(3) $\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\log x)'}{(x-1)'}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$$

⑷ $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=0$$

⑸ $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log(\sin x)}{\log x}=\lim_{x\to+0}\frac{(\log(\sin x))'}{(\log x)'}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\sin x}\times\cos x}{\frac{1}{x}} \qquad \text{公式 } \boxed{24}\boxed{25}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{x}{\tan x}$$

$\left(\dfrac{0}{0}\right.$ の不定形なので，ロピタルの定理より$\left.\right)$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{x'}{(\tan x)'}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}=1 \qquad \text{公式 } \boxed{26}$$

⑹ $\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}$$

$\left(\dfrac{0}{0}\right.$ の不定形なので，ロピタルの定理より$\left.\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(2x)'}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2}=0$$

(7) $\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Sin}^{-1}(2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\times(2x)'}{1} \qquad \text{公式 } \boxed{28}$$

$$=2$$

(8) $\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Tan}^{-1}\,x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2} \qquad \text{公式 } \boxed{28}$$

$$=\frac{1}{2}$$

(9) $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+1}+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\times(2x+1)'}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$=0$$

(10) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}-\dfrac{2}{x}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

25

(1) $f(x)=x^2$ より $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

$$b^2-a^2=(b-a)\times 2c$$

$$2c=\frac{b^2-a^2}{b-a} \qquad \therefore\ c=\frac{1}{2}(a+b)$$

($a<c<b$を満たす)

(2) $f(x)=\sqrt{x}$ より $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

$$\sqrt{b}-\sqrt{a}=(b-a)\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}$$

$$2\sqrt{c}=\frac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$$

$$2\sqrt{c}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$$

$$2\sqrt{c}=\sqrt{b}+\sqrt{a}$$

$$4c=(\sqrt{b}+\sqrt{a})^2 \qquad \therefore\ c=\frac{1}{4}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

26

$f(x)=x^2+px+q$ について $f'(x)=2x+p$

$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h$ より

$$(a+h)^2+p(a+h)+q=a^2+pa+q+\{2(a+\theta h)+p\}\times h$$

$$a^2+2ah+h^2+ap+ph+q=a^2+pa+q+2h(a+\theta h)+ph$$

$$h^2=2h^2\theta$$

$$\therefore\ \theta=\frac{1}{2}$$

27

$f(x)=\log x$ とおくと $x>0$ より

$[x,\ x+1]$で連続，$(x,\ x+1)$で微分可能なので

平均値の定理より $f'(c)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$ となる c が $x<c<x+1$ で存在する。

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ より $\dfrac{1}{c}=\dfrac{\log(1+x)-\log x}{1}$

$0<x<c<x+1$ より $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{x}$

$$\frac{1}{x+1}<\log(1+x)-\log x<\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x+1}<\log\frac{1+x}{x}<\frac{1}{x}$$

以上より $\dfrac{1}{x+1}<\log\dfrac{1+x}{x}$ が成り立つ。

28

$f(x)=\sin x$　とおくと，平均値の定理より

$\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}=f'(c)$　となる c が　$\alpha<c<\beta$ で存在する

$f'(x)=\cos x$　より　$f'(c)=\cos c\leqq 1$

$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$　より　$0<c<\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$\cos c\neq 1$　　$\therefore$　$\cos c<1$

よって　$\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}=\cos c<1$

すなわち　$\sin\beta-\sin\alpha<\beta-\alpha$

29

(1)　$\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x-\tan x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\left(\dfrac{1}{\cos^2 2}\right)}\qquad \text{ア}\ \text{公式}\ \boxed{26}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\dfrac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos x+1}\cdot\cos^2 x=\frac{-1}{2}$$

別解

$\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\text{ア}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(1-\sec^2 x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{-2\sec x\cdot\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x}{-2}=-\frac{1}{2}$$

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^3 - x^2 + 1)'}{(e^x)'}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{e^x}$$

$\left(\dfrac{\infty}{\infty} \text{の不定形なので，ロピタルの定理より} \right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(3x^2 - 2x)'}{(e^x)'}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6x - 2}{e^x}$$

$\left(\dfrac{\infty}{\infty} \text{の不定形なので，ロピタルの定理より} \right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(6x - 2)'}{(e^x)'}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

(3) $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x \to +0} \frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)} = \lim_{x \to +0} \frac{(\log(\tan 2x))'}{(\log(\tan x))'}$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{\dfrac{1}{\tan 2x} \times \dfrac{1}{\cos^2 2x} \times 2}{\dfrac{1}{\tan x} \times \dfrac{1}{\cos^2 x}}$$ 公式 $\boxed{24}$ $\boxed{26}$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{2 \tan x \cdot \cos^2 x}{\tan 2x \cdot \cos^2 2x}$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin 2x \cdot \cos 2x}$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{2 \sin 2x}{\sin 4x}$$

$\left(\dfrac{0}{0} \text{の不定形なので，ロピタルの定理より} \right)$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{(2 \sin 2x)'}{(\sin 4x)'}$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{2 \cos 2x \cdot 2}{\cos 4x \cdot 4}$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{\cos 2x}{\cos 4x}$$

$$= 1$$

⑷ $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(ax+1)}{\log(bx+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log(ax+1))'}{(\log(bx+1))'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{ax+1}\times a}{\dfrac{1}{bx+1}\times b}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{a(bx+1)}{b(ax+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(abx+a)'}{(abx+b)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{ab}{ab} = 1$$

30

⑴ 与式は $0\times\infty$ の不定形である。

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\frac{x-3}{x+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$

$\dfrac{0}{0}$ の不定形なのでロピタルの定理より

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left\{\log\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)\right\}'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left\{\log(x-3)-\log(x+3)\right\}'}{-x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{6}{x^2-9}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$ 公式 $\boxed{25}$ より

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{6x^2}{x^2-9}\right)$$

$\dfrac{0}{0}$ の不定形なのでロピタルの定理より

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(-6x^2)'}{(x^2-9)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-12x}{2x} = -6$$

⑵ $x\to\dfrac{\pi}{2}-0$ のとき与式は $\infty-\infty$ の不定形である。

また，$x\to\dfrac{\pi}{2}+0$ のとき $-\infty+\infty$ の不定形である。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x-1}{\cos x}\right)$$

$\dfrac{0}{0}$ の不定形なのでロピタルの定理より

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)'}{(\cos x)'}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}$$

$$= 0$$

（ただし $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ である）

(3)　与式は $x \to +0$ のとき 1^{∞} の不定形である。また $x \to -0$ のとき $1^{-\infty}$ の不定形である。

$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ において $y = \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ とし両辺の対数をとると

$$\log y = \frac{1}{x}\log\frac{\tan x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0}\log y = \lim_{x \to 0}\frac{\log\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{\left(\log\frac{\tan x}{x}\right)'}{x'}$$

$\frac{0}{0}$ の不定形なので
ロピタルの定理より

$$= \lim_{x \to 0}\frac{1}{\frac{\tan x}{x}} \times \left(\frac{\tan x}{x}\right)'$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{x}{\tan x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot x - \tan x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{x(x - \sin x\cos x)}{(\sin x\cos x) \cdot x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{2x - 2\sin x\cos x}{x \cdot 2\sin x\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{2x - \sin 2x}{x\sin 2x}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{(2x - \sin 2x)'}{(x\sin 2x)'}$$

$\frac{0}{0}$ の不定形なので
ロピタルの定理より

$$= \lim_{x \to 0}\frac{2 - 2\cos 2x}{\sin 2x + 2x\cos 2x}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{(2 - 2\cos 2x)'}{(\sin 2x + 2x\cos 2x)'}$$

$\frac{0}{0}$ の不定形なので
ロピタルの定理より

$$= \lim_{x \to 0}\frac{4\sin 2x}{4\cos 2x - 4x\sin 2x}$$

$$= 0$$

$\log y \to 0$ より

$y \to 1$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$$

(4)　与式は ∞^0 の不定形である。

$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ において $y = x^{\frac{1}{x}}$ とすると $\log y = \frac{\log x}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty}\log y = \lim_{x \to +\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x \to +\infty}\frac{(\log x)'}{x'}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので
ロピタルの定理より

$$= \lim_{x \to +\infty}\frac{1}{x}$$

$$= 0$$

$\log y \to 0$ より $y \to 1$　　　$\therefore \quad \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

⑸　与式は　0^0　の不定形である。

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(\tan x)^x$　において　$y=(\tan x)^x$　とすると　$\log y = x\log(\tan x)$

$$\lim_{x\to+0}\log y=\lim_{x\to+0}x\log(\tan x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log(\tan x)}{\frac{1}{x}}\quad\left(\frac{-\infty}{\infty}\text{の不定形}\right)$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot(\tan x)'}{-x^{-2}}=\lim_{x\to+0}\left[-x^2\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right]\quad\text{公式}\boxed{26}$$

$$=\lim_{x\to+0}\left[\frac{-x^2}{\sin x\cos x}\right]=\lim_{x\to+0}\left[\frac{-x}{\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x}\right]=0$$

$$\left(\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=1\right)$$

$\log y\to 0$　より　$y\to 1$　　　よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}(\tan x)^x=1$

⑹　与式は　1^∞の不定形である。

$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\frac{1}{x-1}}$　において　$y=x^{\frac{1}{x-1}}$　とすると　$\log y=\dfrac{1}{x-1}\log x$ である。

$$\lim_{x\to1+0}\log y=\lim_{x\to1+0}\frac{\log x}{x-1}\quad\left(\frac{0}{0}\text{の不定形}\right)$$

$$=\lim_{x\to1+0}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$

$\log y\to 1$　より　$y\to e$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}x^{\frac{1}{x-1}}=e$

31

⑴　$f(x) = x + \dfrac{2}{x}$ の$[1,\ 3]$における平均変化率は

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{\left(3 + \frac{2}{3}\right) - \left(1 + \frac{2}{1}\right)}{2}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

⑵　接点を$(c,\ f(c))$とすると，接線の傾きは

$$f'(c) = 1 - \frac{2}{c^2}$$

⑴の平均変化率と等しい傾きとなることから

$$1 - \frac{2}{c^2} = \frac{1}{3}$$

$$c^2 = \pm\sqrt{3}$$

$1 < c < 3$　より　$c = \sqrt{3}$　　　$\therefore$　$\left(\sqrt{3},\ \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$

⑶　$y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

32

⑴　2 点$(0,\ 0)$，$(4,\ 2)$を結ぶ直線の傾きは

$$\frac{2 - 0}{4 - 0} = \frac{1}{2} \quad \cdots①$$

曲線　$y = \sqrt{x}$　上の任意の点　$(c,\ \sqrt{c})$，$0 < c < 4$　における接線の傾きは

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad より \quad \frac{1}{2\sqrt{c}} \quad \cdots②$$

よって，接線の方程式は

$$y - \sqrt{c} = \frac{1}{2\sqrt{c}}(x - c)$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{c}}x + \frac{1}{2}\sqrt{c}$$

①，②より　　　$c = 1$

$\therefore$　　$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

(2) $\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)+k(x-1)^2$ は $f(x)=1+f'(x)(x-1)+k(x-1)^2$ と表せる。

よって $f'(x)=f'(1)+2k(x-1)$ であり $x\neq 1$ のとき $\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=2k$ ①なので

これを満たす k を求めればよい。

ところが $1<x$ のとき $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ は ［1，x］で連続，開区間（1，x）で微分可能でなので

平均値の定理より $\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=f''(c)$ ②を満たす $c\,(1<c<x)$ が存在する。

$1>x$ のときも同様。②を満たす $c\,(1<c<x)$ が存在する。

よって①②より $2k=f''(c)=-\frac{1}{4}c^{-\frac{3}{2}}$ つまり $k=-\frac{1}{4\sqrt{c^3}}$ とすればよい。

１章　微分法

３節　テイラーの定理とその応用

A

33

(1)　$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$,　$f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$　より

$$\sqrt{x} \fallingdotseq \sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$$

(2)　$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$,　$f'(x)=\dfrac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$　より

$$\sqrt[3]{1+x} \fallingdotseq \sqrt[3]{1+a}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+a)^2}}(x-a)$$

(3)　$f(x)=\sqrt[4]{x}$,　$f'(x)=\dfrac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}$　より

$$\sqrt[4]{x} \fallingdotseq \sqrt[4]{a}+\frac{1}{4\times\sqrt[4]{a^3}}(x-a)$$

(4)　$f(x)=\log x$,　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$　より　　　公式 $\boxed{25}$

$$\log x \fallingdotseq \log a+\frac{1}{a}(x-a)$$

(5)　$f(x)=e^x$,　$f'(x)=e^x$　より

$$e^x \fallingdotseq e^a+e^a(x-a)$$

(6)　$f(x)=\sin x$,　$f'(x)=\cos x$　より

$$\sin x \fallingdotseq \sin a+(x-a)\cos a$$

(7)　$f(x)=\cos x$,　$f'(x)=-\sin x$　より

$$\cos x \fallingdotseq \cos a-(x-a)\sin a$$

⑴　$f(x)=\sqrt{x}$　とすると　$f(x)\fallingdotseq\sqrt{a}+\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$　より

$x=4.1$，　$a=4$　として

$$\sqrt{4.1}\fallingdotseq\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}(4.1-4)$$

$$=2+\frac{1}{4}\times0.1$$

$$=2.025\qquad(\sqrt{4.1}=2.024845673\cdots)$$

⑵　33⑵で $x=7.1$，　$a=7$　として

$$\sqrt[3]{8.1}\fallingdotseq\sqrt[3]{8}+\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}(7.1-7)$$

$$=2+\frac{1}{12}\times0.1$$

$$\fallingdotseq2.0083$$

⑶　$f(x)=\sqrt[4]{x}$　とすると　$f(x)\fallingdotseq\sqrt[4]{a}+\dfrac{1}{4\times\sqrt[4]{a^3}}(x-a)$　より

$x=16.1$，　$a=16$　として

$$\sqrt[4]{16.1}\fallingdotseq\sqrt[4]{16}+\frac{1}{4\times\sqrt[4]{16^3}}(16.1-16)$$

$$=2+\frac{1}{32}\times0.1$$

$$=2.003125\qquad(\sqrt[4]{16.1}=2.00311770\cdots)$$

⑷　$f(x)=\log x$　とすると　$f(x)\fallingdotseq\log a+(x-a)\times\dfrac{1}{a}$　より

$x=1.1$，　$a=1$　として

$$\log(1.1)\fallingdotseq\log1+(1.1-1)\times\frac{1}{1}$$

$$=0+0.1$$

$$=0.1\qquad(\log(1.1)=0.09531\cdots)$$

⑸　33⑸で $x=0.9$，　$a=1$　として

$$e^{0.9}\fallingdotseq e^1+e^1(0.9-1)$$

$$\fallingdotseq2.446$$

⑹　33⑹で $x=\dfrac{\pi}{100}$，　$a=0$　として

$$\sin\frac{\pi}{100}\fallingdotseq\sin0+\left(\frac{\pi}{100}-0\right)\cos0$$

$$=\frac{\pi}{100}$$

$$\fallingdotseq0.0314$$

(7)　33(7)で $x=\dfrac{12}{25}\pi$，　$a=\dfrac{\pi}{2}$　として

$$\cos\frac{12}{25}\pi \fallingdotseq \cos\frac{\pi}{2}-\left(\frac{12}{25}\pi-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{50}$$

$$\fallingdotseq 0.0628$$

35

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$　において　$f'(x)=-(1+x)^{-2}$，　$f''(x)=2(1+x)^{-3}$　より

$f'(x)\fallingdotseq\dfrac{1}{1^{1+a}}-\dfrac{1\times(x-a)}{(1+a)^2}$ が一次近似式

$f(x)\fallingdotseq\dfrac{1}{1+a}-\dfrac{1\times(x-a)}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{2}\times2\cdot\dfrac{1}{(1+a)^3}(x-a)^2$　　が二次近似式

$a=0$ とすると

$f(x)\fallingdotseq 1-1\times x$

$=1-x$　　　　　　が一次近似式

$f(x)\fallingdotseq 1-x+x^2$　が二次近似式

(2)　$\dfrac{1}{1.05}\fallingdotseq\dfrac{1}{1+0}-\dfrac{1}{(1+0)^2}(0.05-0)=0.95$　　が一次近似値

$$\mathrm{Sin}^{-1}x=\mathrm{Sin}^{-1}0+\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}x+\frac{-0}{(0^2-1)\sqrt{1-0^2}}\times\frac{x^2}{2!}+\frac{2\times0^2+1}{(0^2-1)^2\sqrt{1-0^2}}\times\frac{x^3}{3!}$$

$$+\frac{-3\times0\times(2\times0^2+3)}{(0^2-1)^3\sqrt{1-0^2}}\times\frac{x^4}{4!}+\frac{24\times0^4+72\times0^2+9}{(0^2-1)^4\sqrt{1-0^2}}\times\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{9}{5!}x^5+\cdots$　　が二次近似値

36

(1)　33(1)の解答より

$f''(x)=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$　なので　$f''(a)=-\dfrac{1}{4\sqrt{a}}$

よって 33(1)の答に 2 次の項を加えて

$$f(x)\fallingdotseq\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)-\frac{1}{2!4\sqrt{a^3}}(x-a)^2$$

$$=\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)-\frac{1}{8\sqrt{a^3}}(x-a)^2\quad(a>0)$$

⑵　33⑵の解答より

$$f''(x)=-\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}\quad なので\quad f''(a)=-\frac{2}{9}(1+a)^{-\frac{5}{3}}$$

よって 33⑵の答に 2 次の項を加えて

$$f(x)\fallingdotseq\sqrt[3]{1+a}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+a)^2}}(x-a)-\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{9\sqrt[3]{(1+a)^2}}(x-a)^2$$

$$=\sqrt[3]{1+a}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+a)^2}}(x-a)-\frac{1}{9\sqrt[3]{(1+a)^5}}(x-a)^2$$

⑶　33⑶の解答より $f''(x)=-\dfrac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}$　なので

33⑶の答に 2 次の項を加えて

$$f(x)\fallingdotseq\sqrt[4]{a}+\frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}}(x-a)-\frac{3}{32\sqrt[4]{a^7}}(x-a)^2$$

⑷　33⑷の解答より $f''(x)=-x^{-2}$　なので　$f''(a)=-\dfrac{1}{a^2}$

よって 33⑷の答に 2 次の項を加えて

$$f(x)\fallingdotseq\log a+\frac{1}{a}(x-a)-\frac{1}{2!a^2}(x-a)^2$$

$$=\log a+\frac{1}{a}(x-a)-\frac{1}{2a^2}(x-a)^2\quad(a>0)$$

⑸　33⑸の解答より $f''(x)=e^x$　なので 33⑷の答に 2 次の項を加えて

$$f(x)\fallingdotseq e^a+e^a(x-a)+\frac{e^a}{2}(x-a)^2$$

⑹　33⑹の解答より $f''(x)=-\sin x$　なので 33⑹の答に 2 次の項を加えて

$$f(x)\fallingdotseq\sin a+(\cos a)(x-a)-\frac{1}{2}(\sin a)(x-a)^2$$

⑺　33⑺の解答より $f''(x)=-\cos x$　なので 33⑺の答に 2 次の項を加えて

$$f(x)\fallingdotseq\cos a-(\sin a)(x-a)-\frac{1}{2}(\cos a)(x-a)^2$$

37

(1) 36(1)の答に $x=4.1$, $a=4$ を代入して

$$\sqrt{4.1} \fallingdotseq \sqrt{4}+\frac{1}{4}\times 0.1-\frac{1}{64}\times(0.1)^2$$
$$\fallingdotseq 2.025-0.00016$$
$$=2.02484$$

(2) 36(2)の答に $x=7.1$, $a=7$ を代入して

$$\sqrt[3]{8.1} \fallingdotseq \sqrt[3]{8}+\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}\times 0.1-\frac{1}{9\sqrt[3]{8^5}}\times(0.1)^2$$
$$=2.008298$$

(3) 36(3)の答に $x=16.1$, $a=16$ を代入して

$$\sqrt[4]{16.1} \fallingdotseq \sqrt[4]{16}+\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}\times 0.1-\frac{1}{32\sqrt[4]{16^7}}\times(0.1)^2$$
$$\fallingdotseq 2.003118$$

(4) 36(4)の答に $x=1.1$, $a=1$ を代入して

$$\log(1.1) \fallingdotseq \log 1+1\times 0.1-\frac{1}{2}(0.1)^2$$
$$\fallingdotseq 0.095$$

(5) 36(5)の答に $x=0.9$, $a=1$ を代入して

$$e^{0.9} \fallingdotseq e^1+e^1(0.9-1)+\frac{1}{2}e^1(0.1)^2$$
$$\fallingdotseq 2.4600$$

(6) 36(6)の答に $x=\frac{\pi}{100}$, $a=0$ を代入して

$$\sin\frac{\pi}{100} \fallingdotseq \sin 0+\frac{\pi}{100}\cos 0-\frac{1}{2}\cdot 0$$
$$=\frac{\pi}{100}$$
$$\fallingdotseq 0.0314$$

(7) 36(7)の答に $x=\frac{12}{25}\pi$, $a=\frac{\pi}{2}$ を代入して

$$\cos\frac{12}{25}\pi \fallingdotseq \cos\frac{\pi}{2}-\left(\frac{12}{25}\pi-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot 0$$
$$=\frac{\pi}{50}$$
$$\fallingdotseq 0.0628$$

38

(1) $f(x)=e^x$

$f'(x)=e^x$，$f''(x)=e^x$，$f'''(x)=e^x$，$f^{(4)}(x)=e^x$，……より

$$e^x=e^1+(x-1)e^1+\frac{(x-1)^2}{2!}e^1+\cdots\cdots+\frac{(x-1)^n}{n!}e^1+\cdots$$

$$=e+(x-1)e+\frac{(x-1)^2e}{2!}+\cdots\cdots+\frac{(x-1)^n}{n!}e+\cdots$$

(2) $f(x)=x^{-1}$

$f'(x)=-x^{-2}$

$f''(x)=2x^{-3}$

$f'''(x)=-6x^{-4}$

$f^{(4)}(x)=24x^{-5}$，……

$$f(x)=\frac{1}{1}+\left(-\frac{1}{1^2}\right)(x-1)+\left(\frac{2}{1^3}\right)\frac{(x-1)^2}{2!}+\left(-\frac{6}{1^4}\right)\frac{(x-1)^3}{3!}$$

$$+\frac{24}{1^5}\frac{(x-1)^4}{4!}+\cdots+\frac{n!}{1^{n+1}}\times\frac{(x-1)^n}{n!}+\cdots$$

$$=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\cdots+(-1)^{n-1}(x-1)^n+\cdots$$

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$，$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}=\frac{(-1)^{3-1}1\cdot2\cdot5}{3\cdot3\cdot3}x^{-\frac{8}{3}}$

$f^{(4)}(x)=-\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}}=\frac{(-1)^{4-1}1\cdot2\cdot5\cdot8}{3^4}x^{-\frac{11}{3}}$，……

よって $\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2+\frac{5}{81}(x-1)^3-\frac{10}{243}(x-1)^4+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}1\cdot2\cdot\cdots\cdot(3n-4)^n}{3^n\cdot n!}(x-1)^n+\cdots$

(4) $f(x)=x^4$ より $f(1)=1$，$f'(x)=4x^3$ より $f'(1)=4$，$f''(x)=12x^2$ より $f''(1)=12$

$f'''(x)=24x$ より $f'''(1)=24$，$f^{(4)}(x)=24$ より $f^{(4)}(1)=24$，$n\geqq5$のとき $f^{(n)}(1)=0$

よって

$$f(x)=x^2=1+4(x-1)$$

$$+\frac{12}{2!}(x-1)^2$$

$$+\frac{24}{3!}(x-1)^3$$

$$+\frac{24}{4!}(x-1)^4$$

$$=1+4(x-1)$$

$$+6(x-1)^2$$

$$+4(x-1)^3$$

$$+(x-1)^4$$

39

(1) $f(x)=\log(1+x)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$

よって　$\log(1+x)=\log 1+\frac{1}{1}\times x+\frac{-1}{1^2}\times\frac{x^2}{2!}+\frac{2}{1^3}\times\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots$$

(2) $f(x)=\tan x$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\quad f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},\quad f'''(x)=\frac{2(2\sin^2 x+1)}{\cos^4 x}$$

$=2\cdot\dfrac{2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+1}{\cos^4 x}$（公式 $\boxed{10}$ ）$=2\cdot\dfrac{2-\cos 2x}{\cos^4 x}$ として $f^{(4)}(0),\ f^{(5)}(0)$

を求めてもよいが

$f''(x)=2\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=2f'(x)f(x)$ を利用すると次のように係数が求まる。

$f'''(x)=2\left(f''(x)f(x)+f'(x)f'(x)\right)$　より　$f'''(0)=2\left\{f''(0)f(0)+\left(f'(0)\right)^2\right\}=2(0\cdot 0+1^2)=2$

よって $\dfrac{2}{3!}$ が 3 次の係数。

$f^{(4)}(x)=2\left(f'''(x)f(x)+f''(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)\right)$　より　$f^{(4)}(0)=2(2\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 1\cdot 0)=0$

より $\dfrac{0}{4!}$ が 4 次の係数。

$$\begin{aligned}f^{(5)}(x)=2\Big\{&f^{(4)}(x)f(x)+f'''(x)f'(x)\\&+f'''(x)f'(x)+f''(x)f''(x)\\&+2\left(f''(x)f''(x)+f'(x)f'''(x)\right)\Big\}\end{aligned}$$

より　$f^{(5)}(0)=2\{0+2\cdot 1+2\cdot 1+0+2(0+1\cdot 2)\}=2(4+4)=16$

よって $\dfrac{16}{5!}=\dfrac{\cancel{16}^{\,2}}{5\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}\cdot 1}=\dfrac{2}{15}$ が 5 次の係数。

よって　$\tan x=\tan 0+\dfrac{1}{\cos^2 0}x+\dfrac{2\sin 0}{\cos^3 0}\times\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{2(2\sin^2 0+1)}{\cos^4 0}\times\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots$$

(3) $f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = 2xe^{x^2}$, $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$, $f'''(x) = 12xe^{x^2} + 8x^3e^{x^2}$,

$f^{(4)}(x) = 12e^{x^2} + 48x^2e^{x^2} + 16x^4e^{x^2}$

$$e^{x^2} = e^{0^2} + 2\times 0\times e^{0^2}\times x + \left(2e^{0^2} + 4\times 0^2\times e^{0^2}\right)\times\frac{x^2}{2!}$$

$$+\left(12\times 0\times e^{0^2} + 8\times 0^3\times e^{0^2}\right)\times\frac{x^3}{3!}$$

$$+\left(12\,e^{0^2} + 48\times 0^2\times e^{0^2} + 16\times 0^4\times e^{0^2}\right)\times\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots$$

(4) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}x$ より $f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ より $f'(0) = 1$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)}{(1-x^2)} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ より } f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{1\cdot(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - x\cdot\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2x)}{(1-x^2)^3} = \frac{1-x^2+3x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \text{ より } f'''(0) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{4x(1-x^2)^{\frac{5}{2}} - (1+2x^2)\frac{5}{2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot(-2x)}{(1-x^2)^5} = \frac{4x(1-x^2)+5x(1+2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$= \frac{x(4-4x^2+5+10x^2)}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{x(9+6x^2)}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{3x(3+2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} \text{ より } f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{(9+18x^2)\,(1-x^2)^{\frac{7}{2}} - (9x+6x^3)\frac{7}{2}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\cdot(-2x)}{(1-x^2)^7} \text{ より } f^{(5)}(0) = 9$$

以上より

$$\mathrm{Sin}^{-1}x = 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{9}{5!}x^5 + \cdots$$

$$= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{9}{5!}x^5 + \cdots$$

(5) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\, x$ より $f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ より } f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = -2 \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} \text{ より } f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -2 \cdot \frac{1(1+x^2)^2 - x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

$$= -2 \cdot \frac{1+x^2-4x^2}{(1+x^2)^3} = -2 \cdot \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} \text{ より } f'''(0) = -2$$

$$f^{(4)}(x) = -2 \cdot \frac{-6x(1+x^2)^3 - (1-3x^2) \cdot 3(1+x^2)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^6}$$

$$= -2 \cdot \frac{-6x(1+x^2) - (1-3x^2)6x}{(1+x^2)^4} = 12x \cdot \frac{1+x^2+1-3x^2}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{12x \cdot (2-2x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \text{ より } f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = 24 \cdot \frac{(1-3x^2)\,(1+x^2)^4 - (x-x^3) \cdot 4(1+x^2)^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^8} \text{ より } f^{(5)}(0) = 24$$

以上より

$$\mathrm{Tan}^{-1}\, x = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-2}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{24}{5!}x^5 + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$$

40

(1) $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots$ に $t = 2x$ を代入して

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \cdots + \frac{2^n}{n!}x^n + \cdots$$

(2) $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots$ に $t = -x^2$ を代入して

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

(3) $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} + \cdots$ に $t = 2x$ を代入して

$$\cos 2t = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

(4) $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1} + \cdots$ に $t = 3x$ を代入して

$$\sin 3x = 3x - \frac{3^3}{3!}x^3 + \frac{3^5}{5!}x^5 - \frac{3^7}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

41

⑴ $f(x) = x^2 + 4x - 5$

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = 0$ のとき $x = -2$

$f''(x) = 2$

よって，$x = -2$ のとき $f''(-2) = 2 > 0$, $f(-2) = -9$

$x = -2$ のとき極小値 -9 をとる

⑵ $f(x) = x^3 - 3x + 7$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

$f'(x) = 0$ のとき $x = \pm 1$

$x = 1$ のとき $f''(1) = 6 > 0$, $f(1) = 5$

$x = -1$ のとき $f''(-1) = -6 < 0$, $f(-1) = 9$

よって，$x = 1$ のとき極小値 5

$x = -1$ のとき極大値 9 をとる

⑶ $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 5$ より

$f'(x) = 6x^2 + 18x$

$= 6x(x+3)$

$= 6$ となるのは $x = 0$，-3 のとき。

$f''(x) = 12x + 18$ より $f''(0) = 18 > 0$ なので

$x = 0$ のとき極小値 $f(0) = -5$ をとる

$f''(-3) = -36 + 18 < 0$ なので

$x = -3$ のとき極大値 $f(-3) = -54 + 81 - 5 = 22$ をとる。

⑷ $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ より

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$= 4x(x^2 - 1) = 0$

となるのは $x = 0$，± 1 のとき。

$f''(x) = 12x - 18$ より $f''(0) = -4$ なので

$x = 0$ のとき極大値 $f(0) = 5$ をとる

$f''(\pm 1) = 12 - 4 > 0$ なので

$x = \pm 1$ のとき極小値 $f(\pm 1) = 1 - 2 + 5 = 4$ をとる。

⑸ $f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = 2xe^{x^2}$

$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$

$f'(x) = 0$ のとき $x = 0$

$x = 0$ のとき， $f''(0) = 2 > 0$, $f(0) = 1$ なので

$x = 0$ のとき極小値 1 をとる

⑹ $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\log x}{x^2} = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$

$f''(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{x} \times x^2 - (1 - \log x) \times 2x}{x^4} = \dfrac{2\log x - 3}{x^3}$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = e$

$x = e$ のとき， $f''(e) = \dfrac{-1}{e^3} < 0$, $f(e) = \dfrac{1}{e}$ なので

$x = e$ のとき極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる

⑺ $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x^3 + 1)^2} \times 3x^2 = -3 \cdot \dfrac{x^2}{(x^3 + 1)^2}$ より

$f''(x) = -3 \cdot \dfrac{2x(x^3 + 1)^2 - x^2 \cdot 2(x^3 + 1) \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^4}$

$= -3 \cdot \dfrac{2x(x^3 + 1) - 6x^4}{(x^3 + 1)^3}$

$= -3 \cdot \dfrac{2x\left\{x^3 + 1 - 3x^3\right\}}{(x^3 + 1)^3}$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = 0$

$f''(x) = \dfrac{6x(2x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^3}$

$x = 0$ のとき， $f''(0) = 0$， $f'''(0) \fallingdotseq 0$ より極値をとらない

(8) $f(x) = x + 2\cos x$

$f'(x) = 1 - 2\sin x$

$f''(x) = -2\cos x$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$ $(0 \leqq x < 2\pi)$

$x = \frac{\pi}{6}$ のとき $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} < 0,\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$,

$x = \frac{5}{6}\pi$ のとき $f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} > 0,\ f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$

よって，$x = \frac{\pi}{6}$ のとき極大値 $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$

$x = \frac{5}{6}\pi$ のとき極小値 $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$ をとる

42

(1) $f(x) = e^{-2x}$

$f'(x) = -2e^{-2x}$

$f''(x) = 4e^{-2x}$

$f''(1) = 4e^{-2} > 0$

よって $f(x)$ は $x = 1$ において下に凸

(2) $f(x) = x\sqrt{x+3}$

$f'(x) = \sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}} = (x+3)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x(x+3)^{-\frac{1}{2}}$ より

$$f''(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left\{(x+3)^{-\frac{1}{2}} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(x+3)^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}\left\{1 - \frac{1}{2}x(x+3)^{-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{2(x+3) - x}{2(x+3)}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{x+6}{4(x+3)\sqrt{x+3}}$$

$$f''(1) = \frac{15}{32} > 0$$

よって $f(x)$ は $x = 1$ において下に凸

⑶ $f(x)=xe^{-x}$ より $f'(x)=e^{-x}+x(-e^{-x})=e^{-x}(a-x)=0$ となるのは $x=1$ のとき。

$f''(x)=-e^{-x}(1-x)+e^{-x}(-1)=e^{-x}(x-2)$ より

$f''(1)=-e^{-1}<0$ だから $f(x)$ は $x=1$ で上に凸

⑷ $f(x)=(\log x)^2$ より $f'(x)=2\log x\times(\log x)'=2\cdot\dfrac{\log x}{x}=0$ となるのは $x=1$ のとき。

$$f''(x)=2\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}=2\cdot\frac{1-\log x}{x^2}\qquad f''(1)=2\cdot\frac{1}{1}>0$$

よって $f(x)$ は $x=1$ で下に凸

43

⑴ $f(x)=2x^3+9x^2-5$

$f'(x)=6x^2+18x$

$f''(x)=12x+18=6x(2x+3)=0$ となるのは $x=-\dfrac{3}{2}$ のとき

$f''(x)<0$ すなわち $x<-\dfrac{3}{2}$ のとき $f(x)$ は上に凸

$f''(x)>0$ すなわち $x>-\dfrac{3}{2}$ のとき $f(x)$ は下に凸

⑵ $f(x)=x^4-2x^2+5$

$f'(x)=4x^3-4x$

$f''(x)=12x^2-4=4(3x^2-1)=0$ となるのは $x^2=\dfrac{1}{3}$, $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき。

$f''(x)<0$ すなわち $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(x)$は上に凸

$f''(x)>0$ すなわち $x<-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<x$ のとき $f(x)$は下に凸

(3) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}\quad(x>0)$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{-x-2x+2x\log x}{x^4}$$

$=\dfrac{x(-3+2\log x)}{x^4}=0$ となるのは $\log x=\dfrac{3}{2}$ のとき

つまり $x=e^{\frac{3}{2}}$ のとき

$0<x<e^{\frac{3}{2}}$ のとき $f''(x)<0$ で $f(x)$ は上に凸

$e^{\frac{3}{2}}<x$ のとき $f''(x)>0$ で $f(x)$ は下に凸

(4) $f(x)=x-2\sqrt{x}\quad(x\geqq 0)$

$$f'(x)=1-2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$>0\quad(x>0)$$

よって $f(x)$ は $0<x$ で下に凸

44

(1) $f(x)=\dfrac{6x}{1+x^2}$ より $f'(x)=6\cdot\dfrac{1(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=6\cdot\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ となるのは

$x=\pm 1$ のとき。

$$f''(x)=6\cdot\frac{(-2x)(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=6\cdot(-2x)\cdot\frac{(1+x^2)+(1-x^2)\cdot 2}{(1+x^2)^4}$$

$$=-12x\cdot\frac{3-x^2}{(1+x^2)^4}$$

より $f''(1)=-12\cdot\dfrac{2}{2^4}<0$ なので $x=1$ で極大値 $f(1)=\dfrac{6}{2}=3$ をとる。

$f''(-1)=12\cdot\dfrac{2}{2^4}>0$ なので $x=-1$ で極小値 $f(-1)=\dfrac{-6}{2}=-3$ をとる。

⑵ $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ より $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0$ となるのは

$x=0$，$\pm\sqrt{3}$ のとき。

$f''(x)$ の符号を調べるだけなら次の形の方が簡単である。

$f(x)=\dfrac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}=x+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$ として

$f'(x)=1+\dfrac{1}{2}\left\{-(x-1)^{-2}-(x+1)^{-2}\right\}$

$f''(x)=(x-1)^{-3}+(x+1)^{-3}$

$f'''(x)=-3(x-1)^{-4}-3(x+1)^4$ を用いるとよい。

$f''(0)=-1+1=0$，$f'''(0)=-6\neq 0$ より $x=0$ で極値をとらない。

$f''\left(\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)^{-3}+\left(\sqrt{3}+1\right)^{-3}>0$ より $x=\sqrt{3}$ で極小値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

$f''\left(-\sqrt{3}\right)=\left(-\sqrt{3}-1\right)^{-3}+\left(\sqrt{3}+1\right)^{-3}<0$ より $x=-\sqrt{3}$ で極大値 $\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

⑶ $f(x)=\dfrac{-3x+4}{x^2+1}$ より

$f'(x)=\dfrac{-3(x^2+1)-(-3x+4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-3x^2-3+6x^2-8x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{3x^2-8x-3}{(x^2+1)^2}=\dfrac{(3x+1)(x-3)}{(x^2+1)^2}=0$ となるのは $x=-\dfrac{1}{3}$，3 のとき。

$f''(x)=\dfrac{(6x-8)(x^2+1)^2-(3x^2-8x-3)2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\dfrac{2(3x-4)(x^2+1)-(3x^2-8x-3)\cdot 4x}{(x^2+1)^3}$

より $f'''\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2\cdot(-5)\left(\dfrac{1}{9}+1\right)-0}{\left(\dfrac{1}{9}+1\right)^3}<0$ なので $x=-\dfrac{1}{3}$ で極大値 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1+4}{\dfrac{1}{9}+1}=\dfrac{9}{2}$ をとる。

$f''(3)=\dfrac{10\cdot 10^2-0}{10^3}>0$ なので $x=3$ で極小値 $f(3)=\dfrac{-5}{10}=\dfrac{-1}{2}$ をとる。

⑷ $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ より

$f'(x)=2x-x^{-2}=\dfrac{2x^3-1}{x^2}=0$ となるのは $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき。

$f''(x)=2+2x^{-3}$ より $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=2+\dfrac{2}{2}>0$ なので

$x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ で極小値 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$ をとる。

45

⑴　44 ⑴より　$f''(x) = -12x \cdot \dfrac{3-x^2}{(1+x^2)^4}$ なので

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = -18 \cdot \frac{3-\dfrac{9}{4}}{\left(1+\dfrac{9}{4}\right)^4} < 0$$ より $x = \dfrac{3}{2}$ で上に凸

$$f''(2) = -24 \cdot \frac{3-4}{(1+4)^4} > 0$$ より $x = 2$ で下に凸

⑵　44 ⑵より　$f''(x) = (x-1)^{-3} + (x+1)^{-3}$ なので

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -\frac{8}{27} + 8 > 0$$ より $x = -\dfrac{1}{2}$ で下に凸

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = -8 + \frac{8}{27} < 0$$ より $x = \dfrac{1}{2}$ で上に凸

⑶　44 ⑶より　$f''(x) = \dfrac{2(3x-4)(x^2+1) - (3x^2-8x-3) \cdot 4x}{(x^2+1)^3}$ なので

$f''(0) = -8 < 0$ より $x = 0$ で上に凸

$f''(1) = \dfrac{-4+8 \cdot 4}{8} > 0$ より $x = 1$ で上に凸

⑷　44 ⑷より　$f''(x) = 2 + \dfrac{2}{x^2}$ なので

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + 2 \times (8) < 0$$ より $x = -\dfrac{1}{2}$ で上に凸

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 2 \times 8 > 0$$ より $x = \dfrac{1}{2}$ で下に凸

46

⑴　$f(x) = \sin x$ より

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$f'''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right) = \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right) + \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\cdots\cdots, \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$$

(2) $f(x)=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left\{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$f''(x)=\cos\left\{x+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right\}=\sin\left\{\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)+\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\cdots\cdots,\quad f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot(n+1)\right)$$

(3) $f(x)=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ より $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x\cdot(2x)'=\sin 2x$

$f''(x)=\cos 2x\cdot(2x)'=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ より

公式 $\boxed{9}$ より

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x\cos\frac{\pi}{2}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{2}=\cos 2x$$

$$f'''(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)'=2^2\sin\left\{\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$f^{(4)}(x)=2^2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)\times\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)'=2^3\sin\left\{\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)+\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\cdots\cdots,\quad f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot(n-1)\right)$$

47

(1) $f(x)=\dfrac{x}{2x^2-3x+1}=\dfrac{x}{(1-2x)(1-x)}=\dfrac{1}{1-2x}-\dfrac{1}{1-x}$ 　公式 $\boxed{1}$

マクローリン展開 $\dfrac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots$ より

$$\frac{1}{1-2x}=1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\cdots+2^nx^n+\cdots$$

$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$ なので

$$\frac{x}{2x^2-3x+1}=x+3x^2+7x^3+\cdots+(2^n-1)x^n+\cdots$$

⑵　$f(x)=e^x\sin x$　より

$$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)=e^x\cdot\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\sqrt{2}e^x\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$　公式 $\boxed{10}$ ⑴ ⑤

$$f''(x)=\sqrt{2}\left(e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^x\cdot\sqrt{2}\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$=\sqrt{2}^2e^x\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right\}=\sqrt{2}^2e^x\sin\left\{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right\}$$

同様にして

$$f'''(x)=\sqrt{2}^3e^x\sin\left\{\left(x+\frac{\pi}{4}\cdot 2\right)+\frac{\pi}{4}\right\},\quad\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=\sqrt{2}^ne^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\cdot n\right)$$

以上により

$$f(0)=0,\quad f'(0)=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=1,\quad f''(0)=\sqrt{2}^2\cdot 1=2,\quad f'''(0)=\sqrt{2}^3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2$$

$$f^{(4)}(0)=\sqrt{2}^4\cdot 0=0,\quad f^{(5)}(0)=\sqrt{2}^5\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}=-4,\quad f^{(6)}(0)=\sqrt{2}^6\cdot(-1)=-8$$

$$f^{(7)}(0)=\sqrt{2}^7\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}=-8,\quad f^{(8)}(0)=\sqrt{2}^8\cdot 0=0,\quad\cdots\cdots,\quad f^{(n)}(0)=\sqrt{2}^n\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)$$

となるから

$$e^x\sin x=0+1x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{-4}{5!}x^5+\frac{-8}{6!}x^6+\frac{-8}{7!}x^7+\frac{0}{8!}x^8+\cdots$$

$$=x+x^2+\frac{2}{3!}x^3-\frac{4}{5!}x^5-\frac{-8}{6!}x^6-\frac{8}{7!}x^7+\cdots+\frac{\sqrt{2}^n\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)}{n!}x^n+\cdots$$

48

⑴　マクローリン展開より

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)x^2}{\log(1+x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\right)x^2}{x^4-\frac{1}{2}x^8+\frac{1}{3}x^{12}-\cdots}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}x^2-\frac{1}{6!}x^4+\cdots}{1-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^8-\cdots}=-\frac{1}{2}$$

⑵　マクローリン展開より

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}-\cdots\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2}-\cdots\right)=\frac{1}{2}$$

１章の問題

1

⑴ $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\log(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{2x(1+x)}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{2+4x}=\dfrac{1}{2}$

⑵ $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

⑶ $\lim_{x\to 0}\dfrac{5}{3x}\times\log(1+2x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{5\log(1+2x)}{3x}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{5\times\dfrac{1}{1+2x}\times 2}{3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{10}{3(1+2x)}=\dfrac{10}{3}$

⑷ $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ とすると $\log y=\dfrac{1}{x}\log(1+x)$ より

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{1}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x}$

$=0$

$\log y\to 0$ より $y\to 1$ $\therefore\ \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$ （$\infty-\infty$の不定形）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2}{x^2\sin^2 x} \quad \left(\frac{0}{0}\text{の不定形}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x(\sin x)'}{2x\sin^2 x+x^2\cdot 2\sin x(\sin x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{2x\sin^2 x+x^2\cdot\sin 2x} \quad \left(\frac{0}{0}\text{の不定形}\right) \quad \text{公式 } \boxed{10}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-\cos 2x\cdot(2x)'}{2\sin^2 x+2x\cdot 2\sin x(\sin x)'+2x\sin 2x+x^2\cos 2x(2x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{1-\cos 2x+2x\sin 2x+2x\sin 2x+2x^2\cos 2x} \quad \text{公式 } \boxed{10}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{1+(-1+2x^2)\cos 2x+4x\sin 2x} \quad \left(\frac{0}{0}\text{の不定形}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2(-\sin 2x)\cdot 2}{4x\cos 2x+(-1+2x^2)\,(-\sin 2x)\cdot 2+4\sin 2x+4x\cdot 2\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 4}{2\cos 2x+(1-2x^2)\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2+4\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}+4\cos 2x}$$

$$=\frac{4}{2+2+4+4} \quad \left(\text{公式 } \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1\right)$$

$$=\frac{1}{3}$$

2

$x=e^t+e^{-t},\quad y=e^t-e^{-t}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}$$

$t=1$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e+e^{-1}}{e-e^{-1}}=\dfrac{e^2+1}{e^2-1}$

3

$x=2t^2+1,\quad y=3t-1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4t}$$

$t=1$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{4}$

4

$x=e^\theta\cos\theta,\quad y=e^\theta\sin\theta$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^\theta\sin\theta+e^\theta\cos\theta}{e^\theta\cos\theta-e^\theta\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta} \quad \left(=\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}\right)$$

5

⑴ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x^2 - 4x + 3)$

$= 3(x-3)(x-1)$

グラフが増加するとき　$f'(x) > 0$ より　$x < 1,\ 3 < x$

⑵ $f''(x) = 6x - 12$

グラフが上に凸なとき　$f''(x) < 0$ より　$x < 2$

6

⑴ $f(x) = x^4 - x^3$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$

$f''(x) = 12x^2 - 6x$,　$f'''(x) = 24x - 6$

$f'(x) = 0$ のとき $x = 0,\ \dfrac{3}{4}$

$x = 0$ のとき　$f''(0) = 0$,　$f'''(0) = -6 \neq 0$ よって $x = 0$ で極値をとらない

$x = \dfrac{3}{4}$ のとき　$f''\left(\dfrac{3}{4}\right) = 12 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - 6 \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{4} > 0$

$f(x)$ が極小をとるのは　$x = \dfrac{3}{4}$ のとき

⑵ $f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1)$

$f(x)$ が上に凸のとき　$f''(x) < 0$　　$\therefore\ 0 < x < \dfrac{1}{2}$

7

⑴ $y = x + \dfrac{4}{x} = f(x)$,

$y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} = f'(x)$,

$y'' = \dfrac{8}{x^3} = f''(x)$

$y' = 0$ のとき $x = \pm 2$

$x = 2$ のとき　$y'' = 1 > 0$　　　よって極小値 $y = f(2) = 4$ をとる。

$x = -2$ のとき $y'' = -1 < 0$　　よって極大値 $y = f(-2) = -4$ をとる。

⑵ $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}=f(x)$

$$y'=\frac{1(x^2+x+1)-(x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$
$$=\frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$$
$$=f'(x)$$

$$y''=-\frac{(2x+2)(x^2+x+1)^2-(x^2+2x)2(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}$$
$$=-\frac{(2x+2)(x^2+x+1)-(x^2+2x)\cdot 2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3}$$
$$=-2\cdot\frac{(x+1)(x^2+x+1)-(x^2+2x)(2x+1)}{(x^2+x+1)^3}$$
$$=\frac{2(x^3+3x^2-1)}{(x^2+x+1)^3}$$

$y'=0$のとき $x=0,\ -2$

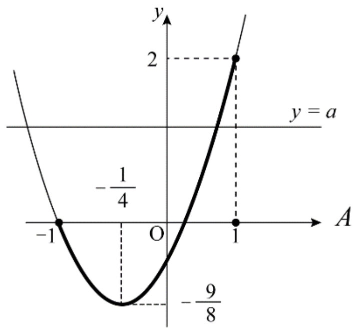
$x=0$のとき $y''=-2<0$ よって極大値 $y=f(0)=1$ をとる。

$x=-2$のとき $y''=\dfrac{2}{9}>0$ よって極小値 $y=f(-2)=-\dfrac{1}{3}$ をとる。

8

$f(x) = ax + \cos x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$

$f'(x) = a - \sin x + \cos 2x$



（i） $f(x)$ が極値をもつとき　$f'(x) = 0$ より　$a - \sin x + \cos 2x = 0$

よって　$a = \sin x - \cos 2x$

従って　$y = a$ と $y = \sin x - \cos 2x$　の交点があるような a の範囲を考える。

右辺 $= \sin x - (1 - 2\sin^2 x)$　（公式$\boxed{10}$）

$= 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 2\left(A^2 + \dfrac{1}{2}A\right) - 1$

$= 2\left\{\left(A + \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{16}\right\} - 1 = 2\left(A + \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{9}{8}$　（頂点$\left(-\dfrac{1}{4}\quad -\dfrac{9}{8}\right)$の放物線）なので

$y = 2\left(A + \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{9}{8}$　と　$y = a$　の交点がある a の範囲を考えればよい。

ただし $-1 \leqq \sin x \leqq 1$　であるから　$-1 \leqq A \leqq 1$　において考える。

グラフよりその範囲は　$-\dfrac{9}{8} \leqq a \leqq 2$　である。

（ii）一方　$f'(x) = a - \sin x + \cos 2x = 0$　であっても　$f(x)$ が極値をとらない場合がある。

それは x の十分近くで　$f'(x)$　の符号が変わらない場合であり，上のグラフより，

それは　$A = -\dfrac{1}{4}$，1　の場合である。$\left(A = 1 \text{のとき } x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$

このとき実際

$f''(x) = -\cos x + (-\sin 2x)(2x)'$

$= -\cos x - 2(2\sin x \cos x)$（公式$\boxed{10}$）

$= -\cos x(1 + 4\sin x)$

$= 0$　であり

$f'''(x) = \sin x(1 + 4\sin x) - \cos x \cdot 4\cos x$

$= \sin x(1 + 4\sin x) - 4(1 - \sin^2 x)$

の値は　$A = -\dfrac{1}{4}$　のとき $f'''(x) = -4 \cdot \dfrac{15}{16} \neq 0$

$A = 1$　のとき $f'''(x) = 1 \times 5 \neq 0$

であるから，

$A = -\dfrac{1}{4}$，1　の場合の x において　$f(x)$ は極値をとらない。

つまり　$a = -\dfrac{9}{8}$，2　のとき極値をとらない。

（i），（ii）より極値を持たない a の範囲は　$a \leqq -\dfrac{9}{8}$，$2 \leqq a$

9

$f(x)=\sqrt[3]{x}$　とすると　$x=a$　における一次近似式を計算して

$$f(x)\fallingdotseq\sqrt[3]{a}+\frac{1}{3\times\sqrt[3]{a^2}}(x-a)$$　$x=1057$，　$a=1000$とすると

$$\sqrt[3]{1057}\fallingdotseq\sqrt[3]{1000}+\frac{1}{3\times\sqrt[3]{1000^2}}(1057-1000)$$

$$=10+\frac{1}{300}\times 57$$

$$=10.19$$

$(1057^{\frac{1}{3}}=10.1865001\cdots\cdots)$

10

$f(x)=\cos x$　とすると　$x=a$　における一次近似式を計算して

$$f(x)\fallingdotseq\cos a-\sin a\times(x-a)$$　$x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}$，　$a=\frac{\pi}{6}$　とすると

$$\cos 29^\circ=\cos(30^\circ-1^\circ)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\times\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\fallingdotseq 0.866+0.500\times 0.0175$$

$$=0.87475$$

$$\left(\begin{array}{l} a=30^\circ=\frac{\pi}{6} \\ x=29^\circ\ \text{とすると} \\ x-a=29^\circ-30^\circ=-1^\circ \\ 1^\circ=\frac{\pi}{180}\fallingdotseq 0.0175 \end{array}\right)$$

$(\cos 29^\circ=0.874619707\cdots\cdots)$

$\therefore$　$\cos 29^\circ\fallingdotseq 0.87$

11

(1)　$f(x)=\log\{ax+b(1-x)\}-x\log a-(1-x)\log b$

$$f'(x)=\frac{a-b}{ax+b(1-x)}-\log a+\log b$$

$$f''(x)=\frac{-(a-b)^2}{\{(a-b)x+b\}^2}=-\left\{\frac{a-b}{(a-b)x+b}\right\}^2$$

題意より　$a>b>0$　すなわち　$a-b\neq 0$

よって　$f''(x)<0$　が常に成り立つ

⑵　$f(x)$ は $0<x<1$ で微分可能なので

平均値の定理より　$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$ を満たす c（$0<c<1$）が存在する

$$f'(c)=\frac{(\log a-1\times\log a)-(\log b-\log b)}{1-0}=\frac{0-0}{1}=0$$

これより　$f'(c)=0$　となる　c　が $0<c<1$ で存在することがわかる

また，⑴より $f(x)$ は上に凸のグラフなので　（P.13 $\boxed{4}$ ⑵）

$f'(c)=0$（$0<c<1$）となる c はただ 1 つだけ存在する

⑶　⑴より　$f''(x)<0$　であるから　$f'(x)$　は減少関数であり，⑵より　$f'(c)=0$　であるから

$f'(x)$　は　$0<x<c$　で　$0<f'(x)$　，したがって増加，　$c<x<1$　で　$0>f'(x)$　，従って減少。

また，⑵の中の計算より　$f(0)=0$　$f(1)=0$　である。

よって　$0\leqq x\leqq 1$　で　$0\leqq f(x)=\log(ax+b(1-x))-x\log a-(1-x)\log b$

従って　$\log a^xb^{1-x}\leqq\log(ax+b(1-x))$

底 e は 1 より大きいので，$a^xb^{1-x}\leqq ax+b(1-x)$　が成り立つ。

11　⑶の別解

⑴，⑵より $f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	最大	↘	0

$0\leqq x\leqq 1$　で　$f(x)\geqq 0$　より

$$\log\{ax+b(1-x)\}-x\log a-(1-x)\log b\geqq 0$$

$$\log\{ax+b(1-x)\}\geqq x\log a+(1-x)\log b$$

$$\log\{ax+b(1-x)\}\geqq\log a^x\times b^{1-x}$$

$e>1$　より　$ax+b(1-x)\geqq a^xb^{1-x}$

よって不等式が成り立つ

12

(1) $r = \dfrac{3}{2 + \sin\theta}$

$r(2 + \sin\theta) = 3$

$2r + r\sin\theta = 3$

$2r = 3 - r\sin\theta$

両辺を 2 乗すると

$(2r)^2 = (3 - r\sin\theta)^2$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

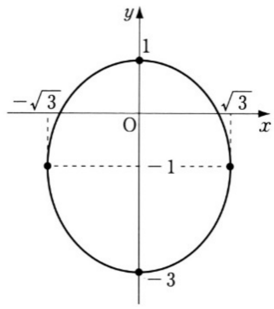
$4(x^2 + y^2) = (3 - y)^2$

$4x^2 + 4y^2 = 9 - 6y + y^2$

$4x^2 + 3y^2 + 6y = 9$

$4x^2 + 3(y + 1)^2 = 12$

$\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{(y + 1)^2}{4} = 1$　㋐



中心 O，長軸 4　短軸 $2\sqrt{3}$ のたて長の楕円

$\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

を y 方向に－1 平行移動したものなので右図となる。

(2) (1)の㋐式の両辺を×12 すると

$4x^2 + 3(y+1)^2 = 12$ である。$y = 0$ を代入すると

$4x^2 + 3 = 12$

$x^2 = \dfrac{9}{4}$

$x > 0$ より点 P は $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$　…①

また，$4x^2 + 3(y + 1)^2 = 12$ の両辺を x で微分すると

$8x + 6(y + 1) \times \dfrac{dy}{dx} = 0$

$y \neq -1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{3(y + 1)}$　　よって①より

点 P における接線の傾きは　$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4 \times \dfrac{3}{2}}{3(0 + 1)} = -\dfrac{6}{3} = -2$

求める接線は傾き -2，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るので

$y - 0 = -2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$　　$\therefore\ y = -2x + 3$

13

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}\cos t \\ y(t) = e^{at}\sin t \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = ae^{at}\cos t + e^{at}(-\sin t)$$

$$= e^{at}(a\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = ae^{at}\sin t + e^{at}\cos t$$

$$= e^{at}(a\sin t + \cos t)$$

よって

$$\overrightarrow{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= (e^{at}(a\cos t - \sin t),\ e^{at}(a\sin t + \cos t))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \text{傾き}\ \frac{a\sin t + \cos t}{a\cos t - \sin t}$$

14

(1) $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$

$$\frac{dx}{dt} = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{v} = (e^t(\cos t - \sin t),\quad e^t(\sin t + \cos t))$$

$$= e^t(\cos t - \sin t,\quad \sin t + \cos t) \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t\sin t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^t(\cos t + \sin t) + e^t(-\sin t + \cos t) = 2e^t\cos t$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{a} = (-2e^t\sin t,\ 2e^t\cos t) = -2e^t(\sin t \quad -\cos t) \quad \cdots\cdots ②$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}\ \left(= \frac{(\cos t + \sin t)^2}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \frac{1 + \sin 2t}{\cos 2t}\ (\text{公式}\boxed{10})\right)$$

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(e^t\cos t,\ e^t\sin t)=e^t(\cos t,\ \sin t)$ ……③

$\vec{v}=e^t(\cos t-\sin t,\ \sin t+\cos t)$

以上より $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\left|e^t\right|\times\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=e^t$

$\left|\vec{v}\right|=\left|e^t\right|\times\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2}$

$=e^t\times\sqrt{2(\cos^2 t+\sin^2 t)}$

$=\sqrt{2}e^t$， ①③より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=e^{2t}(\cos^2 t-\cos t\sin t+\sin^2 t+\sin t\cos t)$

よって

$$\cos\theta_1=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{より}\quad \theta_1=\frac{\pi}{4}$$

同様に②③より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}=-2e^{2t}(\sin t\cos t-\cos t\sin t)=0$

$$\cos\theta_2=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}=0\quad \text{より}\quad \theta_2=\frac{\pi}{2}$$