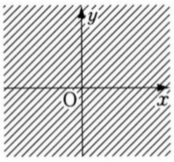
３章　偏微分

１節　2 変数関数と偏微分

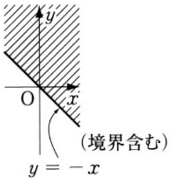
A

75

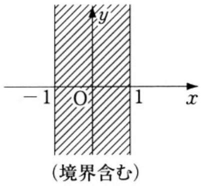
⑴　任意の x，y を代入できるので定義域は xy 平面の点全体。



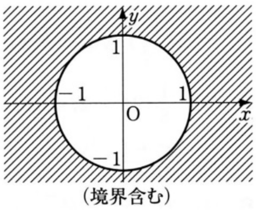
⑵　$y=-x$ より上の領域。



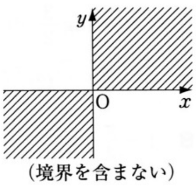
⑶　$0 \leqq 1-x^2$ となる点全体なので $x^2-1 \leqq 0$ より，
$-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす点全体。



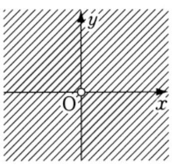
⑷　$0 \leqq x^2+y^2-1$ となる点全体なので
$x^2+y^2 \geqq 1$ より，原点中心，半径 1 の円の外部および周。



⑸　$0<xy$ となる点全体なので
$0<x$　かつ　$0<y$　　または　$0>x$　かつ　$0>y$　となる領域。

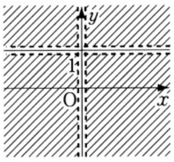


⑹　$0<x^2+y^2$ となる点全体なので　$(0,\ 0)$ 以外の点すべて。



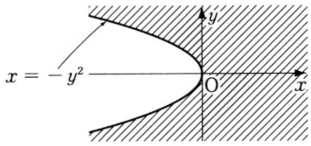
(7)　$x(y-1) \neq 0$ となる点全体なので

$x = 0$ または $y = 1$ となる点を除くすべての点全体。



(8)　$0 < x + y^2$ となる点全体なので

$x > -y^2$ より　$x = -y^2$ より右の領域。



(境界を含まない)

76

(1)　$f(x,\ y)$ は，$y = 0$ にそって近づけると $\dfrac{0}{x+0} = 0$，$y = x$ にそって近づけると

$\dfrac{x}{x+x} = \dfrac{1}{2}$ に近づくので極限値なし。

(2)　$x = 0$ にそって近づけると $\dfrac{0}{0+y^2} = 0$，$y = x$ にそって近づけると

$\dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$，に近づくので極限値なし。

(3)　$x = 0$ にそって近づけると $\dfrac{0}{0+y^2} = 0$，$y = x$ にそって近づけると

$\dfrac{2x^2}{x^2+x^2} = 1$，に近づくので極限値なし。

(4)　$\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta \cdot r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta = 0$　$(-1 \leqq \cos^2\theta\sin\theta \leqq 1$ より$)$

(5)　$\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} x\cos\frac{x}{y} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\cos\left(\frac{r\cos\theta}{r\sin\theta}\right) = 0$　$\left(-1 \leqq \cos\theta\cos\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \leqq 1 \text{ より}\right)$

(6)　$\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} y\sin\frac{y}{x} = \lim_{r\to 0} r\sin\theta\sin\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) = 0$　$\left(-1 \leqq \sin\theta\sin\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \leqq 1 \text{ より}\right)$

(7)　$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{|r|} = \lim_{r\to 0} |r|\cos 2\theta = 0$$

$(-1 \leqq \cos 2\theta \leqq 1$ より$)$

(8)
$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\ r\sin\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{|r|} = \lim_{r\to 0} |r| \cdot \frac{1}{2}\sin\theta = 0 \qquad (\ -1 \leqq \sin 2\theta \leqq 1 \quad \text{よ}$$

77

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\ r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin^2\theta = 0 \qquad (-1 \leqq \cos\theta\sin^2\theta \leqq 1 \text{ より})$$

一方，与式より $f(0,\ 0)=0$　よって $f(x,\ y)$ は $(0,\ 0)$ で連続である。

78

(1) $f_x = 3x^2 - 3y$ より $f_x(1,\ 0) = 3$

$f_y = -3x + 3y^2$ より $f_y(1,\ 0) = -3$

(2) $f_x = 1 + 4xy$ より $f_x(1,\ 0) = 1$

$f_y = 2x^2$ より $f_y(1,\ 0) = 2$

(3) $f_x = e^y$ より $f_x(1,\ 0) = 1$

$f_y = xe^y$ より $f_y(1,\ 0) = 1$

(4) $f_x = e^{xy} + (x+y)ye^{xy}$ より $f_x(1,\ 0) = 1 + 0 = 1$

$f_y = e^{xy} + (x+y)xe^{xy}$ より $f_y(1,\ 0) = 1 + 1 = 2$

(5) $f_x = 2y(-x^{-2})$ より $f_x(1,\ 0) = 0$

$f_y = \dfrac{2}{x}$ より $f_y(1,\ 0) = 2$

(6) $f_x = \dfrac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$ より $f_x(1,\ 0) = 0$

$f_y = \dfrac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{-2x}{(x+y)^2}$ より $f_y(1,\ 0) = -2$

(7) $f_x = \dfrac{2x}{x^2+y^3}$ より $f_x(1,\ 0) = 2$

$f_y = \dfrac{3y^2}{x^2+y^3}$ より $f_y(1,\ 0) = 0$

(8) $f_x = 2\pi\cos\left(2\pi x + \dfrac{\pi}{2}y\right)$ より

$f_x(1,\ 0) = 2\pi\cos 2\pi = 2\pi$

$f_y = \dfrac{\pi}{2}\cos\left(2\pi x + \dfrac{\pi}{2}y\right)$ より

$f_y(1,\ 0) = \dfrac{\pi}{2}\cos 2\pi = \dfrac{\pi}{2}$

79

(1) $f_x = y^2$ より $f_{xx} = 0,\quad f_{xy} = 2y$

$f_y = 2xy$ より $f_{yx} = 2y,\quad f_{yy} = 2x$

(2) $f_x = \dfrac{1}{xy^2} \times y^2 = x^{-1}$ より $f_{xx} = -\dfrac{1}{x^2},\quad f_{xy} = 0$

$f_y = \dfrac{1}{xy^2} \times 2xy = \dfrac{2}{y}$ より $f_{yx} = 0,\quad f_{yy} = 2 \cdot (-y^{-2}) = -\dfrac{2}{y^2}$

(3) $f_x = \dfrac{-y \cdot 1}{(x+y)^2} = -y(x+y)^{-2}$ より $f_{xx} = -y \cdot (-2)(x+y)^{-3} = \dfrac{2y}{(x+y)^3}$

$f_{xy} = -(x+y)^{-2} - y \cdot (-2)(x+y)^{-3} = \dfrac{-(x+y)+2y}{(x+y)^3} = \dfrac{-x+y}{(x+y)^3}$

$f_y = \dfrac{(x+y)-y}{(x+y)^2} = x(x+y)^{-2}$ より $f_{yx} = (x+y)^{-2} + x \cdot (-2)(x+y)^{-3} = \dfrac{x+y-2x}{(x+y)^3} = \dfrac{-x+y}{(x+y)^3}$

$f_{yy} = x \cdot (-2)(x+y)^{-3} = \dfrac{-2x}{(x+y)^3}$

(4) $f_x = 3(3x+2y)^2 \cdot 3 = 9(3x+2y)^2$ より

$f_{xx} = 9 \cdot 2(3x+2y) \cdot 3 = 54(3x+2y)$

$f_{xy} = 9 \cdot 2(3x+2y) \cdot 2 = 36(3x+2y)$

$f_y = 3(3x+2y)^2 \cdot 2 = 6(3x+2y)^2$ より

$f_{yx} = 6 \cdot 2(3x+2y) \cdot 3 = 36(3x+2y)$

$f_{yy} = 12(3x+2y) \cdot 2 = 24(3x+2y)$

(5) $f_x = yx^{y-1}$ より

$f_{xx} = y \cdot (y-1)x^{y-2}$

$f_{xy} = x^{y-1} + y(\log x) \cdot x^{y-1}$

$f_y = (\log x) \cdot x^y$ より

$f_{yx} = \dfrac{1}{x} \cdot x^y + (\log x) \cdot yx^{y-1} = x^{y-1} + y(\log x) \cdot x^{y-1}$

$f_{yy} = (\log x)^2 \cdot x^y$

(6) $f_x = \dfrac{1}{(xy)^2+1} \cdot y$ より

$$f_{xx} = \frac{-y \cdot (2xy \cdot y)}{\{(xy)^2+1\}^2} = \frac{-2xy^3}{\{(xy)^2+1\}^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\{(xy)^2+1\} - y(2xy \cdot x)}{\{(xy)^2+1\}^2} = \frac{(xy)^2+1-2x^2y^2}{\{(xy)^2+1\}^2} = \frac{-(xy)^2+1}{\{(xy)^2+1\}^2}$$

$f_y = \dfrac{1}{(xy)^2+1} \cdot x$ より

$$f_{yx} = \frac{\{(xy)^2+1\} - x \cdot 2xy \cdot y}{\{(xy)^2+1\}^2} = \frac{(xy)^2+1-2x^2y^2}{\{(xy)^2+1\}^2} = \frac{-(xy)^2+1}{\{(xy)^2+1\}^2}$$

$$f_{yy} = \frac{-x(2xy \cdot x)}{\{(xy)^2+1\}^2} = \frac{-2x^3y}{\{(xy)^2+1\}^2}$$

(7) $f_x = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ より

$$f_{xx} = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xy} = x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$f_y = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ より

$$f_{yx} = y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{yy} = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + y\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = \frac{x^2+y^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(8) $f_x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}} \cdot y(-x^{-2}) = \dfrac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}} = yx^{-1}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$f_{xx} = y\left\{-x^{-2}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x\right\} = \frac{y\{-(x^2-y^2)-x^2\}}{x^2(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y(-2x^2+y^2)}{x^2(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xy} = x^{-1}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} + yx^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2y) = \frac{x^2-y^2+y^2}{x(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$f_y = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}} \cdot \dfrac{1}{x} = -(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$f_{yx} = \frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{yy} = \frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2y) = \frac{-y}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

80

(1) $\dfrac{dz}{dt} = 2x\cos t + 4y(-\sin t)$

$= 2\sin t\cos t - 4\cos t\sin t$

$= -2\sin t\cos t = -\sin 2t$

(2) $\dfrac{dz}{dt} = y(e^t - e^{-t}) + x \cdot 2e^t$

$= 2e^t(e^t - e^{-t}) + 2(e^t + e^{-t})e^t$

$= 2e^{2t} - 2 + 2e^{2t} + 2 = 4e^{2t}$

(3) $\dfrac{dz}{dt} = 3x^2(-t^{-2}) + 3y^2 \cdot 2t$

$= 3 \cdot t^{-2} \cdot (-t^{-2}) + 3t^4 \cdot 2t$

$= -\dfrac{3}{t^4} + 6t^5$

(4) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} \cdot e^t$

$+ \dfrac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} \cdot (-e^{-t})$

$= \dfrac{2ye^t}{(x+y)^2} + \dfrac{2xe^{-t}}{(x+y)^2} = \dfrac{2}{(x+y)^2} + \dfrac{2}{(x+y)^2}$

$= \dfrac{4}{(e^t + e^{-t})^2}$

81

(1) $f(x,\ y)=\log(x^2+y^2)$, $x=2u+3v$, $y=2u-3v$

$$f_u=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot 2+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot 2=\frac{4(x+y)}{x^2+y^2}=\frac{8u}{4u^2+9v^2}$$

$$f_v=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot 3+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot(-3)=\frac{6(x-y)}{x^2+y^2}=\frac{18v}{4u^2+9v^2}$$

(2) $f_u=3x^2y^2\cdot(-\sin u)+x^3\cdot 2y\cdot 0$

$=3\cos^2 u\sin^2 v\cdot(-\sin u)$

$=-3\cos^2 u\sin u\sin^2 v$

$f_v=3x^2y^2\cdot 0+x^3\cdot 2y\cos v=2\cos^3 u\sin v\cos v$

(3) $f_u=2x\cdot e^u\cos v-4y\,e^u\sin v=2e^{2u}\cos^2 v-4e^{2u}\sin^2 v$

$f_v=2xe^u(-\sin v)-4ye^u\cos v$

$=-2e^{2u}\cos v\sin v-4e^{2u}\sin v\cos v$

$=-6e^{2u}\cos v\sin v=-3e^{2u}\sin 2v$

82

(1) 面積 $f(x,\ y)=xy$ について $f_x=y$, $f_y=x$ より $f(6.1,\ 7.9)\fallingdotseq 6\cdot 8+8\cdot 0.1-6\cdot 0.1=48.2\,(\mathrm{cm}^2)$

(2) 長さ $f(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}$ について $f_x=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$

$f_y=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y$ より

$$f(50+2.6,\ 120-2.6)\fallingdotseq\sqrt{50^2+120^2}+(50^2+120^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 50\cdot 2.6+(50^2+120^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 120\cdot(-2.6)$$

$$\fallingdotseq 130+\frac{130}{130}-\frac{12\times 26}{130}=128.6\,(\mathrm{cm})$$

83

(1) $dz=-\sin(3x+2y)\cdot 3\,dx$

$\quad -\sin(3x+2y)\cdot 2\,dy$

$=-\sin(3x+2y)(3dx+2dy)$

(2) $$dz=\frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}\,dx+\frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}}\,dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}}(y\,dx+x\,dy)$$

(3) $$dz=\left(-yx^{-2}-\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{x}+xy^{-2}\right)dy$$

$$=\left(-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)dy$$

$$=-\frac{y^2+x^2}{x^2y}\,dx+\frac{y^2+x^2}{xy^2}\,dy$$

$$=\frac{x^2+y^2}{xy}\left(-\frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{y}\,dy\right)$$

(4) $$dz=\tan y\,dx+x\cdot\frac{1}{\cos^2 y}\,dy$$

84

体積 $f(x,\ y) = x^2 y$　（但し縦と高さを x，横を y とする）について

$df = 2x \cdot y\ dx + x^2 dy$

よって　体積の増加≒$2\cdot 6\cdot 8\cdot 0.1 + 6^2\cdot(-0.1) = 9.6 - 3.6 = 6.0\,(\mathrm{cm}^3)$

85

⑴　$f_x = 2x,\ \ f_y = 2y$ より $f_x(1,\ 2) = 2,\ \ f_y(1,\ 2) = 4$ なので $z - 5 = 2(x-1) + 4(y-2)$

$z = 2x - 2 + 4y - 8 + 5$

$z = 2x + 4y - 5$

⑵　$f_x(0,\ 1) = 0,\ \ f_y(0,\ 1) = 2$ より $z - 1 = 0(x-0) + 2(y-1)$

よって　$z = 2y - 1$

86

⑴　$(x,\ y) = (2,\ 2)$ のとき $z = 0$　より　接点は $(2,\ 2,\ 0)$。

一方，$f_x = 2x,\ \ f_y = -2y$　より　$f_x(2,\ 2) = 4,\ \ f_y(2,\ 2) = -4$

よって接平面は

$z - 0 = 4(x-2) - 4(y-2)$

$z = 4x - 8 - 4y + 8$

よって，$4x - 4y - z = 0$　つまり　$z = 4x - 4y$

⑵　$(x,\ y) = (2,\ 1)$ のとき $z = 2$　より　接点は $(2,\ 1,\ 2)$。

一方，$f_x = \dfrac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$

$f_y = \dfrac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y)$　より　$f_x(2,\ 1) = -1,\ \ f_y(2,\ 1) = -\dfrac{1}{2}$

なので接平面は

$z - 2 = -(x-2) - \dfrac{1}{2}(y-1)$

$2z - 4 = -2x + 4 - y + 1$

よって，$2x + y + 2z - 9 = 0$　つまり　$z = -x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{9}{2}$

⑶　$(x,\ y) = (2,\ -1)$ のとき $z = -1$　より　接点は $(2,\ -1,\ -1)$。

一方，$f_x = \dfrac{-y}{(x+y)^2}$，$f_x(2,\ -1) = 1$

$$f_y = \frac{(x+y)-y}{(x+y)^2},\quad f_y(2,\ -1) = 2$$

より接平面は

$$z + 1 = 1(x-2) + 2(y+1)$$
$$= x - 2 + 2y + 2$$

よって，$x + 2y - z - 1 = 0$　つまり　$z = x + 2y - 1$

⑷　$(x,\ y) = (1,\ 1)$ のとき $z = 2$　より　接点は $(1,\ 1,\ 2)$。

一方，

$$f_x = 2xy + y,\quad f_x(1,\ 1) = 3$$
$$f_y = x^2 + x,\quad f_y(1,\ 1) = 2$$ より

接平面は

$$z - 2 = 3(x-1) + 2(y-1)$$
$$= 3x - 3 + 2y - 2$$

よって，$3x + 2y - z - 3 = 0$　つまり　$z = 3x + 2y - 3$

B

87

⑴　$x = y^2$ にそって $(0,\ 0)$ に近づけると $f(x,\ y) = \dfrac{y^4}{y^4 + y^4} \to \dfrac{1}{2}$　一方

$x = 2y^2$ にそって $(0,\ 0)$ に近づけると $f(x,\ y) = \dfrac{2y^4}{4y^4 + y^4} \to \dfrac{2}{5}$

近づけ方により異なる値に近づくので答は「極限値なし」である。

⑵　$y = -x + x^2$ にそい $(0,\ 0)$ に近づけると $f(x,\ y) = \dfrac{x^2}{x^2} \to 1$,

$y = -x + 2x^2$ にそって $(0,\ 0)$ に近づけると $f(x,\ y) = \dfrac{x^2}{2x^2} \to \dfrac{1}{2}$

近づけ方により異なる値に近づくので答は「極限値なし」である。

88

(i) $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 　（$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$ とおくと（x, y）$\to$ (0, 0)より$r\to 0$）

$$= \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin\theta\frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}\sin 2\theta\cdot r^2\cdot\cos 2\theta$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{4}\sin 4\theta\cdot r^2 = 0 \cdots\cdots ㋐$$

（$-1 \leqq \sin 4\theta \leqq 1$ 　より）

一方，$f(0,\ 0) = 0 \cdots\cdots$㋑　㋐，㋑より　$f(x,\ y)$は(0, 0)で連続。

(ii) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,\ 0)-f(0,\ 0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$ より $f(x,\ y)$は(0, 0)において x について偏微分可能。

同様　$\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{f(0,\ 0+k)-f(0,\ 0)}{k} = 0$ より (0, 0)で y について偏微分可能。

89

$$f_{xy}(0,\ 0) = \lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,\ 0+k)-f_x(0,\ 0)}{k}$$

だが前問より $f_x(0,\ 0) = 0$ であり

$$f_x(0,\ k) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,\ k)-f(0,\ k)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(kh\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}-0\right)\frac{1}{h}$$

$= -k$ である

よって　$\displaystyle f_{xy}(0,\ 0) = \lim_{h\to 0}\frac{-k}{k} = -1 \cdots\cdots$㋐

$\displaystyle f_{yx}(0,\ 0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(0+h,\ 0)-f_y(0,\ 0)}{h}$　だが，前問より $f_y(0,\ 0) = 0$ であり

$$f_y(h,\ 0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(h,\ 0+k)-f(h,\ 0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\left(hk\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}-0\right)\frac{1}{k}$$

$= h$ である

よって　$\displaystyle f_{yx}(0,\ 0) = \lim_{k\to 0}\frac{h}{h} = 1 \cdots\cdots$㋑

㋐，㋑より $f_{xy}(0,\ 0) \neq f_{yx}(0,\ 0)$

(1) $f_x = \dfrac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$f_{xx} = \frac{1}{(x^2+y^2)^4}\{(-2x)(x^2+y^2)^2-(-x^2+y^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x\}$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^3}(-2x^3-2xy^2+4x^3-4xy^2) \qquad \cdots\cdots ㋐$$

$$f_y = \frac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -2x\cdot\frac{y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy} = -2x\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^4}\{1\cdot(x^2+y^2)^2-y\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y\}$$

$$= \frac{-2x}{(x^2+y^2)^3}(x^2+y^2-4y^2)$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^3}(-2x^3+6xy^2) \qquad \cdots\cdots ㋑$$

㋐，㋑より $f_{xx}+f_{yy}=0$　よって調和関数である。

(2) $f=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$　より

$$f_x = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$$

$$= -x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_{xx} = -(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}+(-x)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x$$

$$= -(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f_y = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y$$

$$= -y(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_{yy} = -(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}+3y^2(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}$$

よって　　$f_{xx}+f_{yy}$

$$= -2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}+3(x^2+y^2)\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

よって $f(x,\ y)$ は調和関数でない。

(3) $f_x = \dfrac{(x+y)-x}{(x+y)^2} = y(x+y)^{-2}$

$f_{xx} = y \cdot (-2)(x+y)^{-3}$

$f_y = \dfrac{-x}{(x+y)^2} = -x(x+y)^{-2}$

$f_{yy} = -x \cdot (-2)(x+y)^{-3}$

よって $f_{xx} + f_{yy} = (-2y + 2x)(x+y)^{-3}$

従って $f(x,\ y)$ は調和関数でない。

(4) $f = \dfrac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ より

$f_x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$= x(x^2+y^2)^{-1}$

$f_{xx} = (x^2+y^2)^{-1} + x \cdot (-1)(x^2+y^2)^{-2} \cdot 2x$

$f_y = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2y}{x^2+y^2} = \dfrac{y}{x^2+y^2} = y(x^2+y^2)^{-1}$

$f_{yy} = (x^2+y^2)^{-1} + y \cdot (-1)(x^2+y^2)^{-2} \cdot 2y$

よって　$f_{xx} + f_{yy}$

$= 2(x^2+y^2)^{-1} + (-2x^2 - 2y^2) \cdot (x^2+y^2)^{-2} = 0$

よって　$f(x,\ y)$ は調和関数である。

91

(1) $z_u = z_x x_u + z_y y_u$

$= z_x \cos\alpha + z_y \sin\alpha$

$z_{uu} = \{(z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u\}\cos\alpha + \{(z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u\}\sin\alpha$

$= z_{xx}\cos^2\alpha + z_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + z_{yx}\cos\alpha\sin\alpha + z_{yy}\sin^2\alpha$

$z_v = z_x x_v + z_y y_v$

$= z_x(-\sin\alpha) + z_y\cos\alpha$

$z_{vv} = \{(z_x)_x x_v + (z_x)_y y_v\}(-\sin\alpha) + \{(z_y)_x x_v + (z_y)_y y_v\}\cos\alpha$

$= z_{xx}\sin^2\alpha - z_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + z_{yx}(-\sin\alpha)\cos\alpha + z_{yy}\cos^2\alpha$

よって $z_{uu} + z_{vv} = z_{xx}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + z_{yy}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$= z_{xx} + z_{yy}$

(2)

$$
\begin{aligned}
z_u &= z_x x_u + z_y y_u \\
&= z_x(e^u \cos v) + z_y(e^u \sin v) \\
z_{uu} &= \left[\{(z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u\} e^u + z_x e^u\right]\cdot \cos v \\
&\quad + \left[\{(z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u\} e^u + z_y e^u\right]\cdot \sin v \\
&= \left[(z_{xx}e^u \cos v + z_{xy}e^u \sin v) e^u + z_x e^u\right]\cdot \cos v \\
&\quad + \left[(z_{yx}e^u \cos v + z_{yy}e^u \sin v) e^u + z_y e^u\right]\cdot \sin v \\
&= (z_{xx}e^{2u} \cos^2 v + z_{xy}e^{2u} \sin v \cos v + z_x e^u \cos v) \\
&\quad + (z_{yx}e^{2u} \cos v \sin v + z_{yy}e^{2u} \sin^2 v + z_y e^u \sin v) \qquad \cdots\cdots ㋐
\end{aligned}
$$

一方,

$$
\begin{aligned}
z_v &= z_x x_v + z_y y_v \\
&= z_x e^u(-\sin v) + z_y e^u(\cos v) \\
z_{vv} &= \left[\{(z_x)_x x_v + (z_x)_y y_v\}(-\sin v) + z_x(-\cos v)\right]\cdot e^u \\
&\quad + \left[\{(z_y)_x x_v + (z_y)_y y_v\}\cos v + z_y(-\sin v)\right]\cdot e^u \\
&= \left[\{z_{xx}e^u(-\sin v) + z_{xy}e^u \cos v\}(-\sin v) - z_x \cos v\right]\cdot e^u \\
&\quad + \left[\{z_{yx}e^u(-\sin v) + z_{yy}e^u \cos v\}\cos v - z_y \sin v\right]\cdot e^u \\
&= z_{xx}e^{2u} \sin^2 v - z_{xy}e^{2u} \cos v \sin v - z_x e^u \cos v \\
&\quad - z_{yx}e^{2u} \sin v \cos v + z_{yy}e^{2u} \cos^2 v - z_y e^u \sin v \qquad \cdots\cdots ㋑
\end{aligned}
$$

㋐, ㋑より　$z_{uu} + z_{vv} = z_{xx}e^{2u} + z_{yy}e^{2u}$

よって　$z_{xx} + z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} + z_{vv})$

92

(1) 仮定より $z_x = f_x(x,\ y)$ に対し $(f_x)_{xy} = (f_x)_{yx}$ なので $f_{xxy} = f_{xyx}$
一方　$f_{xy} = f_{yx}$ より $(f_{xy})_x = (f_{yx})_x$
よって　$f_{xyx} = f_{yxx}$　以上により　$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$

(2) $(f_y)_{xy} = (f_y)_{yx}$　より　$f_{yxy} = f_{yyx}$
一方　$f_{xy} = f_{yx}$ より $(f_{xy})_y = (f_{yx})_y$
よって　$f_{xyy} = f_{yxy}$　以上から,　$f_{yyx} = f_{yxy} = f_{xyy}$

93

(1) $t = ax + by$ とおくと
$z_x = f'(t)\cdot t_x = f'(t)\cdot a$
$z_y = f'(t)\cdot t_y = f'(t)\cdot b$
よって　$bz_x - az_y = abf'(t) - abf'(t) = 0$

⑵　$t = xy$ として

$$z_x = f'(t)\cdot t_x = f'(t)y$$

$$z_y = f'(t)\cdot t_y = f'(t)x$$

よって　$xz_x - yz_y = x f'(t)y - y f'(t)x = 0$

⑶　$t = \dfrac{y}{x}$ として

$$z_x = f'(t)t_x = f'(t)\cdot y(-x^{-2})$$

$$z_y = f'(t)t_y = f'(t)\cdot\frac{1}{x}$$

よって　$xz_x + yz_y = f'(t)\,y(-x^{-1}) + f'(t)\cdot\dfrac{y}{x} = 0$

⑷　⑴と同様にして

$$z_x = f'(x+ay)\cdot 1 + g'(x-ay)\cdot 1$$

$$z_{xx} = f''(x+ay)\cdot 1^2 + g''(x-ay)\cdot 1^2$$

$$z_y = f'(x+ay)\cdot a + g'(x-ay)\cdot(-a)$$

$$z_{yy} = f''(x+ay)\cdot a^2 + g''(x-ay)\cdot(-a)^2$$

よって　$a^2 z_{xx} - z_{yy}$

$= a^2\{f''(x+ay) + g''(x-ay)\} - \{f''(x+ay)a^2 + g''(x-ay)a^2\}$

$= 0$

94

$t = \dfrac{y}{x}$　より　$y = xt$　z は x, y の関数　$f(x,\ y)$ であり，x と y はともに x, t の式であるとみなせるので

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,\ xt) = f_x\cdot(x)_x + f_y\cdot(y)_x$$

$$= f_x + f_y t = f_x + f_y\cdot\frac{y}{x}$$

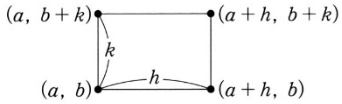
$$= \frac{x f_x + f_y y}{x} = 0 \quad (xz_x + yz_y = 0\text{ より})$$

よって $f(x,\ xt)$　すなわち　$f(x,\ y)$ は t のみ　　従って $\dfrac{y}{x}$ のみの式である。

発展問題

95

$A = f(a+h,\ b+k) - f(a+h,\ b) - f(a,\ b+k) + f(a,\ b)$　とおく。



$A = \{f\,(a+h,\ b+h) - f(a+h,\ b)\} - \{f(a,\ b+k) - f(a,\ b)\}$

$= \Big[\, f(x,\ b+k) - f(x,\ b) \,\Big]_{x=a}^{x=a+h}$

$= \{ f_x(c_1,\ b+k) - f_x(c_1,\ b) \}\, h$

$(a < c_1 < a+h)$

（ x の関数 $f(x,\ b+k) - f(x,\ b)$ に平均値の定理を適用。）

$= \Big[\, f_x(c_1,\ y) \,\Big]_{y=b}^{y=b+k} \cdot h$

$= f_{xy}(c_1,\ c_2)\, k \cdot h$　　……㋐

$(b < c_2 < b+k)$

（ y の関数 $f_x(c_1,\ y)$ に平均値の定理を適用した。）

一方　$A = \{f\,(a+h,\ b+k) - f(a,\ b+k)\}$

$- \{ f(a+h,\ b) - f(a,\ b)\}$

$= \Big[\, f(a+h,\ y) - f(a,\ y) \,\Big]_{y=b}^{y=b+k}$

$= \{ f_x(a+h,\ c_4) - f_y(a,\ c_4) \} \cdot k$

$(b < c_4 < b+k)$

（ y の関数 $f(a+h,\ y) - f(a,\ y)$ に平均値の定理を適用。）

$= \Big[\, f_y(x,\ c_4) \,\Big]_{x=a}^{x=a+h} \cdot k$

$= f_{yx}(c_3,\ c_4) h \cdot k$　　……㋑

$(a < c_3 < a+h)$

（ x の関数 $f_y(x,\ c_4)$ に平均値の定理を適用。）

㋐ ㋑より　$f_{xy}(c_1,\ c_2) = f_{yx}(c_3,\ c_4)$

よって　$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f_{xy}(c_1,\ c_2) = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f_{yx}(c_3,\ c_4)$

$h \to 0,\ k \to 0$　のとき　$c_1 \to a,\ c_2 \to b,\ c_3 \to a,\ c_4 \to b$　であるが

f_{xy} が連続なので　左辺 $= f_{xy}(a,\ b)$，　f_{yx} が連続なので　右辺 $= f_{yx}(a,\ b)$ である。

よって　$f_{xy}(a,\ b) = f_{yx}(a,\ b)$ が任意の点 $(a,\ b)$ について成立する。

96

(1) $u_x = \dfrac{3x^2 - 3yz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$

$u_y = \dfrac{3y^2 - 3zx}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$

$u_z = \dfrac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$ より

$u_x + u_y + u_z = \dfrac{3(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \dfrac{3}{x + y + z}$

(因数分解の公式　$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$ を適用した。

(2) $u_x = (y - z)\{(z - x) + (x - y)(-1)\}$

$u_y = (z - x)\{(-1)(y - z) + (x - y)\}$

$u_z = (x - y)\{(-1)(z - x) + (y - z)\}$ より

$$\begin{aligned} u_x + u_y + u_z &= (y - z)(z - x) - (y - z)(x - y) \\ &\quad - (z - x)(y - z) + (z - x)(x - y) \\ &\quad - (x - y)(z - x) + (x - y)(y - z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

97

(1) 問題 90(2)にならって直接 u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} を求めて加えてもよい。ここでは別解を紹介する。

与式より

$u^{-2} = x^2 + y^2 + z^2$ なので　……㋐

両辺を x で偏微分して

$-2u^{-3} \cdot u_x = 2x$　より　$u_x = -xu^3$

よって　$u_{xx} = -(u^3 + x \cdot 3u^2 u_x)$

同様に　$u_y = -yu^3$, $u_z = -zu^3$　であり

$u_{yy} = -(u^3 + y \cdot 3u^2 u_y)$

$u_{zz} = -(u^3 + z \cdot 3u^2 u_z)$

従って
$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= -\{u^3 + 3u^2 x \cdot (-xu^3) + u^3 + 3u^2 y \cdot (-yu^3) \\ &\quad + u^3 + 3u^2 z \cdot (-zu^3)\} \\ &= -\{3u^3 - 3u^5(x^2 + y^2 + z^2)\} \\ &= -(3u^3 - 3u^5 \cdot u^{-2}) \quad (\text{㋐より}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって，調和関数である。

⑵　問題 96⑵の解答より

$$u_x = (y - z)(z - 2x + y)$$

$$u_y = (z - x)(-2y + z + x)$$

$u_z = (x - y)(-2z + x + y)$　なので

$$u_{xx} = (y - z)(-2)$$

$$u_{yy} = (z - x)(-2)$$

$$u_{zz} = (x - y)(-2)$$

従って　$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -2(y - z + z - x + x - y) = 0$

よって，調和関数である。

３章　偏微分

２節　偏微分の応用

A

98

⑴　$f_x = 2x - y,\ f_y = -x + 2y - 3$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは $(x,\ y) = (1,\ 2)$ のときのみ。

一方，$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = -1,\ f_{yy} = 2$ なので $\mathrm{H}(x,\ y) = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3$

よって $\mathrm{H}(1,\ 2) = 3 > 0$　したがって $(1,\ 2)$ で z は極値 $f(1,\ 2) = 1 - 2 + 4 - 6 = -3$ をとる。

$f_{xx}(1,\ 2) = 2 > 0$ よりそれは極小値である。

⑵　$f_x = 2x + y - 5,\ f_y = x - 2y - 1$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは

$(x,\ y) = \left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$ のときのみ。一方，$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = 1,\ f_{yy} = -2$ なので

$\mathrm{H}(x,\ y) = 2 \cdot (-2) - 1^2 = -5$

よって　$\mathrm{H}\left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{3}{5}\right) < 0$　　したがって　$\left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$　で z は極値をとらない。

⑶　$f_x = 3x^2 - 2x,\ f_y = 2y$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは

$(x,\ y) = (0,\ 0),\ \left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$ のときのみ。

$f_{xx} = 6x - 2,\ f_{xy} = 0,\ f_{yy} = 2$ より $\mathrm{H}(x,\ y) = (6x - 2) \cdot 2 - 0^2$

よって　$\mathrm{H}(0,\ 0) = -4 < 0$。したがって　$(0,\ 0)$ で z は極値をとらない。

$\mathrm{H}\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right) = 4 > 0$ より z は $\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$ で極値

$f\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3} - 1\right) = -\dfrac{4}{27}$ をとる。

$f_{xx}\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right) = 2 > 0$ よりそれは極小値である。

⑷　$f_x = 3x^2 - 3y,\ f_y = -3x + 3y^2$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは

$x^2 - y = 0,\ x - y^2 = 0$ より $x - x^4 = x(1 - x^3) = 0$，つまり $x = 0,\ 1$ のとき。

したがって $(x,\ y) = (0,\ 0),\ (1,\ 1)$ のときのみ z が極値をとる可能性あり。

$f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = -3,\ f_{yy} = 6y$ より $\mathrm{H}(x,\ y) = 36xy - 9$ なので $\mathrm{H}(0,\ 0) < 0$ であり

z は $(0,\ 0)$ で極値をとらない。一方 $\mathrm{H}(1,\ 1) = 36 - 9 > 0$ なので z は $(1,\ 1)$ で

極値 $f(1,\ 1) = 1 - 3 + 1 = -1$ をとる。$f_{xx}(1,\ 1) = 6 > 0$ よりそれは極小値である。

⑸ $f_x = 3x^2 - 3$, $f_y = 3y^2 - 12$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは

$(x,\ y) = (1,\ 2),\ (1,\ -2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$ のみ。$f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 6y$ より
$\mathrm{H}(x,\ y) = 36xy$ なので $\mathrm{H}(1,\ -2)$, $\mathrm{H}(-1,\ 2)$ はともに負となり $(1,\ -2),\ (-1,\ 2)$ のとき
z は極値をとらない。$\mathrm{H}(1,\ 2)$, $\mathrm{H}(-1,\ -2)$ はともに正となり $(-1,\ -2),\ (1,\ 2)$ のとき z は極値をとる。
極値 $f(-1,\ -2) = -1 - 8 + 3 + 24 = 18$ は $f_{xx}(-1,\ -2) < 0$ より極大値である。
一方，$f(1,\ 2) = 1 + 8 - 3 - 24 = -18$ は $f_{xx}(1,\ 2) = 6 > 0$ より極小値である。

⑹ $f_x = 4x^3 + 4x - 4y$, $f_y = 2y - 4x$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは

$x^3 + x = y$, $y = 2x$ より $x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0$ であり，
$(x,\ y) = (0,\ 0),\ (1,\ 2),\ (-1,\ -2)$ のときのみ。

$f_{xx} = 12x^2 + 4$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 2$ より $\mathrm{H}(x,\ y) = 2(12x^2 + 4) - 16 = 24x^2 - 8$ であり

$\mathrm{H}(0,\ 0) < 0$ より z は $(0,\ 0)$ で極値をとらない。
$\mathrm{H}(1,\ 2) = 16 > 0$ より z は極値 $f(1,\ 2) = 1 + 4 + 2 - 8 + 1 = 0$ をとり，それは $f_{xx}(1,\ 2) > 0$ より極小値である。
$\mathrm{H}(-1,\ -2) = 16 > 0$ より z は極値 $f(-1,\ -2) = 1 + 4 + 2 - 8 + 1 = 0$ をとり，それは $f_{xx}(-1,\ -2) > 0$ より極小値である。

⑺ $f_x = 3x^2 - 9y$, $f_y = -9x + 3y^2$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは

$x^2 = 3y$, $3x = y^2$ より $3x = \dfrac{1}{9}x^4$，つまり $27x - x^4 = x(27 - x^3) = 0$ のときだから
$x = 0,\ 3$ より $(x,\ y) = (0,\ 0),\ (3,\ 3)$ のときのみ。
$f_{xx} = 6x - 9$, $f_{xy} = -9$, $f_{yy} = 6y$ より $\mathrm{H}(x,\ y) = 6y(6x - 9) - 81$ なので $\mathrm{H}(0,\ 0) < 0$ であり
z は $(0,\ 0)$ で極値をとらない。
$\mathrm{H}(3,\ 3) = 27 \cdot 9 - 81 > 0$ なので z は $(3,\ 3)$ で極値 $f(3,\ 3) = 27 - 81 + 27 + 1 = -26$ をとる。
$f_{xx}(3,\ 3) = 9 > 0$ よりそれは極小値である。

⑻ $f_x = 4x^3 - 4y$, $f_y = -4x + 4y$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは

$x^3 = y$, $x = y$ より $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ のときだから
$x = 0,\ 1,\ -1$ より $(x,\ y) = (0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ のときのみ。

$f_{xx} = 12x^2$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 4$ より $\mathrm{H}(x,\ y) = 48x^2 - 16$ なので $\mathrm{H}(0,\ 0) = -16 < 0$ であり

z は $(0,\ 0)$ で極値をとらない。
$\mathrm{H}(\pm 1,\ \pm 1) = 32 > 0$ なので z は $(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ で
極値 $f(-1,\ -1) = f(1,\ 1) = 1 - 4 + 2 = -1$ をとる。
その値は $f_{xx}(-1,\ -1) = f_{xx}(1,\ 1) = 12 > 0$ より極小値である。

99

⑴　$F(x,\ y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ とおくと $F_x = 2x$，$F_y = 2y$ より $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{2y} = \dfrac{-x}{y}$

⑵　$F(x,\ y) = \cos x + \sin y - 1 = 0$ とおくと $F_x = -\sin x$，$F_y = \cos y$ より $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(-\sin x)}{\cos y} = \dfrac{\sin x}{\cos y}$

⑶　$F(x,\ y) = x + y + \log x + \log y$ とおくと $F_x = 1 + \dfrac{1}{x}$，$F_y = 1 + \dfrac{1}{y}$ より $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}{1 + \dfrac{1}{y}} = -\dfrac{xy + y}{xy + x}$

⑷　$F(x,\ y) = x + y - e^x - e^y$ とおくと $F_x = 1 - e^x$，$F_y = 1 - e^y$ より $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(1 - e^x)}{1 - e^y} = \dfrac{-1 + e^x}{1 - e^y}$

100

⑴　$F(x,\ y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ とおくと $F_x = 2x$，$F_y = 2y$ より

$F_x(1,\ \sqrt{3}) = 2$，$F_y(1,\ \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ なので

l は，$2(x-1) + 2\sqrt{3}(y - \sqrt{3}) = 0$　　l' は，$2\sqrt{3}(x-1) - 2(y - \sqrt{3}) = 0$

つまり l は，$x + \sqrt{3}y - 4 = 0$　　l' は，$\sqrt{3}x - y = 0$

⑵　$F(x,\ y) = x^3 + 3xy + y^3 - 5 = 0$ とおくと $F_x = 3x^2 + 3y$，$F_y = 3x + 3y^2$ より

$F_x(1,\ 1) = 6$，$F_y(1,\ 1) = 6$ なので

l は，$6(x-1) + 6(y-1) = 0$　　l' は，$6(x-1) - 6(y-1) = 0$

つまり l は，$x + y - 2 = 0$　　l' は，$x - y = 0$

⑶　$F(x,\ y) = x^2 - xy + y^3 - 3y = 0$ とおき $F_x = 2x - y$，$F_y = -x + 2y - 3$ より

$F_x(2,\ 1) = 4 - 1 = 3$，$F_y(2,\ 1) = -2 + 2 - 3 = -3$，なので

l は，$3(x-2) - 3(y-1) = 0$　　l' は，$-3(x-2) - 3(y-1) = 0$

つまり l は，$x - y - 1 = 0$　　l' は，$x + y - 3 = 0$

⑷　$F(x,\ y) = x^3 - x^2 + y^2 - 4 = 0$ とおくと $F_x = 3x^2 - 2x$，$F_y = 2y$ より

$F_x(1,\ 2) = 3 - 2 = 1$，$F_y(1,\ 2) = 4$，なので

l は，$(x-1) + 4(y-2) = 0$　　l' は，$4(x-1) - 1(y-2) = 0$

つまり l は，$x + 4y - 9 = 0$　　l' は，$4x - y - 2 = 0$

101

⑴　$F(x,\ y)=x^2-2xy+3y^2-2=0$ とおく。$F=0$，$F_x=2x-2y=0$ となるのは

$x^2-2x^2+3x^2=2$，つまり $x=\pm 1$ のとき。

よって　$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ のときであり

$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{2}{-2x+6y}=\dfrac{1}{x-3y}$ の値は各々 $-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$ であるので，

y は $(x,\ y)=(1,\ 1)$ のとき極大値 1 をとり

$(x,\ y)=(-1,\ -1)$ のとき極小値 -1 をとる。

⑵　$F(x,\ y)=x^2+xy+y^2-1=0$ とおく。$F=0$，$F_x=2x+y=0$ となるのは

$x^2-2x^2+4x^2=1$ のとき，つまり $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき。

よって　$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ のとき

$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{2}{x+2y}$ の値は各々 $-\dfrac{2}{\frac{-3}{\sqrt{3}}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}>0,\ -\dfrac{2}{\frac{3}{\sqrt{3}}}=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}<0$ であるので，

y は $(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ のとき極小値 $y=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$ をとり

$\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ のとき極大値 $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ をとる。

⑶　$F(x,\ y)=x^2-xy+y^3-7=0$ とおく。$F=0$，$F_x=2x-y=0$ となるのは

$x^2-2x^2+8x^3=7$ のとき。$8x^3-x^2-7=0$ より左辺を $P(x)$ とおくとき $P(1)=0$ となるので

$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。（公式 $\boxed{2}$ ）

$(x-1)(8x^2+7x+7)=0$ となり $x=1$。このとき $y=2$。

$(x,\ y)=(1,\ 2)$ で

$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{2}{-x+2y^2}<0$ より y は $(x,\ y)=(1,\ 2)$ のとき極大値 $y=2$ をとる。

⑷　$F(x,\ y)=xy^2-x^2y-2=0$ とおく。$F=0$，$F_x=y^2-2xy=0$ （つまり $y=0$ または $y=2x$）

となるのは

$y-2x=0$ のときなので $x\cdot 4x^2-x^2\cdot 2x=2$

つまり $x=1$ のとき，このとき $y=2$。

$(x,\ y)=(1,\ 2)$ で $-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{-2y}{2xy-x^2}=\dfrac{4}{4-1}>0$ より

$(x,\ y)=(1,\ 2)$ で y は極小値 2 をとる。

⑴　$f = y - x$，$g = x^2 + y^2 - 2 = 0$ ……㋐　とおくと $f_x = -1$，$f_y = 1$，$g_x = 2x$

$g_y = 2y$ より $f_x g_y - f_x g_y = -2y - 2x = 0$ とすると $y = -x$

㋐に代入して $2x^2 = 2$ より $x = \pm 1$　　よって $(x,\ y) = (1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$

$f(1,\ -1) = -2$，$f(-1,\ 1) = 2$

仮定㊟より $(1,\ -1)$ で極小値 -2，$(-1,\ 1)$ で極大値 2

⑵　$f = x + y$，$g = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ ……㋑　とおくと $f_x = 1$，$f_y = 1$，$g_x = 2x$，$g_y = 4y$ より

$f_x g_y - f_y g_x = 4y - 2x = 0$　このとき $x = 2y$ である。

㋑に代入して $4y^2 + 2y^2 = 1$ より　$y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$　　よって $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{6}}$（複号同順）

従って

$$f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \pm\frac{3}{\sqrt{6}}$$

仮定㊟より z は

$(x,\ y) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}},\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ のとき極大値 $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

$(x,\ y) = \left(\dfrac{-2}{\sqrt{6}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{6}}\right)$ のとき極小値 $\dfrac{-3}{\sqrt{6}}$

⑶　$f = xy$，$g = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ …㋒　で $f_x = y$，$f_y = x$，$g_x = 2x$，$g_y = 4y$ より

$f_x g_y - f_y g_x = 4y^2 - 2x^2 = 0$ とすると $x = \pm\sqrt{2}y$ である。

㋒に代入して $2y^2 + 2y^2 = 1$ より $y = \pm\dfrac{1}{2}$　　よって $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

従って

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\ \text{（複号同順）},$$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mp\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\ \text{（複号同順）}$$

仮定㊟より z は

$(x,\ y) = \left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$ のとき極大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \mp\dfrac{1}{2}\right)$ のとき極小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

⑷　$f=(x-1)^2+y^2$，$g=x^2+2y^2-2=0$……㊡　とおくと　$f_x=2(x-1)$，$f_y=2y$

$g_x=2x$，$g_y=4y$　より　$f_xg_y-f_yg_x=2(x-1)\cdot 4y-2y\cdot 2x=0$ となるのは

$2(x-1)y-xy=y(2x-2-x)=y(x-2)=0$ のとき。

よって　$x=2$，または $y=0$

$x=2$ をみたす y は㊡よりないので不適。

$y=0$ のとき㊡より $x=\pm\sqrt{2}$，$f(\sqrt{2},\ 0)=(\sqrt{2}-1)^2$

$f(-\sqrt{2},\ 0)=(-\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2}+1)^2$ と仮定㊉より

$(x,\ y)=(\sqrt{2},\ 0)$ のとき極小値 $(\sqrt{2}-1)^2$，

$(x,\ y)=(-\sqrt{2},\ 0)$ のとき極大値 $(\sqrt{2}+1)^2$

⑸　$f=xy^3$，$g=x^2+y^2-4=0$…㊍　とおくと $f_x=y^3$，$f_y=3xy^2$，$g_x=2x$，$g_y=2y$ より

$f_xg_y-f_yg_x=2y^4-6x^2y^2=2y^2(y^2-3x^2)=0$ となるのは $y=0$，$y=\pm\sqrt{3}x$ のとき。

㊍に代入すると $y=0$ のとき $x=\pm 2$，$y=\pm\sqrt{3}x$ のとき $x=\pm 1$。

よって　$f(\pm 1,\ \pm\sqrt{3})=3\sqrt{3}$

$f(\pm 1,\ \mp\sqrt{3})=-3\sqrt{3}$

$f(0,\ \pm 2)=0$

仮定㊉より

$(x,\ y)=(\pm 1,\ \pm\sqrt{3})$ のとき極大値 $3\sqrt{3}$ をとり

$(\pm 1,\ \mp\sqrt{3})$ のとき極小値 $-3\sqrt{3}$　　（以上複号同順）

注　f は第 1 象限の $(x,\ y)$ で正，第 2 象限の $(x,\ y)$ で負の値をとるので
$(x,\ y)=(0,\ 2)$ で極値をとらない。同様に，f は第 4 象限の $(x,\ y)$ で負，
第 3 象限の $(x,\ y)$ で正の値をとるので $(x,\ y)=(0,\ -2)$ で極値をとらない。

⑹　$f = x^3 + y^3$，$g = x^2 + y^2 - 1 = 0$ ……㋕

とおくと $f_x = 3x^2$，$f_y = 3y^2$，$g_x = 2x$，$g_y = 2y$ である。

ここで $f_x g_y - f_y g_x = 6x^2 y - 6xy^2 = 6xy(x-y) = 0$ とおくと

$x = 0$　または　$y = 0$　または　$x = y$　である。

(i)　$x = 0$　のとき　㋕より　$y = \pm 1$ であり

$(x, y) = (0, \pm 1)$ のとき $z = f(0, \pm 1) = \pm 1$　（複合同順）

(ii)　$x = 0$　のとき　㋕より　$y = \pm 1$ であり

$(x, y) = (\pm 1, 0)$ のとき　$z = f(\pm 1, 0) = \pm 1$　（複合同順）

(iii)　$x = y$　のとき　㋕より　$2x^2 = 1$ なので $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$　（複合同順）

$$(x, y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{のとき}\quad z = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

以上のことと仮定⊛より z は

$(x, y) = (0, 1)$，$(1, 0)$ のとき最大値，よって極大値 1 をとる。　…㋖

$(x, y) = (0, -1)$，$(-1, 0)$ のとき最小値，よって極小値－1 をとる。…㋗

また㋕より z は x の関数と見なせ，$0 \leqq x \leqq 1$ で連続，微分可能であり

開区間（0，1）で唯一，$\frac{dz}{dx} = 0$ となる x が $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

従って㋖よりここで z は極小値をとる。つまり

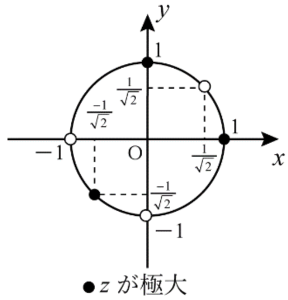
$(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき z は極小値 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ をとる。

同様㋕より $-1 \leqq x \leqq 0$ で z は x の関数として連続，微分可能であり

開区間（－1，0）で唯一，$\frac{dz}{dx} = 0$ となる x が $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ である。

従って㋗よりここで z は極大値をとる。つまり

$(x, y) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき z は極大値 $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ をとる。



●z が極大
○z が極小

（注意）詳しく調べたいときには㋕より z を x の関数

$z = x^3 \pm (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ とみて $\frac{dz}{dx}$，$\frac{d^2 z}{dx^2}$ の符号を調べればよい。

B

103

(1) $f_x = \cos x + \cos(x+y)$

$f_y = \cos y + \cos(x+y)$ より

$f_x = f_y = 0$ となるのは $\cos x = \cos y$ のとき。$0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$ より $x = y$ ……㋐。

このとき $f_x = f_y = \cos x + \cos 2x = 0$ となる。

よって　$\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$（加法定理公式 $\boxed{10}$ より）。

従って　$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

よって　$\cos x = \dfrac{1}{2},\ -1$

$0 < x < \pi$ より $x = \dfrac{\pi}{3}$ で㋐より　$y = \dfrac{\pi}{3}$

$f_{xx} = -\sin x - \sin(x+y)$

$f_{xy} = -\sin(x+y)$

$f_{yy} = -\sin y - \sin(x+y)$ より

$$f_{xx}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \ \cdots\cdots㋑$$

$$f_{xy}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ f_{yy}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$ であるから

$\mathrm{H}\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 0$　となり　z は $(x, y) = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ で

極値 $f\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

㋑よりこれは極大値である。

(2) $f_x = -\sin x + \sin(x+y)$

$f_y = -\sin y + \sin(x+y)$ より

$f_x = f_y = 0$ とすると， $\sin x = \sin y$ である。 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$， $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$ ……ウ　で　$x = y$ ……エ。

このとき $f_x = f_y = -\sin x + \sin 2x = -\sin x + 2\sin x \cos x = \sin x(-1 + 2\cos x) = 0$ より

$\sin x = 0$， $\cos x = \dfrac{1}{2}$ で ウ エ から $x = y = \dfrac{\pi}{3}$ ……オ

$f_{xx} = -\cos x + \cos(x+y)$

$f_{xy} = \cos(x+y)$

$f_{yy} = -\cos y + \cos(x+y)$ なので

オのとき $f_{xx} = -\dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$ ……カ

$f_{xy} = -\dfrac{1}{2}$， $f_{yy} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = -1$ より $H\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = (-1)^2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 > 0$

よって z は $(x, y) = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ で

極値 $f\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$ をとる。カよりこれは極大値である。

(3)　$f_x = \cos x + \cos(x+y)$　……㋖

$f_y = -\sin y + \cos(x+y)$　……㋗　で $f_x = f_y = 0$ ㋘とすると，$\cos x = -\sin y$　……㋙である。

また，㋖に三角関数の和を積にする公式 $\boxed{10}$ (2)③を適用し㋘より

$$f_x = 2\cos\frac{x+(x+y)}{2}\cos\frac{x-(x+y)}{2} = 0$$

よって　$\dfrac{2x+y}{2} = \dfrac{\pi}{2} + m\pi$　(mは整数)㋚　または　$\dfrac{y}{2} = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$　(nは整数)㋛

したがって㋚より $2x+y=(2m+1)\pi$　$0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \pi$ より $2x+y=\pi$，3π　…㋚′

または㋛より　$y=(2n+1)\pi$

　$0 \leqq y \leqq \pi$　より　$y=\pi$　…㋛′

同様にして㋗を積の形にすると

$$f_y = \cos(x+y) + \cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{x+2y+\frac{\pi}{2}}{2}\cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$$

よって　$\dfrac{x+2y+\frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{2} + l\pi$　(lは整数)㋜

または　$\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{2} + s\pi$　(sは整数)㋝

したがって㋜より $x+2y=\dfrac{\pi}{2}+2l\pi$　$0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \pi$ より $x+2y=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{2}\pi$　…㋜′

または㋝より　$x=\dfrac{3}{2}\pi+2s\pi$ であるが　いま，$0 \leqq x \leqq \pi$ なので不適。

(i)　㋚′ と㋜′ をみたす(x, y)を求める。

　㋚′ × 2 は $4x+2y=2\pi$，6π

　㋜′ は $x+2y=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{2}\pi$

　㋚′ × 2－㋜′ より

　　$3x=\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{11}{2}\pi$，$-\dfrac{1}{2}\pi$，$\dfrac{7}{2}\pi$

　よって　$x=\dfrac{1}{2}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$，$-\dfrac{1}{6}\pi$，$\dfrac{7}{6}\pi$

　$0 \leqq x \leqq \pi$　より　$x=\dfrac{\pi}{2}$ で㋚′ より　$y=0$，2π　だが $0 \leqq y \leqq \pi$ より $y=0$

　したがって　$(x, y)=\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ で極値をとる可能性がある。

(ii)　㋛′ と㋜′ をみたす $(x,\ y)$ を求める。

㋛′ より $y = \pi$ であり㋜′ と $0 \leqq x \leqq \pi$ より $x = \dfrac{\pi}{2}$

したがって $(x,\ y) = \left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ で極値をとる可能性がある。

$f_{xx} = -\sin x - \sin(x+y)$

$f_{xy} = -\sin(x+y)$

$f_{yy} = -\sin y - \sin(x+y)$ なので

$\mathrm{H}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right) = (-1-1)(-1-1)-(-1)^2 > 0$ より $(x,\ y) = \left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ で

極値 $f\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right) = 1+1+1 = 3$ をとる。

これは $f_{xx}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right) = -1-1 < 0$ より極大値である。

一方，$\mathrm{H}\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right) = (-1+1)(0+1)-(-1)^2 < 0$ より

$(x,\ y) = \left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ で極値をとらない。

104

(1)　$f_x = y,\ f_y = x$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは $(x,\ y) = (0,\ 0)$ のときのみ。

$f_{xx} = 0,\ f_{xy} = 1,\ f_{yy} = 0$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0) = 0^2 - 1^2 < 0$

よって $f(x,\ y)$ は $(0,\ 0)$ で極値をとらない。

よって極値なし。

(2)　$f_x = -4x,\ f_y = 2y$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは $(x,\ y) = (0,\ 0)$ のときのみ。

$f_{xx} = -4,\ f_{xy} = 0,\ f_{yy} = 2$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0) = -8 - 0^2 < 0$

よって $f(x,\ y)$ は $(0,\ 0)$ で極値をとらない。

よって極値なし。

(3)　$f_x = y + 4(-x^{-2}),\ f_y = x + 2(-y^{-2})$　より　$f_x = f_y = 0$ となるのは

$y - \dfrac{4}{x^2} = 0,\ x - \dfrac{2}{y^2} = 0$ より $y - y^4 = 0$，$y(y^3-1) = 0$ で $y \neq 0$ より $y = 1$。

このとき $x = 2$。よって $(x,\ y) = (2,\ 1)$ で極値をとる可能性がある。

$f_{xx} = 8x^{-3},\ f_{xy} = 1,\ f_{yy} = 4y^{-3}$　より　$\mathrm{H}(x,\ y) = 8x^{-3} \cdot 4y^{-3} - 1^2$ で $\mathrm{H}(2,\ 1) = 4 - 1 > 0$ なので

$(2,\ 1)$ で極値 $f(2,\ 1) = 2+2+2 = 6$ をとる。

$f_{xx}(2,\ 1) = 1 > 0$ よりこれは極小値。

⑷　$f_x = y + a(-x^{-2})$，$f_y = x + a(-y^{-2})$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは

$y = ax^{-2}$，$x = ay^{-2}$　より　$y = a(ay^{-2})^{-2} = a^{-1}y^4$ なので $y^4 - ay = y(y^3 - a) = 0$。

$y \fallingdotseq 0$ より $y = a^{\frac{1}{3}}$　よって $x = a^{\frac{1}{3}}$

従って $\left(a^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{3}}\right)$ で極値をとる可能性がある。

$f_{xx} = 2ax^{-3}$，$f_{xy} = 1$，$f_{yy} = 2ay^{-3}$ より $\mathrm{H}\left(a^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{3}}\right) = 2aa^{-1} \cdot 2aa^{-1} - 1 = 3 > 0$ なので

極値 $f\left(a^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{3}}\right) = a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} = 3a^{\frac{2}{3}}$ をとる。

これは $f_{xx}\left(a^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{3}}\right) = 2aa^{-1} = 2 > 0$ より極小値である。

⑸　$f = x^2 + xy + y^2 + 3x^{-1} + 3y^{-1}$　より　$f_x = 2x + y - 3x^{-2}$，$f_y = x + 2y - 3y^{-2}$　であり

$f_x = f_y = 0$ となるのは　$2x + y = 3x^{-2}$，$x + 2y = 3y^{-2}$　……㋐

つまり $2x^3 + yx^2 = 3$，$xy^2 + 2y^3 = 3$ のとき。

$2x^3 + yx^2 = xy^2 + 2y^3$　より　$2(x^3 - y^3) + yx^2 - xy^2 = 0$

従って

$$\begin{aligned}
&2(x-y)(x^2+xy+y^2) + yx(x-y) \\
&= (x-y)(2x^2+3xy+2y^2) = (x-y)\left\{2\left(x^2+\frac{3}{2}xy\right)+2y^2\right\} \\
&= (x-y)\left[2\left\{\left(x+\frac{3}{4}y\right)^2-\frac{9}{16}y^2\right\}+2y^2\right] = (x-y)\left[2\left(x+\frac{3}{4}y\right)^2+\frac{7}{8}y^2\right] = 0
\end{aligned}$$

より $(x,\ y) = (0,\ 0)$ 以外のとき　$x = y$

このとき㋐より $3x = 3x^{-2}$ で $x = 1$，　$y = 1$

$f_{xx} = 2 + 6x^{-3}$，$f_{xy} = 1$，$f_{yy} = 2 + 6y^{-3}$ より $\mathrm{H}(1,\ 1) = 8^2 - 1^2 > 0$ となり $(1,\ 1)$ で

極値 $f(1,\ 1) = 1 + 1 + 1 + 3(1 + 1) = 9$ をとる。

$f_{xx}(1,\ 1) = 2 + 6 > 0$ よりこれは極小値。
一方 $(x,\ y) = (0 + 0)$ では $z = f(x,\ y)$ は定義されていないので極値をとらない。

(6)　$f_x = 3x^2 + 2x + 2y = 0$　……㋑

$f_y = 3y^2 + 2y + 2x = 0$　とすると

辺々引いて $3(y^2 - x^2) = 0$　より　$y = \pm x$。㋑に代入して $3x^2 = 0$，または $3x^2 + 4x = 0$。

これと㋑より　$(x,\ y) = (0,\ 0)$，$\left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)$ のとき，極値をとる可能性がある。

$f_{xx} = 6x + 2$，$f_{xy} = 2$，$f_{yy} = 6y + 2$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0) = 2^2 - 2^2 = 0$。

$(0,\ 0)$ の近くでの z の変化を考えると $y = -x$ のとき $z = x^3 - x^3 + x^2 - 2x^2 + x^2 = 0$

よって $(0,\ 0)$ で極値をとらない。

$\mathrm{H}\left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right) = \left(6 \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) + 2\right)^2 - 2^2 = 36 - 4 > 0$ より $\left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)$ で

極値　$f\left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right) = 2\left(-\dfrac{4}{3}\right)^3 + 4\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2$

$= \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2\left(2 \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) + 4\right) = \dfrac{16}{9} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{64}{27}$ をとる

これは　$f_{xx}\left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right) = 6 \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) + 2 = -6 < 0$　より極大値

(7)　$f_x = 12x^3 - 4xy$　……㋒

$f_y = -2x^2 + 2y = -2(x^2 - y)$　で $f_x = f_y = 0$　となるのは $y = x^2$ を㋒に代入して

$(x,\ y) = (0,\ 0)$ のときのみ。

$f_{xx} = 36x^2 - 4y$，$f_{xy} = -4x$，$f_{yy} = 2$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0) = 0 \times 2 - 0^2 = 0$

ここで　$z = 3\left(x^4 - \dfrac{2}{3}y\right)^2 + y^2 = 3\left\{\left(x^2 - \dfrac{y}{3}\right)^2 - \dfrac{y^2}{9}\right\} + y^2$

$= 3\left(x^2 - \dfrac{y}{3}\right)^2 - \dfrac{y^2}{3} + y^2 = 3\left(x^2 - \dfrac{y}{3}\right)^2 + \dfrac{2}{3}y^2 \geqq 0$

$x^2 - \dfrac{y}{3} = 0$ かつ $y = 0$ のとき，　すなわち $(x,\ y) = (0,\ 0)$ のときのみ等号成立。

$(x,\ y) \fallingdotseq (0,\ 0)$ のとき $z > 0$　　よって z は $(x,\ y) = (0,\ 0)$ で極小値 $f(0,\ 0) = 0$ をとる。

(8) $f_x = 4x^3 - 2x + 2y = 0$ ……㊁

$f_y = 4y^3 + 2x - 2y = 0$ となるのは $4x^3 + 4y^3 = 0$ より $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$ ……㊂

(i) ここで $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 - \dfrac{y^2}{4} + y^2 = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2 = 0$ となるのは

$y = \dfrac{y}{2}$ かつ $y = 0$ のとき，つまり $(x,\ y) = (0,\ 0)$ のときのみ。

(ii) $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ のときは ㊂より $y = -x$。このとき㊁より $4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$

従って $x = 0,\ \pm 1$ で $(x,\ y) = (0,\ 0),\ (\pm 1,\ \mp 1)$ （複号同順）

今 $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ なので $(x,\ y) = (\pm 1,\ \mp 1)$

$f_{xx} = 12x^2 - 2,\ f_{xy} = 2,\ f_{yy} = 12y^2 - 2$ より $H(0,\ 0) = (-2)^2 - 2^2 = 0$。

(iii) ここで，$(0,\ 0)$ 近くでの z の変化をみると

$y = 0$ のとき $z = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$ で $(0,\ 0)$ のとき $f_{xx}(0,\ 0) = -2 < 0$ より極大であり

$y = x$ のとき $z = 2x^4$ で $(0,\ 0)$ のとき極小になっている。従って z は $(0,\ 0)$ で極値をとらない。

一方 $H(\pm 1,\ \mp 1) = 10^2 - 2^2 > 0$ より $(x,\ y) = (\pm 1,\ \mp 1)$ で極値 $f(\pm 1,\ \mp 1) = 1 + 1 - 1 - 2 - 1 = -2$ をとる。

これは $f_{xx}(\pm 1,\ \mp 1) = 10 > 0$ より極小値である。

105

(1)　$F = x^2 + y^2 - 4 = 0$ とおくと $F_x = 2x$，　$F_y = 2y$ なので

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$y'' = -\frac{1 \cdot y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{4}{y^3}$$ （与式より　$x^2 + y^2 = 4$）

(2)　$F = x^3 + xy^2 - 2 = 0$ とおくと $F_x = 3x^2 + y^2$，　$F_y = 2xy$ より

$$y' = -\frac{3x^2 + y^2}{2xy} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3x^2 + y^2}{xy}$$

$$y'' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(xy)^2}\left\{(6x + 2yy')xy - (3x^2 + y^2)(y + xy')\right\}$$

$$= \frac{-1}{2(xy)^2} \cdot \left\{6x^2y + 2y^2y'x - (3x^2 + y^2)y - (3x^2 + y^2)xy'\right\}$$

$$= \frac{-1}{2(xy)^2}\left\{(3x^2 - y^2)y - (3x^2 - y^2)xy'\right\}$$

$$= \frac{-(3x^2 - y^2)}{2x^2y^2} \cdot (y - xy') = \frac{y^2 - 3x^2}{2x^2y^2} \cdot \left(y + \frac{x}{2} \cdot \frac{3x^2 + y^2}{xy}\right)$$

$$= \frac{y^2 - 3x^2}{2x^2y^2} \cdot \frac{(2xy^2 + 3x^3 + xy^2)}{2xy} = \frac{(y^2 - 3x^2) \cdot (x^3 + xy^2) \cdot 3}{4x^3y^3}$$

$$= \frac{3(y^2 - 3x^2)}{2x^3y^3}$$ （与式より　$x^3 + xy^2 = 2$）

(3)　$F = x^3 - 3axy + y^3 = 0$

$F_x = 3x^2 - 3ay,\ \ F_y = -3ax + 3y^2$　より

$$y' = -\frac{3x^2 - 3ay}{-3ax + 3y^2} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2} \quad ㋐$$

$$y'' = \frac{1}{(ax - y^2)^2}\left\{ (2x - ay')(ax - y^2) - (x^2 - ay)(a - 2yy') \right\} \qquad (㋐より\ (ax - y^2)y' = x^2 - ay\ )$$

$$= \frac{1}{(ax - y^2)^2}\left\{ (2x - ay')(ax - y^2) - (ax - y^2)y'(a - 2yy') \right\}$$

$$= \frac{1}{ax - y^2}\left\{ 2x - ay' - ay' + 2y(y')^2 \right\} = \frac{2}{ax - y^2}\left\{ x - ay' + y(y')^2 \right\}$$

$$= \frac{2}{ax - y^2}\left\{ x \cdot \frac{(ax - y^2)^2}{(ax - y^2)^2} - a \cdot \frac{(x^2 - ay)(ax - y^2)}{(ax - y^2)^2} + y \cdot \frac{(x^2 - ay)^2}{(ax - y^2)^2} \right\}$$

(㋐より)

$$= \frac{2}{(ax - y^2)^3}\left\{ x(a^2x^2 - 2axy^2 + y^4) - a(ax^3 - x^2y^2 - a^2xy + ay^3) + y(x^4 - 2ax^2y + a^2y^2) \right\}$$

$$= \frac{2}{(ax - y^2)^3}\left\{ \cancel{a^2x^3} - 2ax^2y^2 + xy^4 - \cancel{a^2x^3} + ax^2y^2 + a^3xy - \cancel{a^2y^3} + x^4y - 2ax^2y^2 + \cancel{a^2y^3} \right\}$$

$$= \frac{2}{(ax - y^2)^3}(-3ax^2y^2 + xy^4 + x^4y + a^3xy) = \frac{2\left\{ a^3xy + xy(-3axy + y^3 + x^3) \right\}}{(ax - y^2)^3} = \frac{2a^3xy}{(ax - y^2)^3}$$

(与式より，$x^3 - 3axy + y^3 = 0$)

(4)　$F=ax^2+2cxy+by^2-1=0$ とおくと $F_x=2ax+2cy$，　$F_y=2cx+2by$ より

$y'=-\dfrac{ax+cy}{cx+by}$　…㋕　よって　$(cx+by)y'=-(ax+cy)$ であるから

$$y''=-\frac{1}{(cx+by)^2}\{(a+cy')(cx+by)-(ax+cy)(c+by')\}$$

$$=\frac{-1}{(cx+by)^2}\{(ax+cy')(cx+by)+(cx+by)y'(c+by')\}$$

$$=\frac{-1}{cx+by}\{a+cy'+cy'+b(y')^2\}$$

$$=\frac{-1}{cx+by}\left\{a\cdot\frac{(cx+by)^2}{(cx+by)^2}+c\cdot\frac{-2(ax+cy)(cx+by)}{(cx+by)^2}+b\cdot\frac{(ax+cy)^2}{(cx+by)^2}\right\}$$

（㋕より）

$$=\frac{-1}{(cx+by)^3}\{a(c^2x^2+2bcxy+b^2y^2)-2c(acx^2+abxy+c^2xy+bcy^2)+b(a^2x^2+2acxy+c^2y^2)\}$$

$$=\frac{1}{(cx+by)^3}\left(ac^2x^2+2abcxy+ab^2y^2-2ac^2x^2-\cancel{2abcxy}-2c^3xy-2bc^2y^2+a^2bx^2+\cancel{2abcxy}+bc^2y^2\right)$$

$$=\frac{-1}{(cx+by)^3}(-ac^2x^2+2abcxy+ab^2y^2-bc^2y^2-2c^3xy+a^2bx^2)$$

$$=\frac{-1}{(cx+by)^3}\{c^2(-ax^2-by^2-2cxy)+ab(2cxy+by^2+ax^2)\}$$

$$=\frac{-1}{(cx+by)^3}(-c^2+ab)$$　（与式より，$ax^2+by^2+2cxy=1$）

$$=\frac{c^2-ab}{(cx+by)^3}$$

⑴　$F = x^m + y^n - 2 = 0$ とおくと $F_x = mx^{m-1}$, $F_y = ny^{n-1}$ より

$F_x(1,\ 1) = m$, $F_y = (1,\ 1) = n$ なので，接線は $m(x-1) + n(y-1) = 0$ より

$mx + ny = m + n$

法線は $n(x-1) - m(y-1) = 0$ より $nx - my = n - m$

⑵　$F = x^m y^n - 1 = 0$ とおくと $F_x = mx^{n-1}y^n$, $F_y = x^m \cdot ny^{n-1}$ より

$F_x(1,\ 1) = m$, $F_y = (1,\ 1) = n$ なので，接線は $m(x-1) + n(y-1) = 0$ より

$mx + ny = m + n$

法線は $n(x-1) - m(y-1) = 0$ より $nx - my = n - m$

⑶　$F = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ とおくと $F_x = \dfrac{2}{a^2}x$, $F_y = \dfrac{2}{b^2}y$ より

$F_x(x_0,\ y_0) = \dfrac{2x_0}{a^2}$, $F_y(x_0,\ y_0) = \dfrac{2y_0}{b^2}$

より接線は

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

よって　$\dfrac{2x_0}{a^2}x + \dfrac{2y_0}{b^2}y = \dfrac{2}{a^2}{x_0}^2 + \dfrac{2}{b^2}{y_0}^2 = 2$

（P は楕円上にあるので，$\dfrac{{x_0}^2}{a^2} + \dfrac{{y_0}^2}{b^2} = 1$）

よって　$\dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y = 1$

法線は $\dfrac{2y_0}{b^2}(x - x_0) - \dfrac{2x_0}{a^2}(y - y_0) = 0$

よって　$\dfrac{y_0}{b^2}x - \dfrac{x_0}{a^2}y = \dfrac{x_0y_0}{b^2} - \dfrac{x_0y_0}{a^2}$

⑷　$F = y^2 - 4mx = 0$ より $F_x = -4m$，$F_y = 2y$　より

$F_x(x_0,\ y_0) = -4m$，$F_y(x_0,\ y_0) = 2y_0$ なので

接線は $-4m(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0$ で $-4mx + 2y_0 y = -4mx_0 + 2{y_0}^2$

$(x_0,\ y_0)$ は放物線上にあるので　${y_0}^2 = 4mx_0$ だから

$-4mx + 2y_0 y = -4mx_0 + 8mx_0$

よって　$y_0 y = 2m(x + x_0)$

接線は　$2mx - y_0 y = -2mx_0$

法線は　$2y_0(x - x_0) + 4m(y - y_0) = 0$ より

$2y_0 x + 4my = 2x_0 y_0 + 4my_0$ で $y_0 x + 2my = x_0 y_0 + 2my_0$

⑸　$F = xy - m = 0$ より $F_x = y$，$F_y = x$ より $F_x(x_0,\ y_0) = y_0$，$F_y(x_0,\ y_0) = x_0$

よって接線は

$y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) = 0$ より

$y_0 x + x_0 y = 2x_0 y_0$

$(x_0,\ y_0)$ は双曲線上にあるので　$x_0 y_0 = m$ である。

よって

接線は　$y_0 x + x_0 y = 2m$

法線は　$x_0(x - x_0) - y_0(y - y_0) = 0$　より　$x_0 x - y_0 y = {x_0}^2 - {y_0}^2$

⑹　$F = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ とおくと $F_x = \dfrac{2}{a^2}x$，$F_y = \dfrac{-2}{b^2}y$ なので

$F_x(x_0,\ y_0) = \dfrac{2x_0}{a^2}$，$F_y(x_0,\ y_0) = \dfrac{-2y_0}{b^2}$

よって接線は

$\dfrac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \dfrac{-2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$ より $\dfrac{2x_0}{a^2}x + \dfrac{-2y_0}{b^2}y = \dfrac{2{x_0}^2}{a^2} - \dfrac{2{y_0}^2}{b^2} = 2$

（$(x_0,\ y_0)$ は双曲線上の点なので　$\dfrac{{x_0}^2}{a^2} - \dfrac{{y_0}^2}{b^2} = l$ である。）

従って　$\dfrac{x_0}{a^2}x - \dfrac{y_0}{b^2}y = 1$

法線は　$\dfrac{-2y_0}{b^2}(x - x_0) - \dfrac{2x_0}{a^2}(y - y_0) = 0$ より $\dfrac{y_0}{b^2}x + \dfrac{x_0}{a^2}y = \dfrac{x_0 y_0}{b^2} + \dfrac{x_0 y_0}{a^2}$

(1)　$F=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$ とおくと $F_x=2(x^2+y^2)\cdot 2x-2a^2x$

$F=0,\ F_x=0$ をみたす点を求める。

$F_x=0$ より $(x^2+y^2)\cdot 2x-a^2x=x\{2(x^2+y^2)-a^2\}=0$ で $x=0$，または $2(x^2+y^2)=a^2$。

$F=0$ に代入すると $x=0$ のとき

$y^4+a^2y^2=y^2(y^2+a^2)=0$ より $y=0$。

一方　$x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2}\cdots$㋐を $F=0$ に代入すると

$\dfrac{a^4}{4}=a^2(x^2-y^2)$ より $x^2-y^2=\dfrac{a^2}{4}\cdots$㋑　　㋐＋㋑より　　$2x^2=\dfrac{3}{4}a^2$。

よって　$x^2=\dfrac{3}{8}a^2$，$a>0$ より，$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a$，$y=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}a$

以上により極値をとる候補は次の 5 点

$\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}a\right)$，$\mathrm{C}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\ \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}a\right)$，$\mathrm{D}\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}a\right)$，$\mathrm{E}\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\ \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}a\right)$

A では $F_y=0$ となるのでこれは不適として除外する。

$F_x=4(x^3+xy^2)-2a^2x$ より

$F_{xx}=4(3x^2+y^2)-2a^2$，$F_y=2(x^2+y^2)\cdot 2y+2a^2y$ より B，D のときは

$F_{xx}=4\left(3\cdot\dfrac{3}{8}a^2+\dfrac{1}{8}a^2\right)-2a^2=5a^2-2a^2$，$F_y=2\cdot\dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}a+2a^2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}a=\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}+\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}a^3$

よって　$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{3a^2}{\sqrt{2}a^3}=-\dfrac{3}{\sqrt{2}a}<0$。

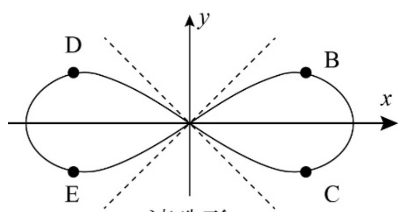
C，E のとき，F_{xx} は B，D のときと同じで

$F_y=2\cdot\dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{2}}a+2a^2\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}a=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}a^3-\dfrac{1}{\sqrt{2}}a^3=-\sqrt{2}a^3$

よって　$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{3a^2}{\sqrt{2}a^3}=\dfrac{3}{\sqrt{2}a}>0$

従って　B，D で極大値　$y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}a$

C，E で極小値　$y=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}a$



連珠形

（注意）　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ として与式を極方程式に直すと

$(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)^2=a^2(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)$　より　$r^2=a^2\cos 2\theta$ となり曲線の形を理解しやすくなる。（P24，64(2)）

(2)　$F = xy^2 - x^2y - 2a^3$ とおくと $F_x = y^2 - 2xy$，$F_y = 2xy - x^2$ である。

$F = 0$，$F_x = 0$ をみたす点を求めると

$F_x = 0$ より $y(y - 2x) = 0$ で，$y = 0$，$y = 2x$ である。$y = 0$ のとき $F = -2a^3 = 0$ となって不適。

$y = 2x$ のとき $F = 4x^3 - 2x^3 - 2a^3 = 2x^3 - 2a^3 = 0$。$a > 0$ より $x = a$。

このとき $y = 2a$。よって $(a, 2a)$ で極値をとる可能性がある。

$F_{xx} = -2y$ より $F_{xx}(a, 2a) = -4a$

$F_y(a, 2a) = 2 \cdot a \cdot 2a - a^2 = 3a^2$

より　$-\dfrac{F_{xx}}{F_y} = -\dfrac{-4a}{3a^2} = \dfrac{4}{3a} > 0$　だから $x = a$ のとき極小値 $y = 2a$ をとる。

108

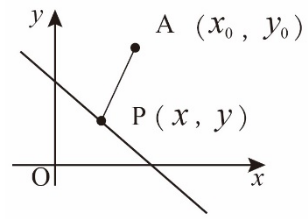
条件 $g(x, y) = ax + by + c = 0$ のもと AP の長さの 2 乗 $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ の最小値を求める。

$f_x = 2(x - x_0)$，$f_y = 2(y - y_0)$

$g_x = a$，$g_y = b$ なのでラグランジュの乗数 λ を用いると，極値をとる点 (x, y) では $\boxed{教}$ P.119④⑤より

$2(x - x_0) - \lambda a = 0$　かつ　$2(y - y_0) - \lambda b = 0$ をみたす必要がある。（λ はラグランジュの乗数）

つまり $x - x_0 = \dfrac{a\lambda}{2}$，$y - y_0 = \dfrac{b\lambda}{2}$ より $(x, y) = \left(x_0 + \dfrac{a\lambda}{2},\ y_0 + \dfrac{b\lambda}{2}\right)$　……㋐のとき



$f(x, y) = \left(\dfrac{a\lambda}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{b\lambda}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{4}\lambda^2$　　㋐

ここで λ は，㋐が条件 $g(x, y) = 0$ をみたすことより

$a\left(x_0 + \dfrac{a\lambda}{2}\right) + b\left(y_0 + \dfrac{b\lambda}{2}\right) + c = 0$ だから $ax_0 + by_0 + c = -\dfrac{a^2 + b^2}{2}\lambda$ で

$\lambda = \dfrac{-(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \cdot 2$　㋐より　$\dfrac{a^2 + b^2}{4} \cdot \dfrac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} \cdot 4$

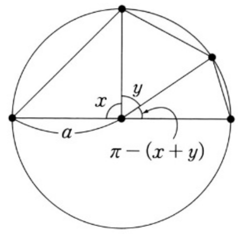
が極値の候補だが，いま，極値があり，それが最小値であることが分っている。

よって答は　$\dfrac{|\, ax_0 + by_0 + c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$　（a，b は同時に 0 とならない。）

109

円の半径を a とし，直径以外の 3 辺の各内角の大きさを x，y，$\pi-(x+y)$ とする。

このとき四角形の面積 $f(x,\ y)$ は



$$f(x,\ y)=\frac{a\cdot a\sin x}{2}+\frac{a\cdot a\sin y}{2}+\frac{a\cdot a\sin(\pi-(x+y))}{2}$$

$$=\frac{a^2\{\sin x+\sin y+\sin(x+y)\}}{2}$$

よって問題 103⑴と同じ問題になる。その解答より $\sin x+\sin y+\sin(x+y)$

（$0<x<\pi,\ 0<y<\pi$）は $(x,\ y)\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき極大値をとる。

よって　$x=y=\dfrac{\pi}{3}$ のとき面積は最大値をとる。従って答は，弧の 3 等分点を頂点

とする等脚台形である。（面積は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$）

110

3 辺の長さを x，y，$k-(x+y)$ とすると

(i)　直方体の体積は $f(x,\ y)=xy(k-x-y)=kxy-x^2y-xy^2$ であり

$$f_x=ky-2xy-y^2=0 \quad \cdots ㋐$$

$$f_y=kx-x^2-2xy=0 \quad \cdots ㋑$$

とおくと㋐－㋑より

$k(y-x)-(y-x)(y+x)=(y-x)\{k-(y+x)\}=0$ で

$y=x$ または $k=x+y$ 。後者では直方体ができず不適。前者では㋐より $x=y=\dfrac{1}{3}k$ となる。

$f_{xx}=-2y$，$f_{xy}=k-2x-2y$，$f_{yy}=-2x$ より

$\mathrm{H}\left(\dfrac{k}{3},\ \dfrac{k}{3}\right)=\left(\dfrac{-2}{3}k\right)^2-\left(k-\dfrac{4}{3}k\right)^2=\dfrac{k^2}{3}>0$　となり $f(x,\ y)$ は $\left(\dfrac{k}{3},\ \dfrac{k}{3}\right)$ で極値

$f\left(\dfrac{k}{3},\ \dfrac{k}{3}\right)=\dfrac{k^3}{27}$ をとり $f_{xx}\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}k<0$ よりそれは極大値。

つまり，一辺 $\dfrac{k}{3}$ の立方体のとき体積は最大であり，その値は $\dfrac{k^3}{27}$ である。

（注意）　前問と同様 3 辺の長さを x，y，z とし条件 $g(x,\ y,\ z)=x+y+z-k=0$ のもと
$f(x,\ y,\ z)=xyz$ の最大を考えてもよい。（←P.37 例題４）

（注意）　相加平均と相乗平均の関係より x，y，z が正数のとき

$$\frac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{xyz}$$

今 $x+y+z=k$ より $\dfrac{k^3}{27}\geqq xyz$ として $x=y=z=\dfrac{k}{3}$ のとき $f(x,\ y,\ z)=xyz$ の最大は $\dfrac{k^3}{27}$ であるとしてもよい。

(ii)　直方体の表面積は

$$f(x,\ y) = 2\left\{ xy + x(k-x-y) + y(k-x-y) \right\}$$

$$= 2\left\{ \cancel{xy} + kx - x^2 - \cancel{xy} + ky - xy - y^2 \right\}$$

$$= 2\left\{ -x^2 - xy - y^2 + kx + ky \right\}$$

よって　$f_x = 2(-2x - y + k) = 0$　㋐

$f_y = 2(-x - 2y + k) = 0$　㋑

となるのは　㋐－㋑　より　$2(-x+y)=0$

つまり $x = y$ のとき

このとき，㋐より　$3x - k$　つまり　$x = \dfrac{k}{3}$，$y = \dfrac{k}{3}$

$f_{xx} = -4$，$f_{xy} = -2$，$f_{yy} = -4$　より

$$\mathrm{H}\left(\frac{k}{3}\ \ \frac{k}{3} \right) = (-4)^2 - (-2)^2 = 12 > 0$$

よって　$f(x,\ y)$ は　$\left(\dfrac{k}{3},\ \dfrac{k}{3} \right)$　で極値をとる。

その値は

$$f\left(\frac{k}{3},\ \frac{k}{3} \right) = 2\left\{ -\frac{k^2}{9} - \frac{k^2}{9} - \frac{k^2}{9} + \frac{k^2}{3} + \frac{k^2}{3} \right\}$$

$$= 2\left(-\frac{1}{3}k^2 + \frac{2}{3}k^2 \right)$$

$$= \frac{2}{3}k^2$$

$f_{xx}\left(\dfrac{k}{3},\ \dfrac{k}{3} \right) = -4 < 0$　よりこれは極大値

従って，一辺 $\dfrac{k}{3}$ の立方体のとき表面積は最大であり，その値は $\dfrac{2}{3}k^2$ である。

111

円の半径を k とし三角形の各辺の中心角を x，y，$2\pi - x - y$ とする。

三角形の面積 $f(x,\ y) = \dfrac{1}{2}k \cdot k\sin x + \dfrac{1}{2}k \cdot k\sin y$

$$+\frac{1}{2}k \cdot k\sin(2\pi - (x+y))$$

$$= \frac{k^2}{2}(\sin x + \sin y - \sin(x+y))$$ より

$$f_x = \frac{k^2}{2}(\cos x - \cos(x+y)) = 0 \quad \cdots\cdots ㋐$$

$$f_y = \frac{k^2}{2}(\cos y - \cos(x+y)) = 0 \quad \cdots\cdots ㋑$$

となるのは　$\cos x = \cos y$ のときで各辺の中心角が π 以下であることから $0 < x \leqq \pi$，$0 < y \leqq \pi$　㋒であり

$x = y$　㋐より

$\cos x - \cos 2x = \cos x - (2\cos^2 x - 1) = \cos x - 2\cos^2 x + 1$

$$= -(2\cos^2 x - \cos x - 1) = -(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

となるのは $\cos x = 1,\ -\dfrac{1}{2}$ のとき。

㋒より $x = \dfrac{2}{3}\pi$　よって $y = \dfrac{2}{3}\pi$ である。このとき

$$f_{xx} = \frac{k^2}{2}(-\sin x + \sin(x+y)) = \frac{k^2}{2}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} = \frac{-\sqrt{3}}{2}k^2$$

$$f_{yy} = \frac{k^2}{2}(-\sin y + \sin(x+y)) = \frac{k^2}{2}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} = \frac{-\sqrt{3}}{2}k^2$$

$$f_{xy} = \frac{k^2}{2}\sin(x+y) = \frac{k^2}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}k^2$$

よって　$\mathrm{H}\left(\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi\right) = \left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}k^2\right)^2 - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}k^2\right)^2 = \dfrac{3}{4}k^4 - \dfrac{3}{16}k^4$

$$= \frac{k^4}{4}\left(3 - \frac{3}{4}\right) > 0$$ より極値 $f\left(\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$

$$= \frac{k^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}k^2$$ をとる。

$f_{xx}\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{k^2}{2}\cdot\left(-\sqrt{3}\right) < 0$ よりこれは極大値である。

よって正三角形のとき面積は最大であり，その値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}k^2$ である。

（注意）注　各辺の内角を x，y，z とし，条件 $g(x,\ y,\ z) = x + y + z - 2\pi$ のもとで

$f(x,\ y,\ z) = \dfrac{k^2}{2}(\sin x + \sin y + \sin z)$ の最大を考えてもよい。（←P.37 例題 4）

112

縦，横，高さを各々x，y，zとすると$xyz = k$の仮定から$z = \dfrac{k}{xy}$であり

表面積$f(x,\ y) = xy + 2x \cdot \dfrac{k}{xy} + 2y \cdot \dfrac{k}{xy} = xy + 2k\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right)$

$f_x = y + 2k(-x^{-2}) = 0$　……㋐

$f_y = x + 2k(-y^{-2}) = 0$　のとき　$y = \dfrac{2k}{x^2}$，$x = \dfrac{2k}{y^2}$ より $x^2 y = xy^2$

よって$xy(x - y) = 0$　従って　$x = y$　　㋐より$x = y = \sqrt[3]{2k}$である。

$f_{xx} = 2k \cdot 2x^{-3}$，$f_{xy} = 1$，$f_{yy} = 2k \cdot 2y^{-3}$ より

$\mathrm{H}\left(\sqrt[3]{2k},\ \sqrt[3]{2k}\right) = \left(4k \cdot \dfrac{1}{2k}\right)^2 - 1 > 0$　より　f　は　$\left(\sqrt[3]{2k},\ \sqrt[3]{2k}\right)$で極値

$f\left(\sqrt[3]{2k},\ \sqrt[3]{2k}\right) = \left(\sqrt[3]{2k}\right)^2 + 2k \cdot \dfrac{2}{\sqrt[3]{2k}} = 3\left(\sqrt[3]{2k}\right)^2$をとる。

$f_{xx}\left(\sqrt[3]{2k},\ \sqrt[3]{2k}\right) = 2 > 0$　よりこれは極小値。

またこのとき　$z = \dfrac{k}{\left(\sqrt[3]{2k}\right)^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2k}{\left(\sqrt[3]{2k}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$

よって縦$\sqrt[3]{2k}$，横$\sqrt[3]{2k}$，高さ$\dfrac{\sqrt[3]{2k}}{2}$のとき表面積は最小であり，その値は$3\left(\sqrt[3]{2k}\right)^2$である。

（注意）　$g(x,\ y,\ z) = xyz - k = 0$の条件のもと

$f(x,\ y,\ z) = xy + 2xz + 2yz$の最小を考えてもよい。（←P.37　例題 4）

113

$f(x,\ y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)$　に対し

$f_x = 2(x^2 + y^2) \cdot 2x - 2a^2 \cdot 2x$

$= 4x(x^2 + y^2 - a^2) = 0$　……㋐

同様に　$f_y = 4y(x^2 + y^2 + a^2) = 0$　……㋑

とすると「$x = 0$　または　$x^2 + y^2 = a^2$」かつ「$y = 0$　または　$x^2 + y^2 = -a^2$」なので

$(x,\ y) = (0,\ 0), (a,\ 0), (-a,\ 0)$　のときに極値をとる可能性あり。

$f_{xx} = 4(x^2 + y^2 - a^2) + 4x \cdot 2x$

$f_{yy} = 4(x^2 + y^2 + a^2) + 4y \cdot 2y$

$f_{xy} = 4x \cdot 2y$　より

$\mathrm{H}(0,\ 0) = -4a^2 \cdot 4a^2 < 0$ よりfは$(0,\ 0)$で極値をとらない。

$\mathrm{H}(\pm a,\ 0) = 8a^2 \cdot 8a^2 - 0 = 64a^4 > 0$ よりfは$(\pm a,\ 0)$で

極値$f(\pm a,\ 0) = a^4 - 2a^2 \cdot a^2 = -a^4$をとる。

$f_{xx}(\pm a,\ 0) = 8a^2 > 0$ よりこれは極小値

$z = f(x,\ y) = x^2 + xy + y^2$ とする。

$f_x = 2x + y = 0,\ \ f_y = x + 2y = 0$ とすると $(x,\ y) = (0,\ 0)$

$f_{xx} = 2,\ \ f_{xy} = 1,\ \ f_{yy} = 2$ より $\mathrm{H}(0,\ 0) = 2 \times 2 - 1^2 > 0$

よって f は $(0,\ 0)$ で極値 $f(0,\ 0) = 0$ をとる。

$f_{xx}(0,\ 0) = 2 > 0$ よりこれは極小値　……㋐

一方，$g(x,\ y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$　……㋑　としてこの条件のもと f の極値を求める。

f が極値をとる点（x，y）では

$$g_x = 2x,\ g_y = 2y \quad \text{より} \quad \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \quad \text{つまり} \quad \frac{2x+y}{2x} = \frac{x+2y}{2y} = \lambda \quad \text{（ラグランジュの乗数）}$$

より $4xy + 2y^2 = 2x^2 + 4xy$ が成り立つ必要がある。

よって　$y^2 - x^2 = 0$　従って $y = \pm x$　で㋑に代入して　$2x^2 = 1$。

よって　$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　従って $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき極値をとる可能性がある。

$x^2 + y^2 = 1$ の条件のもとでは f が最大最小をとることを既知として次の値は最大値と最小値である。…㋒

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

㋐ ㋒ より $x^2 + y^2 \leqq 1$ をみたす点については $(x,\ y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ で最大値 $\dfrac{3}{2}$ をとり，

$(x,\ y) = (0,\ 0)$ で最小値 0 をとる。

発展問題

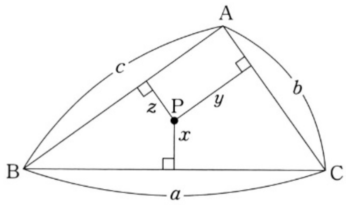
115

△ABCについて3辺の長さを各々BC = a，CA = b，AB = cとおく。

また，三角形内部の一点Pから BC，CA，ABにおろした垂線の長さを各々x，y，zとおく。

今，△ABC = k（一定値）とおくと△ABC = $\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}by + \frac{1}{2}cz = k$ であり $z = (2k - ax - by)\frac{1}{c}$　…＊

従って題意の距離の平方和を$f(x,\ y)$とおくと



$$f(x,\ y) = x^2 + y^2 + \frac{(2k - ax - by)^2}{c^2}$$

$$f_x = 2x + \frac{2}{c^2}(2k - ax - by)(-a),\ f_y = 2y + \frac{2}{c^2}(2k - ax - by)(-b)$$

について$f_x = f_y = 0$となるのは

$2c^2x + 2(-2ak + a^2x + aby) = 0$　かつ　$2c^2y + 2(-2bk + abx + b^2y) = 0$ より

$c^2x - 2ak + a^2x + aby = 0$　……㋐

$c^2y - 2bk + abx + b^2y = 0$　……㋑

㋐×b−㋑×a　を行うと

$bc^2x - 2abk + a^2bx + ab^2y = 0$

$ac^2y - 2abk + a^2bx + ab^2y = 0$ より

$c^2(bx - ay) = 0$

よって　$bx = ay$。これを㋐に代入して　$c^2x - 2ak + a^2x + b^2x = 0$　よって

$$x = \frac{2ak}{a^2 + b^2 + b^2}\quad ……㋒$$

同様に　$bx = ay$を㋑に代入して　$c^2y - 2bk + a^2y + b^2y = 0$ より

$$y = \frac{2bk}{a^2 + b^2 + c^2}\quad ……㋓$$

$$f_{xx} = 2 + \frac{2}{c^2}(-a)(-a)$$

$$f_{xy} = \frac{2}{c^2}(-b)(-a)$$

$$f_{yy} = 2 + \frac{2}{c^2}(-b)(-b)\quad より$$

$$\mathrm{H}\left(\frac{2ak}{a^2 + b^2 + c^2},\ \frac{2bk}{a^2 + b^2 + c^2}\right) = \left(2 + \frac{2a^2}{c^2}\right)\left(2 + \frac{2b^2}{c^2}\right) - \left(\frac{2ab}{c^2}\right)^2$$

$$= 4 + \frac{4b^2}{c^2} + \frac{4a^2}{c^2} + \frac{4a^2b^2}{c^4} - \frac{4a^2b^2}{c^4} > 0$$

なのでfは㋒，㋓の$(x,\ y)$において極値

$$f(x,\ y) = \left(\frac{2ak}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{2bk}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{2ck}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2\quad をとる。$$

［なぜなら＊より x，y が各々㋒，㋓で

$$z=\frac{1}{c}\left(2k-\frac{2a^2k}{a^2+b^2+c^2}-\frac{2b^2k}{a^2+b^2+c^2}\right)=\frac{2ck}{a^2+b^2+c^2}\quad\cdots\cdots㋔$$
］

$f_{xx}=2+\dfrac{2a^2}{c^2}>0$ よりこれは極小値である。

$f(x,\ y)$ は x，y の 2 次式であるからこれが最小値である。

以上により $f(x,\ y)$ が最小となる点 P は，辺 BC，CA，AC からの距離が各々①，②，③であるような位置である。

$$x=\frac{2ak}{a^2+b^2+c^2}\quad\cdots\cdots①$$

$$y=\frac{2bk}{a^2+b^2+c^2}\quad\cdots\cdots②$$

$$z=\frac{4ck}{a^2+b^2+c^2}\quad\cdots\cdots③$$

別解　$g(x,\ y,\ z)=ax+by+cz-2k=0$ の条件のもと $f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2$ の最小を考えてもよい。

f が極値をとる点（x，y，z）では $\dfrac{f_x}{g_x}=\dfrac{f_y}{g_y}=\dfrac{f_z}{g_z}$ をみたす必要がある。（P.38 例題 4）

$f_x=2x$，$f_y=2y$，$f_z=2z$，$g_x=a$，$g_y=b$，$g_z=c$ より $\dfrac{2x}{a}=\dfrac{2y}{b}=\dfrac{2z}{c}=\lambda$

条件 $g=0$ に代入して　$ax+b\cdot\dfrac{b}{a}x+c\cdot\dfrac{c}{a}x-2k=0$　$x=\dfrac{2ak}{a^2+b^2+c^2}$

同様にして　$y=\dfrac{2bk}{a^2+b^2+c^2}$，$z=\dfrac{2ck}{a^2+b^2+c^2}$

辺 BC，CA，AC からの距離が各々これらの x，y，z である点 P が f を最小にする。

△ABC の面積を k，BC $=a$，CA $=b$，AB $=c$ としたとき，

辺 BC，CA からの距離がそれぞれ $\dfrac{2ak}{a^2+b^2+c^2}$，$\dfrac{2bk}{a^2+b^2+c^2}$ となる点

3 辺の長さが x，y，z のとき仮定より $x+y+z=2k$（一定値）

よってヘロンの公式より　　（←「新版基礎数学（改訂版）」）P.157

$$\triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{k(k-x)(k-y)(x+y-k)}$$

そこで

$f(x,\ y)=(k-x)(k-y)(x+y-k)$ が最大になる x，y を求める。

$$f_x=(-1)(k-y)(x+y-k)+(k-x)(k-y)$$
$$=(k-y)(-x-y+k+k-x)=(k-y)(2k-y-2x)=0$$
$$f_y=(-1)(k-x)(x+y-k)+(k-x)(k-y)$$
$$=(k-x)(-x-y+k+k-y)=(k-x)(2k-x-2y)=0$$

とすると　$k=y$ または $y+2x=2k$　かつ　$k=x$ または $x+2y=2k$

今，$k \fallingdotseq x$，$k \fallingdotseq y$ より　$y+2x=x+2y$　　よって $x=y$

従って $3x=2k$，$x=\dfrac{2}{3}k=y$

$$f_{xx}=(k-y)(-2)$$
$$f_{xy}=(-1)(2k-y-2x)+(k-y)(-1)$$
$$=-2k+y+2x-k+y=2x+2y-3k$$
$$f_{yy}=(k-x)(-2)$$ より

$\mathrm{H}\left(\dfrac{2}{3}k,\ \dfrac{2}{3}k\right)=\left\{\dfrac{k}{3}\cdot(-2)\right\}^2-\left(-\dfrac{k}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}k^2-\dfrac{1}{9}k^2>0$ で f は $\left(\dfrac{2}{3}k,\ \dfrac{2}{3}k\right)$ で

極値 $f\left(\dfrac{2k}{3},\ \dfrac{2k}{3}\right)=\dfrac{1}{3}k\cdot\dfrac{1}{3}k\cdot\dfrac{1}{3}k=\dfrac{1}{27}k^3$ をとり

$f_{xx}\left(\dfrac{1}{3}k,\ \dfrac{1}{3}k\right)=-\dfrac{2}{3}k<0$ よりこれは極大値。よって $\left(\dfrac{2}{3}k,\ \dfrac{2}{3}k\right)$ のとき，つまり正三角形のとき面積は最大になる。

別解　$x+y+z=2k$（一定）のとき $\triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{k(k-x)(k-y)(k-z)}$　……㋐の最大を求める為，

条件 $g(x,\ y)=x+y+z-2k=0$ のもと $f(x,\ y)=(k-x)(k-y)(k-z)$ が極値をとる（x，y，z）を調べる。（←P.37 例題 4）

$$f_x=-(k-y)(k-z)$$
$$f_y=-(k-x)(k-z)$$
$$f_z=-(k-x)(k-y)$$
$g_x=1$，$g_y=1$，$g_z=1$ より

$$\frac{-(k-y)(k-z)}{1}=\frac{-(k-x)(k-z)}{1}=\frac{-(k-x)(k-y)}{1}=\lambda$$ で

㋐より $x \fallingdotseq k$，$y \fallingdotseq k$，$z \fallingdotseq k$ なので

$k-y=k-x$　かつ　$k-z=k-y$。

よって $x=y=z$。$g=0$ に代入して　$x=y=z=\dfrac{2}{3}k$　すなわち正三角形のとき f

つまり△ABC は最大となりその値は $\sqrt{k\cdot\dfrac{k}{3}\cdot\dfrac{k}{3}\cdot\dfrac{k}{3}}=\dfrac{k^2}{3\sqrt{3}}$。

注　問題 110 の解答の（注意）と同様，相加平均，相乗平均の関係式，正数 a，b，c に対し

$\dfrac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc}$（等号成立は $a=b=c$ のとき）を用いてもよい。

㋐で $k-x$，$k-y$，$k-z$ は正数なので

$\{(k-x)+(k-y)+(k-z)\}\times\dfrac{1}{3}\geqq\sqrt[3]{(k-x)+(k-y)+(k-z)}$ より

$\dfrac{k}{3}\geqq\sqrt[3]{(k-x)(k-y)(k-z)}$，等号成立は $k-x=k-y=k-z$ のとき。

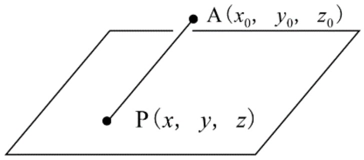
つまり $x=y=z$ のとき。従って $x=y=z=\dfrac{2}{3}k$ の正三角形のとき

△ABC は最大値 $\sqrt{k\cdot\left(\dfrac{k}{3}\right)^3}=\dfrac{k^2}{3\sqrt{3}}$ をとる。

117

問題 108 の解答と同様の方法をとればよい。

定点 A$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と平面上の一点 P$(x,\ y,\ z)$ との距離の 2 乗 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = f(x,\ y,\ z)$ の最小を条件 $g(x,\ y,\ z) = ax+by+cz+d = 0$ のもとで考える。



$f_x = 2(x-x_0)$, $f_y = 2(y-y_0)$

$f_z = 2(z-z_0)$, $g_x = a$, $g_y = b$, $g_z = c$ より f が極値をとる$(x,\ y,\ z)$では

$\dfrac{f_x}{g_x} = \dfrac{f_y}{g_y} = \dfrac{f_z}{g_z} = \lambda$ をみたす必要があるので（P.37 例題 4）

$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad f_z = \lambda g_z$ より

$2(x-x_0) - \lambda a = 0$ かつ $2(y-y_0) - \lambda b = 0$ かつ $2(z-z_0) - \lambda c = 0$

をみたす必要がある。（λ はラグランジュの乗数）

よって

$$x = x_0 + \frac{a\lambda}{2},\quad y = y_0 + \frac{b\lambda}{2},\quad z = z_0 + \frac{c\lambda}{2} \quad \cdots ㋐$$

これらを $f(x,\ y,\ z)$ に代入して

$$f = \left(\frac{a\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{c\lambda}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}\cdot\lambda^2 \quad \cdots ㋑$$

㋐を $g(x,\ y,\ z) = 0$ に代入すると

$$ax_0 + \frac{a^2\lambda}{2} + by_0 + \frac{b^2\lambda}{2} + cz_0 + \frac{c^2\lambda}{2} + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2}\lambda + d = 0$$

よって $\dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}$ よって㋑より $\dfrac{(ax_0+by_0+cz_0+d)^2}{a^2+b^2+c^2}$ が極値の候補だが，今 f には極値がありそれが最小値であることが分っているので答は

$$\frac{|\ ax_0+by_0+cz_0+d\ |}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

（与式より a，b，c は同時に 0 とならない。）

３章の問題

1

⑴ $f_x(1,\ 2) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h,\ 2) - f(1,\ 2)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h)\cdot 4 - 1\cdot 4}{h} = 4$

$f_y(1,\ 2) = \lim_{k\to 0}\dfrac{f(1,\ 2+k) - f(1,\ 2)}{k}$

$= \lim_{k\to 0}\dfrac{1\cdot(4+4k+k^2) - 4}{k} = \lim_{k\to 0}(4+k) = 4$

⑵ $z_x = \cos xy \times (xy)_x = y\cos xy$

$z_y = \cos xy \times (xy)_y = x\cos xy$

⑶ $z_x = 9x^2 + 4y,\ z_y = 4x - 10y$ より $z_{xx} = 18x,\ z_{xy} = z_{yx} = 4,\ z_{yy} = -10$

⑷ $z_u = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cdot 1 + \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cdot 1 = \dfrac{2(u+v)+2(u-2v)}{(u+v)^2+(u-2v)^2}$

$= \dfrac{2u+2v+2u-4v}{u^2-2uv+v^2+u^2-4uv+4v^2} = \dfrac{4u-2v}{2u^2-2uv+5v^2}$

$z_v = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cdot 1 + \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cdot(-2) = \dfrac{2(u+v)-4(u-2v)}{x^2+y^2}$

$= \dfrac{-2u+10v}{2u^2-2uv+5v^2}$

2

⑴ $z_x = e^{-\frac{y}{x}}\cdot(-yx^{-1})_x = e^{-\frac{y}{x}}\cdot yx^{-2} = \dfrac{e^{-\frac{y}{x}}y}{x^2}$

$z_y = e^{-\frac{y}{x}}\cdot\left(-\dfrac{y}{x}\right)_y = e^{-\frac{y}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{e^{-\frac{y}{x}}}{x}$

⑵ $z_x = 2x + 4y,\ z_{xx} = 2$

$z_y = 3 + 4x$ より $z_{xy} = 4$

⑶ $z_u = -\sin(2x+y)\cdot 2\cdot 1 - \sin(2x+y)\cdot 2u$

$= -\sin(2u+u^2-v)\cdot(2+2u) = -2(u+1)\sin(2u+u^2-v)$

$z_v = -\sin(2x+y)\cdot 2\cdot 0 - \sin(2x+y)\cdot(-1)$

$= \sin(2x+y)$

$= \sin(2u+u^2-v)$

3

⑴　$f_x = 3y + 6x^2$，$f_y = 3x - 1$

⑵　$f_{xx} = 12x$，$f_{xy} = 3$　より　$f_{xx}(1,\ 1) = 12$，$f_{xy}(1,\ 1) = 3$

⑶　$z_x = 3x^2 - 3y^2$，$z_y = -6xy$　より　$\Delta z \fallingdotseq (3x^2 - 3y^2)\Delta x - 6xy\Delta y$

⑷　$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = z_u \cdot 3 + z_v \cdot 5$

4

⑴　$f_x = 2x - 6y + 2 = 0$　かつ　$f_y = -6x + 20y - 10 = 0$ となるのは

$x - 3y + 1 = 0$　……㋐　　かつ

$-3x + 10y - 5 = 0$　……㋑　　㋐より $3x - 9y + 3 = 0$　……㋐′　　㋑＋㋐′　で

$y - 2 = 0$　よって $y = 2$

㋐より $x = 5$　　よって答は$(5,\ 2)$

⑵　$f_{xx} = 2$，$f_{xy} = -6$，$f_{yy} = 20$ より $\mathrm{H}(5,\ 2) = 2 \times 20 - (-6)^2 = 4 > 0$ より f は$(5,\ 2)$で

極値 $f(5,\ 2) = 25 - 6 \times 10 + 40 + 10 - 20 = -5$ をとる。

$f_{xx}(5,\ 2) = 2 > 0$ よりこれは極小値。

5

⑴　$z = xy^{-2}$ より $z_x = y^{-2}$，

$z_y = x \cdot (-2y^{-3}) = -2xy^{-3}$　より

$z_{xx} = 0$，$z_{xy} = -2y^{-3} = \dfrac{-2}{y^3}$

$z_{yx} = -2y^{-3} = \dfrac{-2}{y^3}$，$z_{yy} = -2x \cdot (-3y^{-4}) = \dfrac{6x}{y^4}$

⑵　$z = f(x,\ y)$とおく。　(←P.35 $\boxed{2}$)

(i)　$f_x = 2x = 0$，$f_y = -3y^2 = 0$ となるのは$(x,\ y) = (0,\ 0)$のとき。

$f_{xx} = 2$，$f_{xy} = 0$，$f_{yy} = -6y$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0) = 2 \times 0 - 0^2 = 0$

$x = 0$ のとき $z = -y^3$ なので z は y の増加につれ$(0,\ 0)$において正から負に変化する。

よって f は$(0,\ 0)$で極値をとらない。

(ii)　$f_x = -2x = 0$，$f_y = -2y = 0$ となるのは$(x,\ y) = (0,\ 0)$のとき。

$f_{xx} = -2$，$f_{xy} = 0$，$f_{yy} = -2$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0) = (-2)^2 > 0$ なので f は$(0,\ 0)$で極値 $f(0,\ 0) = 0$ をとる。

$f_{xx}(0,\ 0) = -2 < 0$ よりこれは極大値である。

(iii)　$f_x = 2x = 0$，$f_y = -4y^3 = 0$ となるのは$(x,\ y) = (0,\ 0)$のとき。

$f_{xx} = 2$，$f_{xy} = 0$，$f_{yy} = -12y^2$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0) = 2 \times 0 - 0^2 = 0$

$x = 0$ のとき $z = -y^4$ より f は$(0,\ 0)$で極大となっているが，$y = 0$ のとき $z = x^2$ より

f は$(0,\ 0)$で極小となっているので f は$(0,\ 0)$で極値をとらない。

(iv)　$f_x = 4x^3 = 0$，$f_y = 2y = 0$ となるのは$(x,\ y) = (0,\ 0)$のとき。

$f_{xx} = 12x^2$，$f_{xy} = 0$，$f_{yy} = 2$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0) = 0 \times 2 - 0^2 = 0$

$z = f(x,\ y)$は$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$のとき $z > 0$，$(x,\ y) = (0,\ 0)$のとき $z = 0$ なので f は$(0,\ 0)$で極小値 0 をとる。

⑶　$z = f(x,\ y) = x^2y^3$ とおくと $f_x = 2x \cdot y^3,\ f_y = x^2 \cdot 3y^2$ より

$\varDelta z \fallingdotseq f_x(1,\ 1)\varDelta x + f_y(1,\ 1)\varDelta y$

$= 2 \times 0.02 + 3 \times 0.01 = 0.07$

6

⑴　$f_x = 3x^2 - y,\ f_y = -x + 3y^2,\ f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = -1,\ f_{yy} = 6y$

⑵　$3x^2 - y = 0,\ -x + 3y^2 = 0$ のとき　$y = 3x^2$　より　$-x + 3 \cdot 9x^4 = 0$

$-x(1 - 27x^3) = 0$　よって　$x = 0,\ \dfrac{1}{3}$　従って　$(x,\ y) = (0,\ 0),\ \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

⑶　f が極値をとる可能性がある点（$x,\ y$）は⑵の 2 点のみである。

$\mathrm{H}(x,\ y) = 6x \cdot 6y - (-1)^2$　であるから

$\mathrm{H}(0,\ 0) = 0 \times 0 = -1$

$\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right) = 2 \times 2 - 1 = 3$

⑷　$\mathrm{H}(0,\ 0) = -1 < 0$　より（$0,\ 0$）で極値をとらない。

$\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right) > 0$　より　$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ で極値をとる。

その値は $f\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} = -\dfrac{1}{27}$

⑸　$f_{xx}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right) = 6 \times \dfrac{1}{3} > 0$　より極小値である。

⑹　$f_x(1,\ 1) = 2,\ f_y(1,\ 1) = 2$　より　$z - 1 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$

⑺　$\varDelta z \fallingdotseq 2(1.01 - 1) + 2(1.02 - 1) = 0.02 + 0.04 = 0.06$

7

⑴　$F(x,\ y)=x^2(x+2)-y^2=0$ とおくと $F_x=3x^2+4x,\ \ F_y=-2y$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(3x^2+4x)}{-2y}=\frac{3x^2+4x}{2y}\quad ㋐$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(6x+4)y-(3x^2+4x)y'}{y^2}\qquad（公式 \boxed{23}）$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(6x+4)2y^2-(3x^2+4x)^2}{2y^3}\qquad（㋐を代入）$$

$$=\frac{(6x+4)\cdot 2x^2(x+2)-(9x^4+24x^3+16x^2)}{4y^3}\qquad（与式を代入）$$

$$=\frac{2x^2(6x^2+16x+8)-9x^4-24x^3-16x^2}{4y^3}=\frac{3x^4+8x^3}{4y^3}$$

⑵　$x=-1$ のとき $y^2=x^2(x+2)=1$　よって $y=\pm 1$

(i)　$(x,\ y)=(-1,\ 1)$ では　$F_x=(-1,\ 1)=-1,\ \ F_y(-1,\ 1)=-2$

よって　$(-1)(x+1)-2(y-1)=0$

$-x-1-2y+2=0$　つまり　$x+2y-1=0$ が接線

一方　$(-2)(x+1)+(y-1)=0$

つまり　$2x-y+3=0$ が法線

(ii)　$(x,\ y)=(-1,\ -1)$ では　$F_x=(-1,\ -1)=-1,\ \ F_y(-1,\ -1)=2$

よって　$(-1)(x+1)+2(y+1)=0$

つまり　$x-2y-1=0$ が接線の方程式

$2(x+1)+(y+1)=0$

つまり　$2x+y+3=0$ が法線の方程式

⑶　$(-1,\ 1)$ では⑴より　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3-8}{4}<0$　より上に凸,

$(-1,\ -1)$ では　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3-8}{-4}>0$　より下に凸。

⑷　⑴より $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2+4x}{2y}=\dfrac{x(3x+4)}{2y}=0$ となるのは　$x=-\dfrac{4}{3}$ のとき。

（$x=0$ のときは $y=0$ となり不適）

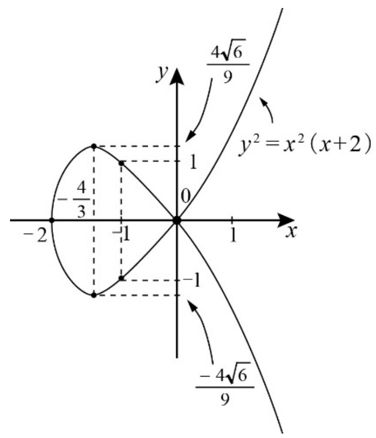
このとき $y^2=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2\left(-\dfrac{4}{3}+2\right)=\dfrac{16}{9}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{32}{27}$

よって　$y=\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$　　従って $(x,\ y)=\left(-\dfrac{4}{3},\ \pm\dfrac{4}{9}\sqrt{6}\right)$

(5)

$(x,\ y)=\left(-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{9}\sqrt{6}\right)$のとき

$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{6\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)}{-2\times\dfrac{4\sqrt{6}}{9}}<0$ より 極大値をとり，値は$y=\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$である。



$(x,\ y)=\left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{9}\sqrt{6}\right)$のとき

$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{6\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)}{-2\times\left(\dfrac{-4\sqrt{6}}{9}\right)}>0$より極小値をとり，値は$y=\dfrac{-4\sqrt{6}}{9}$である。

8

⑴　$f_x = 10x - 6y = 0$

$f_y = -6x + 10y = 0$ となるのは $(x,\ y) = (0,\ 0)$ のとき

$f_{xx} = 10,\ f_{xy} = -6,\ f_{yy} = 10$ より $H(0,\ 0) = 10^2 - (-6)^2 = 64 > 0$ であり

極値 $f(0,\ 0) = -4$ をとる。$f_{xx}(0,\ 0) = 10 > 0$ より極小値である。

⑵　)

$g(x,\ y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ とおくと $g_x = 2x,\ g_y = 2y$ なので極値をとる点 $(x,\ y)$ では $\dfrac{f_x}{g_x} = \dfrac{f_y}{g_y} (= \lambda)$

つまり　$\dfrac{10x - 6y}{2x} = \dfrac{-6x + 10y}{2y} (= \lambda)$　……㋐

の成立することが必要である。（λ はラグランジュの乗数）

㋐より $5xy - 3y^2 = -3x^2 + 5xy$　よって　$y = \pm x$。

条件式 $g = 0$ に代入して $x^2 = \dfrac{1}{2}$ であり $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

よって f は次の 4 点で極値をとる可能性がある。

$(x,\ y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

このとき　$f\left(\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{5}{2} - \dfrac{6}{2} + \dfrac{5}{2} - 4 = \dfrac{4}{2} - 4 = -2$ （複号同順）

$f\left(\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{\mp 1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{5}{2} + \dfrac{6}{2} + \dfrac{5}{2} - 4 = 4$ （複号同順）

よって　$\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき極小値 -2，$\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき極大値 4 をとる。

（条件 $x^2 + y^2 = 1$ をもつ $(x,\ y)$ で f が最大値と最小値をもつことは既知とする。）

⑶　⑴⑵より最大値は $z = 4$，最小値は $z = -4$