５章　微分方程式

１節　微分方程式と解

A

134

⑴　$\dfrac{dx(t)}{dt} = kx(t)$　　⑵　$\dfrac{dP(t)}{dt} = k(a - P(t))$

135

⑴　$y' = -\dfrac{2}{y'}$

⑵　法線の方程式は　$Y - y = -\dfrac{1}{y'}(X - x)$

$X = a$，$Y = b$ を代入して　$b - y = -\dfrac{1}{y'}(a - x)$　　$\therefore$　$y' = -\dfrac{a - x}{b - y}$

136

⑴　$y' = C$　より，　$y = xy' - \log y' = Cx - \log C$ と微分方程式を満たす。

また，1 個の任意定数を含むので一般解である。

⑵　$y' = \dfrac{1}{x}$　より

$y = xy' - \log y' = x \cdot \dfrac{1}{x} - \log \dfrac{1}{x} = 1 + \log x$ と微分方程式を満たす。しかし，一般解の任意定数にどのような値を入れても $y = \log x + 1$ は得られないのでこれは特異解である。

137

(1) $y' = 3Cx^2 + D \quad y'' = 6Cx$ より

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = x^2(6Cx) - 3x(3Cx^2 + D) + 3(Cx^3 + Dx)$$

$$= 6Cx^3 - 9C^3 - 3Dx + 3Cx^3 + 3Dx = 0$$

と微分方程式を満たす。また，2 個の任意定数を含むので一般解である。

(2) $\begin{cases} y = Cx^3 + Dx \\ y' = 3Cx^2 + D \end{cases}$ に「$x=1$，$y=0$」,「$x=1$，$y'=2$」を代入すると $\begin{cases} 0 = C + D \\ 2 = 3C + D \end{cases}$

これより　$C = 1$，$D = -1$

したがって　$y = x^3 - x$

(3) $y = Cx^3 + Dx$ に「$x=1$，$y=1$」，「$x=2$，$y=1$」を代入すると

$\begin{cases} 1 = C + D \\ 1 = 8C + 2D \end{cases}$ これより　$C = -\dfrac{1}{6}$，$D = \dfrac{7}{6}$

したがって　$y = -\dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{7}{6}x$

B

138

(1) $y' = C$ より　$y = y'x$　$\therefore$　$xy' - y = 0$

(2) $y' = Ce^x + 1$ より　$C = e^{-x}(y'-1)$

$y = e^{-x}(y'-1)e^x + x = y' - 1 + x$　$\therefore$　$y' - y = x - 1$

(3) $y = C\sin x + D\cos x$

$y' = C\cos x - D\sin x$

$y'' = -C\sin x - D\cos x$ より $y'' + y = 0$

(4) $y = Cx + \dfrac{D}{x}$，$y' = C - \dfrac{D}{x^2}$，$y'' = \dfrac{2D}{x^3}$ より　$D = \dfrac{x^3}{2}y''$，

$$C = y' + \frac{D}{x^2} = y' + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^3}{2}y'' = y' + \frac{x}{2}y''$$

したがって　$y = \left(y' + \dfrac{x}{2}y''\right)x + \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x^3}{2}y''\right)$

$$= xy' + \frac{x^2}{2}y'' + \frac{x^2}{2}y'' = xy' + x^2y''$$

$\therefore$　$x^2y'' + xy' - y = 0$

139

⑴ $y' = ae^{ax}(A\cos bx + B\sin bx) + e^{ax}(-bA\sin bx + bB\cos bx)$ より

$y' = e^{ax}\{(aA+bB)\cos bx + (aB-bA)\sin bx\}$ ……①

$y'' = ae^{ax}\{(aA+bB)\cos bx + (ab-bA)\sin bx\} + e^{ax}\{(aA+bB)(-b)\sin x + (aB-bA)b\cos bx\}$ より

$y'' = e^{ax}\{(a^2A-b^2A+2abB)\cos bx + (a^2B-b^2B-2abA)\sin bx\}$ ……②

①×$2a$ $2ay' = e^{ax}\{(2a^2A+2abB)\cos bx + (2a^2B-2abA)\sin bx\}$ ……①′

②−①′ より $y''-2ay' = e^{ax}\{(-a^2A-b^2A)\cos bx + (-a^2B-b^2B)\sin bx\}$

よって $y''-2ay'+(a^2+b^2)y = 0$

⑵ $x=0$ のとき $y=A$, $y' = aA+bB$

140

⑴ $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mg$ より $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -g$

⑵ $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mg - k\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$

５章　微分方程式

２節　１階微分方程式

A

141　（C は任意定数とする）

⑴　$y' - \sqrt{y} = 0$　　$y' = \sqrt{y}$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int dx$$

$$2\sqrt{y} = x + C$$

$$4y = (x+C)^2$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{4}(x+C)^2$$

⑵　$xy' - y = 0$　　$xy' = y$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$\log|y| = \log|x| + C$　　公式 $\boxed{25}$

$$\log\left|\frac{y}{x}\right| = C$$

$\dfrac{y}{x} = \pm e^{C} = C$（改めて C とおく）

$$\therefore\ y = Cx$$

(3) $yy' = \sqrt{1-y^2}$ $\qquad \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}\dfrac{dy}{dx}=1$

$$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy=\int dx$$

$$-\sqrt{1-y^2}=x+C$$

$1-y^2=t$ とおくと

$-2y=\dfrac{dt}{dy}\left(ydy=-\dfrac{1}{2}dt \right)$ より

$$左辺=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$

$$=\int -\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,dt=-t^{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{1-y^2}+C$$

(4) $xy' = y$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\,dx=\int -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy=-\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\log|y|=-\log|x|+C$$

$$\log|xy|=C$$

$$|xy|=e^C$$

$xy=\pm e^C$ （改めてCとおく）

$\quad =C$

よって $y=\dfrac{C}{x}$

⑴　$yy' + x = 0$　$(x = 1,\ \ y = 1)$

$$yy' = -x \quad y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$x = 1$　$y = 1$　を代入して　$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + C$　$\therefore\ C = 1$

したがって　$x^2 + y^2 = 2$

⑵　$y' = e^{2x+y}$　$(x = 0,\ \ y = 0)$　　$e^{-y}\frac{dy}{dx} = e^{2x}$

$$\int e^{-y}\,dy = \int e^{2x}\,dx$$

$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + C$　公式$\boxed{22}$

$x = 0,\ \ y = 0$　を代入して　$-1 = \frac{1}{2} + C$　　$\therefore$　$C = -\frac{3}{2}$

したがって　$e^{2x} + 2e^{-y} = 3$

⑶　$\cos x\cos y\frac{dy}{dx} = \sin x\sin y$　$\left(x = 0,\ \ y = \frac{\pi}{2}\right)$　　$\frac{\cos y}{\sin y}\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\int\frac{\cos y}{\sin y}\,dy = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$\log|\sin y| = -\log|\cos x| + C$　公式$\boxed{26}$ $\boxed{30}$

$\log\left|\ \sin y\cos x\ \right| = C$

$\sin y\cos x = \pm e^c = C$　とおくと

$\sin y\cos x = C$

$x = 0,\ \ y = \frac{\pi}{2}$　を代入して　$\sin\frac{\pi}{2}\cos 0 = C$

$1 = C$

したがって　$\sin y\cos x = 1$

143　C は任意定数

(1)　$y' = \dfrac{2y}{x-y} = \dfrac{2\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}$　　㋐

$\dfrac{y}{x} = u$ とおくと $y' = u'x + u$

よって㋐は

$u'x + u = \dfrac{2u}{1-u}$

$u'x = \dfrac{u+u^2}{1-u}$　　$\dfrac{1-u}{u+u^2}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$\displaystyle\int \frac{1-u}{u+u^2}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\displaystyle\int\left(\frac{1}{u} - \frac{2}{1+u}\right)du = \int \frac{1}{x}\,dx$

（公式 $\boxed{1}$

$\dfrac{1-u}{u(1+u)} = \dfrac{a}{u} + \dfrac{b}{1+u}$ とおき a，b を求める。）

$\log|u| - 2\log|1+u| = \log|x| + C$　　公式 $\boxed{25}$

$\log\left|\dfrac{u}{(1+u)^2 x}\right| = C$　　公式 $\boxed{6}$

$\dfrac{u}{(1+u)^2 x} = \pm e^c = C$ とおく

$\dfrac{\dfrac{y}{x}}{\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^2 x} = C$

$\dfrac{y}{(x+y)^2} = C$

$\therefore\ y = C(x+y)^2$

(2) $xy^2y' = x^3 + y^3$

$$y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad ㋐$$

$\frac{y}{x} = u$ とおくと $y' = u + xu'$

よって㋐は

$$u + xu' = \frac{1+u^3}{u^2}$$

$$xu' = \frac{1+u^3}{u^2} - u = \frac{1}{u^2} \qquad u^2\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int u^2\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$\frac{1}{3}u^3 = \log|x| + C$ 公式 $\boxed{25}$

$\left(\frac{y}{x}\right)^3 = 3\log|x| + 3C$ $3C = C$ とおく

$\therefore\ y^3 = 3x^3(\log|x| + C)$

(3) $(xy' - y)e^{\frac{y}{x}} = x$

$$xy' - y = xe^{-\frac{y}{x}}$$

$$xy' = xe^{-\frac{y}{x}} + y$$

$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \qquad ㋐$$

$\frac{y}{x} = u$ とおくと $y' = u + xu'$

よって㋐は

$$u + xu' = e^{-u} + u$$

$$xu' = e^{-u} \qquad e^u\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int e^u\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$e^u = \log|x| + C$ 公式 $\boxed{25}$

$\therefore\ e^{\frac{y}{x}} = \log|x| + C$

(4) $y' = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$ ㋐

$\dfrac{y}{x} = u$ とおくと $y' = u + xu'$

よって㋐は

$u + xu' = u + \tan u \qquad \dfrac{1}{\tan u}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$\displaystyle\int \frac{1}{\tan u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$ 左辺 $\displaystyle = \int \frac{\cos u}{\sin u}\,du = \int \frac{(\sin u)'}{\sin u}\,du$

公式$\boxed{30}$より

$\log|\sin u| = \log|x| + C$ 公式$\boxed{25}$

$\log\left|\dfrac{\sin u}{x}\right| = C$

$\dfrac{\sin u}{x} = \pm e^{c} = C$ とおく

$\therefore\ \sin\dfrac{y}{x} = Cx$

144

(1) $2xy\,y' = y^2 - x^2$

$y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy} = \dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\dfrac{y}{x}}$ ㋐

$\dfrac{y}{x} = u$ とおくと $y' = u + xu'$

よって㋐は

$u + xu' = \dfrac{u^2 - 1}{2u}$

$xu' = \dfrac{u^2 - 1}{2u} - u = \dfrac{-1 - u^2}{2u} \qquad \dfrac{2u}{1 + u^2}\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{1}{x}$

$\displaystyle\int \frac{2u}{1 + u^2}\,du = -\int \frac{1}{x}\,dx$ 公式 $\boxed{30}\,\boxed{25}$

$\log|1 + u^2| = -\log|x| + C$

$\log|(1 + u^2)x| = C$

$(1 + u^2)x = \pm e^{c} = C$

$\left(1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right)x = C$

$\dfrac{x^2 + y^2}{x} = C$

$x = 1,\ \ y = -1$ を代入すると $C = 2$

$\therefore\ \ x^2 + y^2 = 2x \qquad \left[\therefore\ \ (x-1)^2 + y^2 = 1\right]$

(2)　$(x+y)+(x-y)y'=0$

$$y'=\frac{-x-y}{x-y}=\frac{-1-\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}$$　㋐

$\dfrac{y}{x}=u$ とおくと $y'=u+xu'$

よって㋐は

$$u+xu'=\frac{-1-u}{1-u}$$

$$xu'=\frac{u^2-2u-1}{1-u}\qquad \frac{u-1}{u^2-2u-1}\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}$$

$$\int\frac{u-1}{u^2-2u-1}\,du=\int\frac{1}{x}\,dx$$

左辺 $=\displaystyle\int\frac{\frac{1}{2}(u^2-2u-1)'}{u^2-2u-1}\,du$

$=\dfrac{1}{2}\log\left|u^2-2u-1\right|+C$　（公式 $\boxed{30}$ ）

なので　$\dfrac{1}{2}\log\left|u^2-2u-1\right|=-\log|x|+C$

よって　$\log\left|u^2-2u-1\right|=-2\log|x|+2C$

$$\log\left|u^2-2u-1\right|+\log|x|^2=2C$$

$$\log\left|\left(\frac{y^2}{x^2}-2\cdot\frac{y}{x}-1\right)x^2\right|=2C$$

$$\log\left|y^2-2xy-x^2\right|=2C$$

$y^2-2xy-x^2=\pm e^{2C}=C$ とおく

$x=0$，$y=0$ を代入して $C=0$

よって $y^2-2xy-x^2=0$

(3) $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \log \dfrac{y}{x}\right)$ （$x = 1,\ \ y = 1$） ㋐

$\dfrac{y}{x} = u$ とおくと $y' = u + xu'$

よって㋐は

$u + xu' = u(1 + \log u)$

$xu' = u \log u \qquad \dfrac{1}{u \log n}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$\displaystyle\int \frac{1}{u \log u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$

左辺 $= \displaystyle\int \frac{\frac{1}{u}}{\log u}\,du = \int \frac{(\log u)'}{\log u}\,du = \log\left|\log u\right| + C$ （公式$\boxed{30}$）

$\log|\log u| = \log|x| + C$

$\log\left|\dfrac{\log u}{x}\right| = C$

$\dfrac{\log u}{x} = \pm e^{C} = C$ とおく

$\log \dfrac{y}{x} = Cx$

$\dfrac{y}{x} = e^{Cx} \quad \therefore\ y = xe^{Cx}$

$x = 1,\ \ y = 1$ を代入して $1 = e^{C} \quad \therefore\ C = 0$

$\therefore\ y = x$

145　c, B, C は任意定数

(1)　$xy' + y = x^3$

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2 \qquad ㋐$$

［1］ $y' + \frac{1}{x}y = 0$　の一般解を求める。

$$y' = -\frac{1}{x}y$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx$$

$\log|y| = -\log|x| + c$　$\log|xy| = C$　$xy = \pm e^C = B$ とおく

$$xy = B \qquad y = \frac{B}{x}$$

［2］ B を x の関数 u とおくと

$$y = \frac{u}{x} \qquad ㋑$$

$$y' = \frac{u'x - ux'}{x^2}$$ より（公式 $\boxed{23}$ ）

$$y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} \qquad ㋒$$

㋐に㋑㋒を代入して

$$\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} + \frac{u}{x^2} = x^2$$

$$u' = x^3$$

$$u = \frac{1}{4}x^4 + C$$

㋑に代入して

$$\therefore\ y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{4}x^4 + C\right) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x}$$

⑵　$x^2y' + 2xy = 1$

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2} \quad ㋐$$

［1］ $y' + \dfrac{2}{x}y = 0$ の一般解を求める。$y' = -\dfrac{2}{x}\cdot y$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}$$

$$\int \frac{1}{y} = -\int \frac{2}{x}dx$$

$\log|y| = -2\log|x| + c$　（公式$\boxed{25}$）

$\log|y| + \log|x|^2 = C$

$\log|yx^2| = C$

$yx^2 = \pm e^C = B$ とおく

$$y = \frac{B}{x^2}$$

［2］ Bをxの関数uとおく

$y = \dfrac{u}{x^2}$　㋑　　　$y' = \dfrac{u'x^2 - u(x^2)'}{(x^2)^2}$ より

$y' = \dfrac{u'}{x^2} - \dfrac{2u}{x^3}$　㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して

$$\frac{u'}{x^2} - \frac{2u}{x^3} + \frac{2u}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

$$u' = 1$$

$$u = x + C$$

㋑に代入して　$\therefore\ y = \dfrac{1}{x^2}(x+C) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^2}$

(3) $xy'\log x+y=\log x$

$$y'+\frac{1}{x\log x}y=\frac{1}{x} \quad ㋐$$

［1］ $y'+\dfrac{1}{x\log x}y=0$ の一般解を求める。

$$y'=-\frac{1}{x\log x}y$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x\log x}$$

$$\int\frac{1}{y}dy=-\int\frac{1}{x\log x}dx$$

右辺は $-\displaystyle\int\frac{\frac{1}{x}}{\log x}dx=-\int\frac{(\log x)'}{\log x}dx=-\log\left|\log x\right|+C$ 公式$\boxed{30}$

$$\log|y|=-\log|\log x|+C$$

$$\log\left|y(\log x)\right|=C$$

$y\log x=\pm e^{C}=B$ とおくと $y=\dfrac{B}{\log x}$

［2］ B を x の関数 u とおく

$y=\dfrac{u}{\log x}$ ㋑より $y'=\dfrac{u'\log x-u\cdot\frac{1}{2}}{(\log x)^2}$ （公式$\boxed{23}$）

$$y'=-\frac{u}{x(\log x)^2}+\frac{u'}{\log x} \quad ㋒$$

㋐に㋑ ㋒を代入して

$$-\frac{u}{x(\log x)^2}+\frac{u'}{\log x}+\frac{1}{x\log x}\cdot\frac{u}{\log x}=\frac{1}{x}$$

$$u'=\frac{1}{x}\log x$$

$$u=\int\frac{1}{x}\log x\,dx=\int(\log x)'\log x\,dx$$

$$=(\log x)(\log x)-\int(\log x)(\log x)'\,dx \quad (公式\boxed{31})$$

$$=(\log x)^2-\int\frac{\log x}{x}dx$$

$=(\log x)^2-u$ より $2u=(\log x)^2+C$

$$u=\frac{1}{2}(\log x)^2+\frac{C}{2}$$

㋑に代入して $y=\dfrac{1}{\log x}\left(\dfrac{1}{2}(\log x)^2+\dfrac{C}{2}\right)$ $\left(\dfrac{C}{2}=C\text{ とおく}\right)$

$$y=\frac{1}{2}\log x+\frac{C}{\log x}$$

⑷　$y' - 3y = \sin x$　㋐

［1］ $y' - 3y = 0$ の一般解を求める　$y' = 3y$　$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = 3$

$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = 3\int dx$

公式 $\boxed{25}$ より

$\log|y| = 3x + C$　　$|y| = e^{3x+C}$　　$y = \pm e^{C}\cdot e^{3x}$

$y = Be^{3x}$ とおく

［2］ B を x の関数 u とおく

$y = ue^{3x}$　㋑

$y' = u'e^{3x} + 2ue^{3x}$　㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して

$u'e^{3x} + 3ue^{3x} - 3ue^{3x} = \sin x$

$u' = e^{-3x}\sin x$

$$u = \int e^{-3x}\sin x\,dx$$

$$= \int e^{-3x}(-\cos x)'\,dx$$

$$= e^{-3x}(-\cos x) - \int (e^{-3x})'(\cos x)\,dx \quad \text{公式}\ \boxed{31}$$

$$= -e^{-3x}\cos x - \int (-3)\,e^{-3x}(-\cos x)\,dx$$

$$= -e^{-3x}\cos x - 3\int e^{-3x}\cos x\,dx$$

$$= -e^{-3x}\cos x - 3\int e^{-3x}(\sin x)'\,dx$$

$$= -e^{-3x}\cos x - 3\left\{e^{-3x}\sin x - \int (e^{-x})'\sin dx\right\} \quad \text{公式}\ \boxed{31}$$

$$= -e^{-3x}\cos x - 3e^{-3x}\sin x - 9\int e^{-3x}\sin x\,dx$$

よって $10\displaystyle\int e^{-3x}\sin x\,dx = -e^{-3x}\cos x - 3e^{3x}\sin x + C$

左辺は $10u$ である。

従って

$$u = -\frac{1}{10}e^{-3x}(3\sin x + \cos x) + \frac{C}{10} \quad \left(\frac{C}{10} = C \text{ とおく}\right)$$

㋑に代入して

$$\therefore\ y = -\frac{1}{10}(3\sin x + \cos x) + Ce^{3x}$$

146

(1) $xy' + 3y + x = 0$ （$x = 1,\ \ y = 1$）

$y' + \dfrac{3}{x}y = -1$ ㋐

［1］ $y' + \dfrac{3}{x}y = 0$ の一般解を求める。

$y = -\dfrac{3}{x}y \qquad \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3}{x}$

$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{3}{x}\,dx$ 公式$\boxed{25}$

$\log|y| = -3\log|x| + C$

$\log|y| + \log|x|^3 = C$

$\log|yx^3| = C$

$yx^3 = \pm e^C = B$ とおくと

$y = \dfrac{B}{x^3}$

［2］ B を x の関数 u とおく

$y = \dfrac{u}{x^3}$ ㋑より $y' = \dfrac{u'x^3 - u\cdot 3x^2}{(u^3)^2}$ 公式$\boxed{23}$

$y' = \dfrac{u'}{x^3} - \dfrac{3u}{x^4}$ ㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して $\dfrac{u'}{x^3} - \dfrac{3u}{x^4} + \dfrac{3u}{x^4} = -1$

$u' = -x^3$

$u = -\dfrac{1}{4}x^4 + C$

㋑に代入して $\therefore\ y = \dfrac{1}{x^3}\left(-\dfrac{1}{4}x^4 + C\right)$

$= -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{C}{x^3}$

$x = 1,\ \ y = 1$ を代入すると $1 = -\dfrac{1}{4} + C$

$\therefore\ C = \dfrac{5}{4}$

$\therefore\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4x^3}$

⑵　$y' + y = e^x$　　㋐

［1］ $y' + y = 0$ の一般解を求める。

$$y' = -y$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -1$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int dx$$

$\log|y| = -x + C$　　公式 $\boxed{25}$

$|y| = e^{-x+C}$　　$y = \pm e^C \cdot e^{-x}$

$y = Ce^{-x}$ とおく。

［2］ B を x の関数 u とおくと　$y = ue^{-x}$　㋑，　$y' = u'e^{-x} - ue^{-x}$　㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して　$u'e^{-x} - ue^{-x} + ue^{-x} = e^x$

$$u' = e^{2x}$$

$$u = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

㋑に代入して　$\therefore\ y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$

$x = 0,\ y = 0$ を代入すると

$0 = \frac{1}{2} + C$　　$\therefore\ C = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

⑶　$y'\cos x + y\sin x = 1$

$y' + \dfrac{\sin x}{\cos x}y = \dfrac{1}{\cos x}$　㋐

［1］ $y' + \dfrac{\sin x}{\cos x}y = 0$ の一般解を求める。

$y = -\dfrac{\sin x}{\cos x}y$

$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\int \dfrac{1}{y}dy = -\int \dfrac{\sin x}{\cos x}dx$

右辺 $= \int \dfrac{(\cos x)'}{\cos x}dx = \log|\cos x| + C$　（公式$\boxed{30}$）

公式 $\boxed{25}$ より

$\log|y| = \log|\cos x| + C$

$\log\left|\dfrac{y}{\cos x}\right| = C$　　$\dfrac{y}{\cos x} = \pm e^C$

$\dfrac{y}{\cos x} = B$ とおくと $y = C\cos x$

［2］ Bをxの関数uとおく

$y = u\cos x$　㋑

$y' = u'\cos x - u\sin x$　㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して

$u'\cos x - u\sin x + u\sin x = \dfrac{1}{\cos x}$

$u' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$u = \tan x + C$　（公式$\boxed{26}$）

㋑に代入して

$\therefore\ y = \sin x + C\cos x$

$x = 0,\ y = 1$を代入して $1 = C$

$\therefore\ y = \sin x + \cos x$

147

点 P における接線　$Y-y=y'(X-x)$

点 R の x 座標は　$0-y=y'(X-x)$ より $X=x-\dfrac{y}{y'}$

$$-\frac{y}{y'}=X-x$$

$$\therefore\quad \mathrm{QR}=\left|\,x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=\left|\frac{y}{y'}\right|=2$$

$$\therefore\quad \frac{y}{y'}=\pm 2$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\pm 2}$$

$$\int\frac{1}{y}dy=\pm\frac{1}{2}\int dx$$

$$\log|\,y\,|=\pm\frac{1}{2}x+C\qquad |y|=e^{\pm\frac{1}{2}x+C}\qquad y=\pm e^{C}\cdot e^{\pm\frac{1}{2}x}$$

$y=Ce^{\pm\frac{1}{2}x}$ とおく

$x=0,\ y=2$ を代入して $2=C$

$$\therefore\ y=2e^{\pm\frac{1}{2}x}$$

148

(1) $\dfrac{dy}{dx}=y^2\left(xy-\dfrac{1}{xy}\right)$ ㋐

$u=xy$ とおくと $y=\dfrac{u}{x}$ ㋑　$u'=y+xy'$ より $y'=\dfrac{u'-y}{x}=\dfrac{u'-\frac{u}{x}}{x}=\dfrac{u'x-u}{x^2}=\dfrac{u'}{x}-\dfrac{u}{x^2}$ ㋒

㋐に㋑ ㋒を代入すると

$$\therefore\quad \frac{u'}{x}-\frac{u}{x^2}=\left(\frac{u}{x}\right)^2\left(u-\frac{1}{u}\right)=\frac{u^3}{x^2}-\frac{u}{x^2}$$

よって $\dfrac{u'}{x}=\dfrac{u^3}{x^2}$　$\therefore\ u'=\dfrac{u^3}{x}$

(2) $\dfrac{1}{u^3}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{2}$ より $\displaystyle\int\frac{1}{u^3}du=\int\frac{1}{x}dx$

$-\dfrac{1}{2}u^{-2}=\log|\,x\,|+C$　公式 $\boxed{25}$

$$\frac{1}{u^2}=-2\log|\,x\,|-2C$$

$\dfrac{1}{x^2y^2}=-2\log|\,x\,|+C$ とおく

$$\frac{1}{y^2}=x^2(-\log x^2+C)$$

$\therefore\ y^2=\dfrac{1}{x^2(-\log x^2+C)}$　(Cは任意定数)

B

149

(1) $y' = xe^{x+y}$

$$e^{-y}\frac{dy}{dx} = xe^{x}$$

$$\int e^{-y}\,dy = \int xe^{x}\,dx = \int x(e^{x})'\,dx = xe^{x} - \int (x)'e^{x}\,dx \quad （公式\boxed{31}）$$

$$-e^{-y} = xe^{x} - e^{x} + C$$

$$\therefore\ e^{-y} = e^{x}(1-x) + C \qquad （C は任意定数）$$

(2) $x^2 y' = y^2 - xy$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} \quad ㋐$$

$\frac{y}{x} = u$ とおくと　$y = ux$ ㋑　$y' = xu' + u$ ㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して

$$xu' + u = u^2 - u$$

$$xu' = u^2 - 2u \qquad \frac{1}{u^2-2u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{u^2-2u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\int\left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{u-2}\right)du\right) = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left(-\log|u| + \log|u-2|\right) = \log|x| + C \quad 公式\boxed{25}$$

（左辺は公式 $\boxed{1}$ で

$$\frac{1}{u(u-2)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u-2} \quad として$$

a，b を求める。）

$$\log\left|\frac{u-2}{u}\right| = 2\log|x| + 2C \quad 公式\boxed{6}$$

$$= \log|x|^2 + 2C$$

$$\log\left|\frac{u-2}{ux^2}\right| = 2C$$

$$\frac{u-2}{ux^2} = \pm e^{2C} = C \ とおく$$

$$\frac{\frac{y}{x}-2}{\frac{y}{x}\cdot x^2} = C \qquad \frac{y-2x}{yx^2} = C$$

$$y - 2x = Cx^2 y$$

より $y = \dfrac{2x}{1-Cx^2}$ （C は任意定数）

⑶　$(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}=xy+1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{1+x^2}y+\frac{1}{1+x^2} \quad ㋐$$

［1］ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{1+x^2}y$　の一般解を求める。

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{x}{1+x^2}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(1+x)'}{1+x^2}dx \quad 公式\boxed{30}$$

$$\log|\,y\,|=\frac{1}{2}\log|\,1+x^2\,|+C \quad 公式\boxed{25}$$

$$=\log|1+x^2|^{\frac{1}{2}}+C$$

よって　$\log|y|-\log\sqrt{1+x^2}=C$

$$\log\left|\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right|=C$$

$\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}}=\pm e^C=B$　とおくと

$$y=B\sqrt{1+x^2}$$

［2］ B を x の関数 u とおくと $y=u\sqrt{1+x^2}$ ㋑　$y=u\sqrt{1+x^2}+u\cdot\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$

$$y'=u'\sqrt{1+x^2}+\frac{xu}{\sqrt{1+x^2}} \quad ㋒$$

㋐に㋑ ㋒を代入して

$$u'\sqrt{1+x^2}+\frac{xu}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{1+x^2}u\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}$$

$$u'=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$u=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

㋑に代入して

$$\therefore\quad y=\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C\right)\sqrt{1+x^2}$$

$y=x+C\sqrt{1+x^2}$　（C は任意定数）

(1) $x(y^2-1)+y(x^2-1)\dfrac{dy}{dx}=0$ $(x=2,\ y=2)$

$$y(x^2-1)\frac{dy}{dx}=-x(y^2-1)$$

$$\frac{y}{y^2-1}\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{x^2-1}$$

$$\int\frac{y}{y^2-1}\,dy=-\int\frac{x}{x^2-1}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{(y^2-1)'}{y^2-1}\,dy=-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\,dx \quad （公式\boxed{30}）$$

$$\frac{1}{2}\log\left|y^2-1\right|=-\frac{1}{2}\log\left|x^2-1\right|+C$$

$$\log\left|y^2-1\right|+\log\left|x^2-1\right|=2C$$

$$\log\left|(y^2-1)(x^2-1)\right|=2C$$

$(y^2-1)(x^2-1)=\pm e^{2C}=C$ とおく

$x=2,\ y=2$ を代入して　$C=9$

$\therefore\ (x^2-1)(y^2-1)=9$

(2) $xy'\cos\dfrac{y}{x}=y\cos\dfrac{y}{x}+x$ $\left(x=1,\ y=\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y'\cos\dfrac{y}{x}=\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}+1$　㋐

$\dfrac{y}{x}=u$ とおくと $y=ux$　㋑　　　$y'=u+xu'$　㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して

$$(u+xu')\cos u=u\cos u+1$$

$xu'\cos u=1$　　$\cos u\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$$\int\cos u\,du=\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\sin u=\log\left|x\right|+C$$

$$\sin\frac{y}{x}=\log\left|x\right|+C$$

$x=1,\ y=\dfrac{\pi}{2}$ を代入して

$\sin\dfrac{\pi}{2}=\log 1+C$ より $1=C$

$\therefore\ \sin\dfrac{y}{x}=\log\left|x\right|+1$

⑶ $y' + \dfrac{\cos x}{\sin x} y = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x = \dfrac{\pi}{4},\ y = 2 \right)$ ㋐

［1］ $y' + \dfrac{\cos x}{\sin x} y = 0$ の一般解を求める

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx \quad \text{公式}\boxed{30}$$

$$\log|\ y\ | = -\log|\ \sin x\ | + C$$

$$\log|\ y\sin x\ | = C$$

$y \sin x = \pm e^c = B$ とおくと

$$y = \frac{B}{\sin x}$$

［2］ B を x の関数 u とおく

$y = \dfrac{u}{\sin x}$ ㋑, $y' = \dfrac{u' \sin x - u(\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{u'}{\sin x} - \dfrac{u \cos x}{\sin^2 x}$ ㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して

$$\frac{u'}{\sin x} - \frac{u\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin x}\frac{u}{\sin x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$u' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$u = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \int \frac{-1}{t^2} dt = t^{-1} + C$$

$$u = \frac{1}{\cos x} + C$$

（ $\cos x = t$ とおくと

$-\sin x = \dfrac{dt}{dx}$, $\sin x dx = (-1) dt$ ）

㋑に代入して

$$\therefore\ y = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{1}{\cos x} + C \right) = \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{C}{\sin x}$$

$x = \dfrac{\pi}{4}$, $y = 2$ を代入すると $\quad 2 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}} + \dfrac{C}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

$$2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\, C \qquad C = 0$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

151

⑴　$y' = ay - 4x$　㋐

［1］ $y' = ay$ の一般解を求める。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = a$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int a\,dx$$

$$\log|\,y\,| = ax + C$$

$$|y| = e^{ax+C}$$

$$y = \pm e^{C} \cdot e^{ax}$$

$y = Be^{ax}$　とおく

［2］ Bをx の関数 uとして

$y = ue^{ax}$　㋑　　　　$y' = u'e^{ax} + aue^{ax}$　㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して

$$u'e^{ax} + aue^{ax} = aue^{ax} - 4x$$

$$u' = -4e^{-ax}x$$

$$u = -4\int e^{ax}x\,dx = -4\int \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' x\,dx$$

$$= -4\left\{\frac{1}{a}e^{ax}x - \int \frac{1}{a}e^{ax}(x)'ax\right\}$$

$$u = \frac{4}{a}e^{-ax}x - \frac{4}{a}\int e^{-ax}\,dx$$

$$= \frac{4}{a}e^{ax}x - \frac{4}{a}\cdot\frac{1}{-a}e^{-ax} + C$$

$$= \frac{4}{a}e^{-ax}\left(x + \frac{1}{a}\right) + C$$

㋑に代入して

$\therefore$　$y = \dfrac{4}{a^2}(ax+1) + Ce^{ax}$　（C は任意定数）

⑵

$$\begin{cases} y = \dfrac{4}{a^2}(ax+1) + Ce^{ax} & ㊓ \\[2em] y' = \dfrac{4}{a} + Cae^{ax} \end{cases}$$

に $x=0$, $y=2$, $y'=1$ を代入

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{4}{a^2} + C \\[2em] 1 = \dfrac{4}{a} + Ca \end{cases} \quad \left(2a = \dfrac{4}{a} + Ca\right)$$

より $a = \dfrac{1}{2}$, $C = -14$

㊓より　$\therefore\ y = 16\left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) - 14e^{\frac{x}{2}}$

$$= 8x - 14e^{\frac{x}{2}} + 16$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$y = 8x - 14e^{\frac{x}{2}} + 16$$

152

(1) $2xyy'-y^2+x=0$

$y=-\frac{1}{2x}y=-\frac{1}{2}y^{-1}$　㋐　（ベルヌーイの微分方程式のタイプ　$n=-1$）

$z=y^2$　㋑とおくと，$z'=2yy'$ より㋐の両辺に $2y$ をかけると $2yy'-\frac{1}{x}y^2=-1$ なので

$z'=-\frac{1}{x}z=-1$　㋐′

［1］ $z'=\frac{1}{x}z$ の一般解を求める。

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x} \text{ より} \quad \int\frac{1}{z}dz=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\log|z|=\log|x|+C$$

$$\log\left|\frac{z}{x}\right|=C$$

$$\frac{z}{x}=\pm e^C=B \text{とおくと}$$

$$\frac{z}{x}=B$$

$$z=Bx$$

［2］ C を x の関数 u として $z=ux$　㋒　　$z'=u'x+u$　㋓

㋐に㋒ ㋓を代入すると

$$u'x+u-u=-1$$

$$u'=-\frac{1}{x}$$

$$u=-\log|x|+C$$

㋒に代入して　$\therefore\ z=-x\log|x|+Cx$

㋑より　$\therefore\ y^2=-x\log|x|+Cx$　（C は任意定数）

(2)　$y'+y=y^2(\cos x+\sin x)$　㋐　（ベルヌーイの微分方程式のタイプ，$n=2$）

$z=y^{-1}$とおくと，$z'=(-1)y^{-2}y'$より㋐の両辺に$-y^2$をかけると$-y^{-2}y'-y^{-1}=-(\cos x+\sin x)$なので

$z'-z=-(\cos x+\sin x)$　㋐′

［1］$z'-z=0$の一般解を求める。

$$\frac{dz}{dx}=z \qquad \frac{1}{z}\frac{dz}{dx}=1$$

$$\int\frac{1}{2}\,dz=\int dx \text{ より } \log|z|=x+C$$

よって　$z=\pm e^{x+C}=\pm e^{C}\cdot e^{x}=Be^{x}$　とおく

［2］Bをxの関数uとして

$z=ue^x$　㋑，$z'=u'e^x+ue^x$　㋒

㋐′　に㋑　㋒を代入して

$$u'e^x+ue^x-ue^x=-(\cos x+\sin x)$$

$$u'=-e^{-x}(\cos x+\sin x) \text{ より}$$

$$u=\int -e^{-x}(\cos x+\sin x)\,dx \quad ㋓$$

$$=\int(e^{-x})'(\cos x+\sin x)\,dx=e^{-x}(\cos x+\sin x)-\int e^{-x}(\cos x+\sin x)'\,dx \quad (\text{公式}\boxed{31})$$

よって　$u=e^{-x}(\cos x+\sin x)-\int e^{-x}(-\sin x+\cos x)\,dx$

$$=e^{-x}(\cos x+\sin x)-\int(-e^{-x})'(-\sin x+\cos x)\,dx$$

$$=e^{-x}(\cos x+\sin x)$$

$$-\left(-e^{-x}(-\sin x+\cos x)+\int e^{-x}(-\sin x+\cos x)'\,dx\right)$$

$$=e^{-x}\cdot 2\cos x-\int e^{-x}(-\cos x-\sin x)\,dx$$

$$=2e^{-x}\cos x-u \quad (㋓\text{より})$$

$\therefore$　$2u=2e^{-x}\cos x+C$

$\therefore$　$u=e^{-x}\cos x+C\cdot\dfrac{1}{2}=e^{-x}\cos x+C$　とおく

㋑に代入2して

$$z=\cos x+Ce^x$$

したがって　$y=\dfrac{1}{\cos x+Ce^x}$　（Cは任意定数）

153

⑴　$x^2y' + 2xy = 1$

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2} \quad ㋐$$

［1］ $y' + \dfrac{2}{x}y = 0$ の一般解を求める。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{2}{x}dx$$

$$\log|\ y\ | = -2\log|\ x\ | + C$$

$$\log|y| + \log|x|^2 = C$$

$$\log|yx^2| = C$$

$yx^2 = \pm e^C = B$　とおく

$$y = \frac{B}{x^2}$$

［2］　B を x の関数 u とおいて $y = \dfrac{u}{x^2}$　㋑,

$y' = \dfrac{u'x^2 - u \cdot 2x}{x^4}$　より $y' = \dfrac{u'}{x^2} - \dfrac{2u}{x^3}$　㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して

$$\frac{u'}{x^2} - \frac{2u}{x^3} + \frac{2u}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

$u' = 1$

$\therefore\ u = x + C$

㋑に代入して

$y = \dfrac{1}{x^2}(x + C) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^2}$（$C$は任意定数）

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}\right) = 0$

注　問題の式は線形方程式なので特異解は存在しない。

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}\right) = 0$

⑵　$y(1) = y(2)$ より

$$1 + C = \frac{1}{2} + \frac{C}{4}$$

$$\therefore\ c = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{x} - \frac{2}{3x^2}$$

発展問題

154

(1) $y' = \dfrac{Ax + By + C}{ax + by + c}$ ㋐

$x = X + x_0$, $y = Y + y_0$ とする

$\dfrac{dx}{dx} = \dfrac{dX}{x}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dY}{dx}$ より $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \dfrac{dY}{dX}$

よって

$$\frac{dY}{dX} = \frac{AX + BY + Ax_0 + By_0 + C}{aX + bY + ax_0 + by_0 + c}$$

$\dfrac{A}{a} \neq \dfrac{B}{b}$ のとき $\begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0 \\ ax_0 + by_0 + c = 0 \end{cases}$

を満たす x_0, y_0 が存在するので （公式 $\boxed{37}$ ）

$\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{AX + BY}{aX + bY} = \dfrac{A + B \cdot \frac{Y}{X}}{a + b \cdot \frac{Y}{X}}$ と同次形になる。

(2) $\dfrac{A}{a} = \dfrac{B}{b} \neq \dfrac{C}{c}$ のとき

$\dfrac{A}{a} = \dfrac{B}{b} = k$ とおくと $\begin{matrix} A = ak \\ B = bk \end{matrix}$ より㋐は $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{k(ax+by)+C}{ax+by+c}$

$u = ax + by$ とすると $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ku + C}{u + c}$ である。㋑

一方 $u' = a + by'$ より

$y' = \dfrac{u' - a}{b}$ なので ㋒

㋑ ㋒より

$$\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) = \frac{ku + C}{u + c}$$

$$\frac{dy}{dx} - a = \frac{ku + C}{u + c} \cdot b$$

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{ku + C}{u + c} \cdot b + a$ と変数分離形になる。

(3) $\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$ より $x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{7}{3}$

((1)の x_0 と y_0 を求めた)

$x=X+\dfrac{1}{3}$，$y=Y+\dfrac{7}{3}$ とすると

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2X+Y}{X+2Y}=\frac{2+\dfrac{Y}{X}}{1+2\dfrac{Y}{X}} \quad ㋓$$

$\dfrac{Y}{X}=u$ とおくと $Y=Xu$ ㋔

両辺をXで微分して　$Y'=u+Xu'$ ㋕

㋓に㋔，㋕を代入すると

$$u+Xu'=\frac{2+u}{1+2u}$$

$$Xu'=\frac{2+u}{1+2u}-u=\frac{2-2u^2}{1+2u}$$

$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2}{X}\cdot\dfrac{1-u^2}{1+2u}$ より $\dfrac{1+2u}{1-u^2}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2}{X}=\dfrac{2}{x-\dfrac{1}{3}}$

両辺を x で積分して

$$\int\frac{1+2u}{1-u^2}du=\int\frac{2}{x-\dfrac{1}{3}}dx$$

右辺で $x-\dfrac{1}{3}=X$ なので $\dfrac{dx}{dX}=1\,(dx=dX)$

$$\int\left(\frac{-\dfrac{1}{2}}{(1+u)}+\frac{\dfrac{3}{2}}{(1-u)}\right)du=\int\frac{2}{X}dX$$

$$-\frac{1}{2}\log|1+u|-\frac{3}{2}\log|1-u|=2\log|X|+c$$

$0=\log|1+u|+\log|1-u|+4\log|X|+c$　公式$\boxed{6}$より

$$\log|(1+u)(1-u)^3X^4|=-c$$

$\therefore\ (1+u)(1-u)^3X^4=\pm e^{-c}=C$ とおく

㋔より　$\left(1+\dfrac{Y}{X}\right)\left(1-\dfrac{Y}{X}\right)^3X^4=C$

$$(X+Y)(X-Y)^3=c$$

$X=x-\dfrac{1}{3}$，$Y=y-\dfrac{7}{3}$　より

$$\left(x+y-\frac{8}{3}\right)(x-y+2)^3=C$$

（Cは任意定数）

（考え方） $y'=(2x-1)y^2-(4x-1)y+2x$ ㋐はリッカチの微分方程式のタイプである。

今，特殊解が $y=1$ なので

$y=u+1$ とおくと例題３で考えたようにベルヌーイの微分方程式（$n=2$）のタイプになる。

（解） $y=u+1$ ㋑とおくと $y'=u'$ なので

㋐は $u'=(2x-1)(u+1)^2-(4x-1)(u+1)+2x$

$=(2x-1)(u^2+2u+1)^2-(4x-1)u-(4x-1)+2x$

$=(2x-1)u^2+(4x-2)u+(2x-1)-(4x-1)u-2x+1$

$u'-\{2(2x-1)-(4x-1)\}u=(2x-1)u^2$

よって　$u'+u=(2x-1)u^2$　㋐$'$

これは例題２よりベルヌーイの微分方程式（$n=2$）のタイプである。

$z=u^{-1}$ ㋓　とおくと　$z'=-u^{-2}u'$ ㋔　（公式 $\boxed{24}$ ）

㋐$'$ に㋓ ㋔を代入する。

㋓は $u=\dfrac{1}{z}$　　㋔は㋓より $z'=-z^2u'$ なので $u'=\dfrac{1}{-z^2}z'$ なので

㋐$'$ は　$\dfrac{1}{-z^2}z'+\dfrac{1}{z}=(2x-1)\dfrac{1}{z^2}$

よって　$z'-z=-(2x-1)$ ㋐$''$

［1］ $z'-z=0$ の一般解を求める。152⑵の解答より $z=Be^x$（B は任意定数）

［2］B を x の関数 v とおくと　$z=ve^x$ ㋕　　$z'=v'e^x+ve^x$ ㋖

㋐$''$ に㋕ ㋖を代入すると

$v'e^x+ve^x-ve^x=-2x+1$

$v'=e^{-x}(-2x+1)$ より $v=\int e^{-x}(-2x+1)\,dx$

$=\int(-e^{-x})'(-2x+1)\,dx$

$=(-e^{-x})(-2x+1)-\int(-e^{-x})(-2x+1)'\,dx$　（公式 $\boxed{31}$）

よって $v=-e^{-x}(-2x+1)+\int e^{-x}(-2)\,dx$

$=-e^{-x}(-2x+1)+2e^{-x}+C$

㋕に代入して $z=-(-2x+1)+2+Ce^x$

したがって　$z=2x+1+Ce^x$

ゆえに㋓より　$u=\dfrac{1}{2x+1+Ce^x}$

したがって㋑より　$y=\dfrac{1}{2x+1+Ce^x}+1$　（C は任意定数）

５章　微分方程式

３節　２階微分方程式

A

156　（C，D は任意定数とする）

(1)　$y'' = 2x$

$$y' = x^2 + C \qquad y = \frac{1}{3}x^3 + Cx + D$$

(2)　$y'' = \frac{1}{x}$

$$y' = \log|x| + C$$

$$\begin{aligned}\int \log|x|\,dx &= \int (x)'\log|x|\,dx\\ &= x\log|x| - \int x\left(\log|x|\right)'\,dx\\ &= x\log|x| - x + C \quad （公式\boxed{31}）\end{aligned}$$

$$y = x\log|x| - x + Cx + D$$

(3)　$y'' = x\sin x$

$$\left(\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= \int x(-\cos x)'\,dx\\ &= x(-\cos x) - \int (x)'(\cos x)\,dx\\ &= -x\cos x + \sin x + C \quad 公式\boxed{31}\end{aligned}\right)$$

$$y' = -x\cos x + \sin x + C$$

$$\left(\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int x(\sin x)'\,dx\\ &= x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx\\ &= x\sin x - \cos x + D\end{aligned}\right.$$

$$y = -x\sin x - \cos x - \cos x + Cx + D$$

$$y = -x\sin x - 2\cos x + Cx + D$$

157　C, D は任意定数

(1)　$y'y''-1=0$ ㋐

$y'=p$ とおくと $y''=p'$

よって ㋐は

$$pp'=1$$

$$\int p\ dp=\int 1\ dx$$

$$\frac{1}{2}p^2=x+C$$

$$p^2=2x+2C\quad (2C\text{を改めて}C\text{とかく})$$

$$p=\pm\sqrt{2x+C}$$

$$\therefore\quad y=\pm\sqrt{2x+C}=\pm(2x+C)^{\frac{1}{2}}$$

$$y=\pm\int(2x+C)^{\frac{1}{2}}\ dx\quad \left(2x+C=t\ \text{とおくと}\ 2=\frac{dt}{dx}\quad dx=\frac{1}{2}\,dt\right)$$

$$=\pm\int t^{\frac{1}{2}},\ \frac{1}{2}\,dt$$

$$=\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+D$$

$$=\pm\frac{1}{3}(2x+C)^{\frac{3}{2}}+D$$

したがって　$y=\pm\dfrac{1}{3}(2x+C)^{\frac{3}{2}}+D$

(2)　$y''-(y')^2=1$

$y'=p$ とおくと $y''=p'$

$$p'-p^2=1$$

$$p'=1+p^2$$

$$\frac{1}{1+p^2}\frac{dp}{dx}=1$$

$$\int\frac{1}{1+p^2}\,dp=\int dx$$

$$\mathrm{Tan}^{-1}p=x+C$$　公式 $\boxed{28}$

$$\therefore\quad P=\tan(x+C)$$

$$y'=\tan(x+C)=\int\frac{\sin(x+C)}{\cos(x+C)}\,dx=\int\frac{(-\cos(x+C))'}{\cos(x+C)}\,dx$$

したがって公式 $\boxed{30}$ より

$$y=-\log\left|\cos(x+C)\right|+D$$

158　C，D は任意定数

(1)　$(1-y)y'' + (y')^2 = 0$

$y = p$ とおくと $y = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\, p$

$$(1-y)\frac{dp}{dy}\, p + p^2 = 0$$

$$(1-y)\frac{dp}{dy} = -p$$

$$\int \frac{1}{p}\, dp = \int \frac{1}{y-1}\, dy$$

$$\log|\ p\ | = \log|\ y-1\ | + C$$

$$\log\left|\frac{p}{y-1}\right| = C$$

$$\left|\frac{p}{y-1}\right| = e^C$$

$$\frac{p}{y-1} = \pm e^C = C\text{（改めておく）}$$

$$p = C(y-1)$$

$$y' = C(y-1)$$

$$\int \frac{1}{y-1}\, dy = \int C\, dx$$

$$\log|\ y-1\ | = Cx + D$$

$$y - 1 = \pm e^{Cx+D} = De^{Cx} \quad \left(\pm e^D\text{を改めて}D\text{とおく}\right)$$

$$\therefore\quad y = De^{Cx} + 1$$

⑵　$yy'' + (y')^2 = 1$

$y' = p$ とおくと $y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy}p$ なので

与式は　$y\dfrac{dp}{dy}p + p^2 = 1$ とかける。

$yp\dfrac{dp}{dy} = 1 - p^2$

$\dfrac{p}{p^2-1}\dfrac{dp}{dy} = -\dfrac{1}{y}$　より　$\displaystyle\int \frac{p}{p^2-1}\frac{dp}{dy} = -\int \frac{1}{y}\,dy$

$\displaystyle\int \frac{p}{p^2-1}dp = -\int \frac{1}{y}\,dy$

$\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{(p^2-1)'}{p^2-1}dp = -\int \frac{1}{y}\,dy$

と表せるので公式 $\boxed{30}$ より

$\frac{1}{2}\log\left|p^2-1\right| = -\log\left|y\right| + C$

$\log\left|p^2-1\right| + 2\log\left|y\right| = C$

$\log\left|p^2-1\right|y^2 = C$

$(p^2-1)y^2 = \pm e^C = B$ とおく

$p^2 = 1 = \dfrac{B}{y^2}$

$p^2 = \dfrac{B}{y^2} + 1$

$p = \pm\sqrt{\dfrac{B+y^2}{y^2}}$

$\dfrac{y}{\sqrt{y^2+B}}\dfrac{dy}{dx} = \pm 1$

$\displaystyle\int \frac{y}{\sqrt{y^2+B}}\frac{dy}{dx}\,dx = \pm\int 1\,dx$

$\displaystyle\int \frac{y}{\sqrt{y^2+B}}\,dy = \pm\int 1\,dx$

ここで $t = y^2 + B$ とおくと

$\dfrac{dt}{dy} = 2y$ $\left(\dfrac{1}{2}dt = ydy\right)$ より

$\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \pm\int 1\,dx$

$\sqrt{t} = \pm x + D$

よって　$t = (x+D)^2$

従って　$y^2 + B = (x+D)^2$

$(x+D)^2 - y^2 = B$　　　　（B，C，D，E は任意定数）

159

⑴ $W(x,\ x^3)=\begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix}=3x^3-x^3=2x^3\neq 0$ ∴ 1 次独立である。

注意 $\neq 0$ は「すべての x について 0」が成立していないという意味

⑵ $W(e^x,\ 2e^x)=\begin{vmatrix} e^x & 2e^x \\ e^x & 2e^x \end{vmatrix}=2e^{2x}-2e^{2x}=0$ ∴ 1 次独立ではない。

注意 $=0$ は「すべての x について 0」という意味

⑶ $W(e^x\cos x,\ e^x\cos 2x)=\begin{vmatrix} e^x\cos x & e^x\cos 2x \\ e^x\cos x-e^x\sin x & e^x\cos 2x-2e^x\sin 2x \end{vmatrix}$

$=e^{2x}\{\cos x(\cos 2x-2\sin 2x)-\cos 2x(\cos x-\sin x)\}\neq 0$ ∴ 1 次独立である。

（たとえば $x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $e^{\pi}(-1)\neq 0$）

160

⑴ $y''-y=1$ ㋐について

$(e^x)^n=e^x$ より $y''-y=e^x-e^x=0$ よって $y=e^x$ は ㋐の解

$(e^{-x})^n=e^{-x}$ より $y''-y=e^{-x}-e^{-x}=0$ よって $y=e^{-x}$ も ㋐の解

また $W(e^x,\ e^{-x})=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}=-e^0-e^0=-2\neq 0$

したがって，これらは $y''-y=0$ の 1 次独立な解である。

⑵ $y=-1$, について $y'=0$，$y''=0$ より $y''-y=0-(-1)=1$ よって

$y=-1$ は $y''-y'=1$ の解である。

⑶ ⑴，⑵より㋐の一般解は $y=Ce^x+De^{-x}-1$ （C，D は任意定数）

161

⑴ $y''+3y'+2y=0$

特性方程式

$\lambda^2+3\lambda+2=0$ より

$(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

∴ $\lambda=-1,\ -2$（2 つの異なる実数解）

∴ $y=Ce^{-x}+De^{-2x}$ （C，D は任意定数）

⑵　$y'' + 4y' + 4y = 0$

特性方程式

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$　より

$(\lambda + 2)^2 = 0$

$\therefore\ \lambda = -2$　（重解）

$\therefore\ y = (C + Dx)\,e^{-2x}$　（C，D は任意定数）

⑶　$y'' + 9y = 0$

特性方程式

$\lambda^2 + 9 = 0$　より

$\lambda = \pm 3i$　（虚数解）

$y = e^{0x}(C\cos 3x + D\sin 3x)$

$\therefore\ y = C\cos 3x + D\sin 3x$　（C，D は任意定数）

⑷　$y'' + y' + 2y = 0$

特性方程式

$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$　より

$\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$　（虚数解）

$\therefore\ y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C\cos\dfrac{\sqrt{7}}{2}x + D\sin\dfrac{\sqrt{7}}{2}x\right)$　（C，D は任意定数）

162

⑴　$y'' + y' - 6y = 0$

特性方程式

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$　$\therefore \lambda = -2,\ 3$　（異なる 2 つの実数解）

$\therefore\ y = Ce^{-2x} + De^{3x}$

$y' = -2Ce^{-2x} + 3De^{3x}$

$x = 0,\ \ y = 2,\ \ y' = 1$ を代入して

$\begin{cases} 2 = C + D \\ 1 = -2C + 3D \end{cases}$　これより　$C = 1,\ \ D = 1$

$\therefore\ y = e^{-2x} + e^{3x}$

⑵　$y'' - 2y' + y = 0$

特性方程式

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \quad \therefore \quad \lambda = 1 \quad (\text{重解})$$

$$\therefore \quad y = (C + Dx)e^x$$

$$y' = De^x + (C + Dx)e^x$$

$x = 0,\ y = 1,\ y' = 2$ を代入して

$$\begin{cases} 1 = C \\ 2 = D + C \end{cases} \quad \text{これより} \quad C = 1,\ D = 1$$

$$\therefore \quad y = (1 + x)e^x$$

⑶　$2y'' + y' + 3y = 0$

特性方程式

$2\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$ より

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{23}i}{4} \quad (\text{虚数解})$$

$$\therefore \quad y = e^{-\frac{1}{4}x}\left(C\cos\frac{\sqrt{23}}{4}x + D\sin\frac{\sqrt{23}}{4}x\right)$$

$$y' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}\left(C\cos\frac{\sqrt{23}}{4}x + D\sin\frac{\sqrt{23}}{4}x\right) + e^{-\frac{1}{4}x}\left(-\frac{\sqrt{23}}{4}C\sin\frac{\sqrt{23}}{4}x + \frac{\sqrt{23}}{4}D\cos\frac{\sqrt{23}}{4}x\right)$$

$x = 0$ のとき $y = 0,\ y' = -2$ を代入

$$\begin{cases} 0 = C \\ -2 = -\frac{1}{4}C + \frac{\sqrt{23}}{4}D \end{cases} \quad \text{これより} \quad C = 0,\ D = -\frac{8}{\sqrt{23}}$$

$$\therefore \quad y = -\frac{8}{\sqrt{23}}e^{-\frac{1}{4}x}\sin\frac{\sqrt{23}}{4}x$$

163　C，D は任意定数

⑴　$y'' - 7y' + 12y = 2x$　㋐

（i）$y''-7y'+12y=0$ の一般解を求める。

特性方程式　$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$

$(\lambda-3)(\lambda-4)=0$　$\lambda = 3,\ 4$

$\therefore\ y = Ce^{3x} + De^{4x}$

（ii）㋐の 1 つの解を $y = Ax + B$ と予想 ㋑　　$y' = A$，$y'' = 0$ を㋐に代入して

$-7A + 12Ax + 12B = 2x$

$\therefore\quad 12A = 2,\quad -7A + 12B = 0$

$A = \dfrac{1}{6},\qquad 12B = 7A$

$B = \dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{72}$

よって㋑は　$y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{72}$

（i）（ii）より㋐の一般解は，$y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{72} + Ce^{3x} + De^{4x}$

⑵　$y'' - 6y' + 10y = x^2 + 1$　㋐

（i）$y''-6y'+10y=0$ の一般解を求める。

特性方程式

$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$

$\lambda = \dfrac{6\pm 2i}{2} = 3\pm i$ よって P.56（iii）より $y = e^{3x}\,(C\cos x + D\sin x)$

（ii）㋐の 1 つの解を $y = Ax^2 + Bx + E$ と予想 ㋑　　$y' = 2Ax + B$，$y'' = 2A$ を㋐に代入して

$2A - 12Ax - 6B + 10Ax^2 + 10Bx + 10E = x^2 + 1$

$10Ax^2 + (-12A + 10B)x + 2A - 6B + 10E = x^2 + 1$

$\begin{cases} 10A = 1 \\ -12A + 10B = 0 \\ 2A - 6B + 10E = 1 \end{cases}$　より $A = \dfrac{1}{10}$，$B = \dfrac{3}{25}$，$E = \dfrac{19}{125}$

$\dfrac{2}{10} - \dfrac{18}{25} + 10E = 1$

よって㋑は　$y = \dfrac{1}{10}x^2 + \dfrac{3}{25}x + \dfrac{19}{125}$

（i）（ii）より㋐の一般解は，$y = \dfrac{1}{10}x^2 + \dfrac{3}{25}x + \dfrac{19}{125} + e^{3x}(C\cos x + D\sin x)$

⑶　$y'' + 2y' - 8y = e^x$　㋐

（i）$y''+2y'-8y=0$ の一般解を求める。

特性方程式

$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$

$(\lambda-2)(\lambda+4)=0$　$\therefore$ $\lambda = 2,\ -4$　よって P.56 $\boxed{5}$（i）より

$y = Ce^{2x} + De^{-4x}$

（ii）㋐の 1 つの解を $y = Ae^x$ と予想 ㋑　　$y' = Ae^x$, $y'' = Ae^x$ を代入して

$Ae^x + 2Ae^x - 8Ae^x = e^x$

$-5A = 1$　$A = -\dfrac{1}{5}$

よって㋑は $y = -\dfrac{1}{5}e^x$

（i）（ii）より㋐の一般解は，$y = -\dfrac{1}{5}e^x + Ce^{2x} + De^{-4x}$

⑷　$y'' - 3y' - 4y = 2\cos x$　㋐

（i）$y''-3y'-4y=0$ の一般解を求める。

特性方程式　$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$

$(\lambda-2)(\lambda+4)=0$　$\therefore$ $\lambda = 2,\ -4$

$y = Ce^{-x} + De^{4x}$

（ii）㋐の 1 つの解を $y = A\cos x + B\sin x$ と予想すると　㋑

$y' = -A\sin x + B\cos x$　㋒

$y'' = -A\cos x - B\sin x$　㋓

㋐に㋑㋒㋓を代入して

$-A\cos x - B\sin x + 3A\sin x - 3B\cos x - 4A\cos x - 4B\sin x = 2\cos x$

よって $(-5A-3B)\cos x + (-5B+3A)\sin x = 2\cos x$

$\begin{cases} -5A-3B=2 \\ -5B+3A=0 \end{cases}$ より $\begin{cases} -25A-15B=10 \\ -15B+9A=0 \end{cases}$　$A = -\dfrac{10}{34} = -\dfrac{5}{17}$　$B = -\dfrac{6}{34} = -\dfrac{3}{17}$

よって㋑は $y = -\dfrac{5}{17}\cos x - \dfrac{3}{17}\sin x$

（i）（ii）より㋐の一般解は，$y = -\dfrac{5}{17}\cos x - \dfrac{3}{17}\sin x + Ce^{-x} + De^{4x}$

⑸ $y'' + 4y = \sin 2x$ ㋐

（i） $y''+4y=0$ ㋑ の一般解を求める。

特性方程式 $\lambda^2+4=0$

$\lambda=\pm 2i$

$y=e^{0x}(C\cos 2x+D\sin 2x)=C\cos 2x+D\sin 2x$

（ii）㋐の 1 つの解を $y = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ と予想 ㋒

（（i） より $y=\cos 2x$，$y=\sin 2x$ が㋑の解なのでこのように予想する。）

$y' = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x(-A\sin 2x + B\cos 2x)$

$=(A+2Bx)\cos 2x+(B-2Ax)\sin 2x$ ㋓

$y'' = 2B\cos 2x+(A+2Bx)(-2\sin 2x)+(-2A)\sin 2x+(B-2Ax)\cdot 2\cos 2x$

$=(4B-4Ax)\cos x+(-4A-4Bx)\sin 2x$ ㋔

㋐に㋒ ㋓ ㋔を代入すると

$(4B-4Ax)\cos x+(-4A-4Bx)\sin 2x$

$+4Ax\cos 2x + 4Bx\sin 2x = \sin 2x$

よって $\begin{cases} -4A=1 \\ 4B=0 \end{cases}$ $A=-\dfrac{1}{4}$，$B=0$

つまり㋒は $y=-\dfrac{1}{4}x\cos 2x$

（i）（ii） より㋐の一般解は， $y=-\dfrac{1}{4}x\cos 2x+C\cos 2x+D\sin 2x$

⑹ $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ ㋐

（i） $y''+2y'+y=0$ ㋑ の一般解を求める。

特性方程式 $\lambda^2+2\lambda+1=0$

$(\lambda+1)^2=0$ $\therefore$ $\lambda=-1$

$\therefore$ $y=(C+D)e^{-x}$

（ii）㋐の 1 つの解を $y = Ax^2e^{-x}$ ㋒と予想

（（i） より $y=e^{-x}$，$y=xe^{-x}$ が㋑の解なのでこのように予想する。）

$y'=A(2xe^{-x}+x^2(-e^{x}))=Ae^{-x}(2x-x^2)$ ㋓

$y''=A\{(-e^{-x})(2x-x^2)=e^{-x}(2-2x)\}$

$=Ae^{-x}(-2x+x^2+2-2x)$

$=Ae^{-x}(x^2-4x+2)$ ㋔

㋐に㋑㋒㋓を代入して $Ae^{-x}(x^2-4x+2+4x-2x^2+x^2)=e^{-x}$

よって $2A=1$ $\therefore$ $A=\dfrac{1}{2}$

よって㋒は $y=\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$

（i）（ii） より㋐の一般解は， $y=\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}+(C+Dx)e^{-x}$

164　C，D は任意定数

⑴　$y'' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$　㋐

（i）$y'' + y = 0$　の一般解を求める。

特性方程式　$\lambda^2 + 1 = 0$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda = \pm i$$

よって　$y = e^{0x}(C\cos x + D\sin x)$

$$= C\cos x + D\sin x$$

（ii）㋐の一つの解を求める。

$y_1 = \cos x$，$y_2 = \sin x$　とする

$$W(\cos x,\ \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

したがって　㋐の 1 つの解は

$$y = -\cos x \int \frac{\sin x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{1} dx + \sin x \int \frac{\cos x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{1} dx$$

$$= -\cos x \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \sin x \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$　（公式$\boxed{29}$）

$\cos x = t$　とおくと　$-\sin x = \dfrac{dt}{dx}$

$\sin x\, dx = (-1)\, dt$

$$= \int \frac{(-1)}{t^2} dt = t^{-1} + E = \frac{1}{\cos x} + E$$

一方 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$

$\sin x = t$　とおくと　$\cos x = \dfrac{dt}{dx}$

$\cos x\, dx = dt$

$= \displaystyle\int \frac{1}{1-t^2} dt$（公式$\boxed{29}$）

$= \displaystyle\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt$（公式$\boxed{1}$による分解）

$= \dfrac{1}{2}\left(\log|t-1| - \log|t+1| \right) + E$　　公式$\boxed{25}$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + E$$

$$= -\cos x\left(\frac{1}{\cos x}\right) + \sin x \cdot \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|$$

$$= -1 + \sin x \cdot \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|$$

（i）（ii）より㋐の一般解は，$y = -1 + \dfrac{1}{2}(\sin x)\log\left|\dfrac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C\cos x + D\sin x$

⑵　$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\log x$　㋐

（i）$y'' - 4y' + 4y = 0$ の一般解を求める。

特性方程式　$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$$(\lambda - 2)^2 = -1$$

$$\lambda = 2$$

よって　$y = (C + Dx)e^{2x}$

（ii）㋐の一つの解を求める。

$y_1 = e^{2x}$，$y_2 = xe^{2x}$　とすると

$$W(e^{2x},\ xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} + 2xe^{4x} - 2xe^{x} = e^{4x}$$

したがって㋐の 1 つの解は

$$y = -e^{2x}\int \frac{xe^{2x}e^{2x}\log x}{e^{4x}}dx + xe^{2x}\int \frac{e^{2x}e^{2x}\log x}{e^{4x}}dx$$

$$= -e^{2x}\int x\cdot\log x\,dx + xe^{2x}\int \log x\,dx$$

$$\int x\log x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \int\left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(\log x\right)'dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$　公式$\boxed{31}$

$$\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx = x\log x - \int x\left(\log x\right)'dx$$　公式$\boxed{31}$

$$= x\log x - \int 1\,dx$$

$$= -e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\int x\,dx\right) + xe^{2x}(x\log x - x)$$

$$= -e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2\right) + xe^{2x}(x\log x - x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x}\log x - \frac{3}{4}x^2e^{2x}$$

（i）（ii）より㋐の一般解は　$y = \frac{1}{2}x^2e^{2x}\log x - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + (C + Dx)e^{2x}$

165　C, D は任意定数

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t & \cdots ① \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t & \cdots ② \end{cases}$

①の両辺を t で微分すると　$x'' = y' + 1$　　よって　$y' = x'' - 1$

②をこれに代入して　$x'' - 1 = x + t$

よって　$x'' - x = t + 1$　㋐

[1]　$x'' - x = 0$ の一般解を求める。

特性方程式　$\lambda^2 - 1 = 0$　　$\lambda = \pm 1$

よって　$x = Ce^{-t} + De^{t}$

[2]　㋐の 1 つの解を　$x = At + B$ と予想 ㋑　　$x' = A$ ㋒, $x'' = 0$　㋓より

㋐に㋑ ㋓を代入して

$-At - B = t + 1$

$A = -1,\ B = -1$

よって㋑は　∴ $x = -t - 1$

[1], [2]より　∴　$x = -t - 1 + Ce^{-t} + De^{t}$ が㋐の一般解。

よって　$x' = -1 - Ce^{-t} + De^{2t}$ なので

①より　$y = x' - t$

$= -1 - Ce^{-t} + De^{t} - t$

したがって　$\begin{cases} x = -t - 1 + Ce^{-t} + De^{t} \\ y = -t - 1 - Ce^{-t} + De^{t} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y + e^t & \cdots ① \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - e^t & \cdots ② \end{cases}$

よって　$y' = -x + y - e^t$　②′

①の両辺を t で微分して $x'' = 3x' + y' + e^t$

②を代入して　$x'' = 3x' - x + y - e^t + e^t$

$= 3x' - x + y$

①より $y = x' - 3x - e^t$ なのでこれを代入して

$x'' = 3x' - x + x' - 3x - e^t$ より $x'' - 4x' + 4x = -e^t$　㋐

（i） $x'' - 4x' + 4x = 0$ の一般解を求める

特性方程式

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0$　$\lambda = 2$

$\therefore$　$x = (C + Dt)e^{2t}$

（ii）㋐の 1 つの解を　$x = Ae^t$ と予想すると　$x' = Ae^t$, $x'' = Ae^t$　これらを㋐に代入して

$Ae^t - 4Ae^t + 4Ae^t = -e^t$

$A = -1$　$\therefore$　$x = -e^t$

（i）（ii）より　$\therefore$　$x = -e^t + (C + Dt)e^{2t}$　㋑が㋐の一般解。

よって $x' = -e^t + Dte^{2t} + (C + Dt) \cdot 2e^{2t}$　㋒

①より $y = x' - 3x - e^t$　なのでこれに㋑ ㋒を代入して

$$y = -e^t + c_2 e^{2t} + 2(C + Dt)e^{2t} + 3e^t - 3(C + Dt)e^{2t} - e^t$$

$$= e^t + c_2 e^{2t} - (C + Dt)e^{2t} = e^t - (C - D + Dt)e^{2t}$$

したがって　$\begin{cases} x = -e^t + (C + Dt)e^{2t} \\ y = e^t - (C - D + Dt)e^{2t} \end{cases}$

166　C, D は任意定数

⑴　$x^2y'' + xy' - y = 0$　㋐

$y = x^\lambda$　の形の解を予想すると

$y' = \lambda x^{\lambda-1}$　$y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

これらを㋐に代入して

$\lambda(\lambda-1)x^\lambda + \lambda x^\lambda - x^\lambda = 0$

$\lambda^2 - \lambda + \lambda - 1 = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0$　$(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$

$\therefore$　$\lambda = -1,\ 1$

したがって　$y = x$ と $y = x^{-1}$ は㋐の解,

これらは 1 次独立なので㋐の一般解は　$y = Cx + Dx^{-1}$

⑵　$x^2y'' + 3xy' + y = 0$　㋐

$y = x^\lambda$　の形の解を予想すると

$y' = \lambda x^{\lambda-1}$,　$y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

これらを㋐に代入して

$\lambda(\lambda-1)x^\lambda + 3\lambda x^\lambda + x^\lambda = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda+1)^2 = 0$　$\lambda = -1$

したがって　$y = x^{-1}$ は㋐の解である。また $y = Cx^{-1}$ も解である。（C は任意定数）

C を x の関数 u として　$y = ux^{-1}$ とおくと㋑

$y' = u'x^{-1} - ux^{-2}$

$y'' = u''x^{-1} - 2u'x^{-2} + 2ux^{-2}$ これらを㋐に代入して

$u''x - 2u' + 2ux^{-1} + 3u' - 3ux^{-1} + ux^{-1} = 0$

$u''x + u' = 0$ より　$(u'x)' = 0$

$\therefore$　$u'x = C$　$u' = \dfrac{C}{x}$　$\therefore$　$u = C\log|x| + D$

よって，㋑に代入して　$y = x^{-1}(C\log|x| + D)$

167

⑴　$xy'' - y' + (1-x)y = 0$　㋐

$y = e^x$　$y' = e^x$，$y'' = e^x$　よりこれらを㋐の左辺に代入すると

$xy'' - y' + (1-x)y = xe^x - e^x + (1-x)e^x = 0$

したがって，$y = e^x$　は微分方程式を満たすので 1 つの解である。

⑵　⑴より

$y = Ce^x$ も解である。（C は任意定数）

C と x の関数 u として　$y = ue^x$　とおく　㋑

$y' = u'e^x + ue^x$，$y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$

これらを㋐に代入して

$xu''e^x + 2xu'e^x + xue^x - u'e^x - ue^x + ue^x - xue^x = 0$

$xu'' + 2xu' - u' = 0$

$xu'' + (2x-1)u' = 0$

$u' = p$　とおくと　$u'' = p'$

$xp' + (2x-1)p = 0$　　$x\dfrac{dp}{dx} = (1-2x)p$ より $\dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{1-2x}{x}$

$$\int \frac{1}{p}\,dp = \int \frac{1-2x}{x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - 2\right)dx$$

よって　$\log|\,p\,| = \log|\,x\,| - 2x + C_1$

$\log\left|\dfrac{p}{x}\right| = -2x + C_1$ より　$\dfrac{p}{x} = \pm e^{-2x+C_1}$

$= \pm e^{C_1}\cdot e^{-2x}$

$= C_1 e^{-2x}$　　（$\pm e^{C_1}$を改めてC_1とおく）

$p = C_1 xe^{-2x}$

$u' = C_1 xe^{-2x}$ より　$u = C_1\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx = C_1\left\{\int x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)' dx\right\}$

$= C_1\left\{x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\right) - \displaystyle\int (x)'\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx\right\}$　（公式$\boxed{31}$）

$= C_1\left\{-\dfrac{1}{2}xe^{-2x} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^{-2x}\,dx\right\} = C_1\left(-\dfrac{1}{2}xe^{-2x} - \dfrac{1}{4}e^{-2x} + C_2\right)$

C_1，C_2 を改めて D として $u = C\left(-\dfrac{1}{2}xe^{-2x} - \dfrac{1}{4}e^{-2x}\right) + D$

したがってこれを㋑に代入すると　$y = -\dfrac{C}{4}(2x+1)e^{-x} + De^x$　（C，D は任意定数）

B

168　C，D は任意定数

⑴　$y'' - 2y' - 3y = e^x \cos x$　㋐

［1］ $y'' - 2y' - 3y = 0$ の一般解を求める。

特性方程式，$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ より

$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$　$\therefore$　$\lambda = 3$，-1

$y = Ce^{3x} + De^{-x}$

［2］㋐の１つの解を $y = Ae^x \cos x + Be^x \sin x = e^x (A\cos x + B\sin x)$　㋑

$$y' = e^x (A\cos x + B\sin x) + e^x (-A\sin x + B\cos x)$$

$$= e^x \left\{(A+B)\cos x + (B-A)\sin x\right\}$$ ㋒

$$y'' = e^x \left\{(A+B)\cos x + (B-A)\sin x\right\} + e^x \left\{(-A-B)\sin x + (B-A)\cos x\right\}$$

$$= e^x (2B\cos x - 2Ax)^x$$ ㋓

㋐に㋑ ㋒ ㋓を代入して

$$-2Ae^x \sin x + 2Be^x \cos x - 2Ae^x \cos x + 2Ae^x \sin x$$

$$-2Be^x \sin x - 2Be^x \cos x - 3Ae^x \cos x - 3Be^x \sin x$$

$$= e^x \cos x$$

$$e^x (2B\cos x - 2A\sin x) + e^x \left\{(-2A - 2B)\cos x + (-2B + 2A)\sin x\right\}$$

$$+ e^x (-3A\cos x + (-3B)\sin x)$$

$$= e^x \cos x$$

よって　$\begin{cases} -2A + 2A - 2B - 3B = 0 \\ 2B - 22A - 2B - 3A = 1 \end{cases}$　より　$A = \dfrac{1}{5}$，$B = 0$

$\therefore$　$y = -\dfrac{1}{5} e^x \cos x$

［1］，［2］より㋐の一般解は　$y = -\dfrac{1}{5} e^x \cos x + Ce^{3x} + De^{-x}$

(2)　$y'' - 2y' + y = x\sin x$　㋐

［1］ $y''-2y'+y=0$ の一般解を求める。

特性方程式，$\lambda^2-2\lambda+1=0$ より

$$(\lambda-1)^2=0 \quad \lambda=1 \quad \therefore \quad y=(C+Dx)e^x$$

［2］㋐の 1 つの解を　$y = x(A\sin x + B\cos x) + C\sin x + D\cos x$ と予想する。㋑

$$y' = A\sin x + B\cos x + x(A\cos x - B\sin x) + C\cos x - D\sin x$$

$$= x(A\cos x - B\sin x) + (A-D)\sin x + (B+C)\cos x \quad ㋒$$

$$y'' = A\cos x - B\sin x + x(-A\sin x - B\cos x) + (A-D)\cos x + (-B-C)\sin x$$

$$= x(-A\sin x - B\cos x) + (2A-D)\cos x + (-2B-C)\sin x \, ㋓$$

㋐に㋑ ㋒ ㋓を代入して

$$x(-A\sin x - B\cos x) - (2A-D)\cos x + (-2B-C)\sin x$$

$$+x(-2A\cos x + 2B\sin x) + (-2A+2D)\sin x + (-2B-2C)\cos c$$

$$+x(A\sin x + B\cos x) + C\sin x + D\cos x = x\sin x$$

よって

$$\begin{cases} 2B=1 \\ -2A=0 \\ -2B-2A+2D=0 \\ 2A-D-2B-2C+D=0 \end{cases}$$

より $A=0$，$B=\dfrac{1}{2}$，$C=-\dfrac{1}{2}$，$D=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

［1］，［2］より㋐の一般解は　$y=\dfrac{1}{2}x\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x+(C+Dx)e^x$

⑶　$y'' - 3y' + 2y = x + e^{2x}\cos x$　㋐

［1］ $y''-3y'+2y=0$ の一般解を求める。

特性方程式，$\lambda^2-3\lambda+2=0$

$(\lambda-1)(\lambda-2)=0$　∴　$\lambda=1,\ 2$　　$y=Ce^{x}+De^{2x}$

［2］㋐の 1 つの解を　$y = Ax + B + Ce^{2x}\cos x + De^{2x}\sin x$

$= Ax+B+e^{2x}(C\cos x+D\sin x)$ と予想する。㋑

$$y' = A+2e^{2x}(C\cos x+D\sin x)+e^{2x}(-C\sin x+D\cos x)$$

$$= A+e^{2x}\left\{(2C+D)\cos x+(2D-C)\sin x\right\}\quad ㋒$$

$$y'' = 2e^{2x}\left\{(2C+D)\cos x+(2D-C)\sin x\right\}+e^{2x}\left\{(-2C-D)\sin x+(2D-C)\cos x\right\}$$

$$= e^{2x}\left\{(3C+4D)\cos x+(3D-4C)\sin x\right\}\quad ㋓$$

㋐に㋑ ㋒ ㋓を代入すると

$$e^{2x}\left\{(3C+4D)\cos x+(3D-4C)\sin x\right\}$$
$$-3A+e^{2x}\left\{(-6C-3D)\cos x+(-6D+3C)\sin x\right\}$$
$$+2Ax+2B+e^{2x}\left\{2C\cos x+2D\sin x\right\}$$
$$= x+e^{2x}\cos x$$

よって

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ -3A + 2B = 0 \\ 3C + 4D - 6C - 3D + 2C = 1 \\ -4C + 3D + 3C - 6D + 2D = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{4} \\ C = -\frac{1}{2} \\ D = \frac{1}{2} \end{array}$$

∴　$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{2}e^{2x}\sin x$

［1］，［2］より㋐の一般解は　$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}e^{2x}\cos x+\frac{1}{2}e^{2x}\sin x+Ce^{x}+De^{2x}$

169

(1)　$y'' - 2y' + 2y = x^2$　㋐

［1］ $y'' - 2y' + 2y = 0$ の一般解を求める。

特性方程式　　$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4}i}{2} = 1 \pm i$$

P.56（iii）より　$y = e^x(C\cos x + D\sin x)$

［2］㋐の 1 つの解を　$y = Ax^2 + Bx + C$ と予想すると

$$y' = 2Ax + B$$

$$y'' = 2A$$

これらを㋐に代入して

$$2A - 4Ax - 2B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ -4A + 2B = 0 \\ 2A - 2B + 2C = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad A = \frac{1}{2},\ B = 1,\ C = \frac{1}{2}$$

よって　$y = \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2}$　は㋐の一つの解。

［1］，［2］より㋐の一般解は　　∴　$y = \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2} + e^x(C\cos x + D\sin x)$　㋑

よって　$y' = x + 1 + e^x(C\cos x + D\sin x) + e^x(-C\sin x + D\cos x)$

$x = 0$　$y = \dfrac{1}{2}$　$y' = \dfrac{1}{2}$ を代入して

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + C \\ \dfrac{1}{2} = 1 + C + D \end{cases} \quad \text{より} \quad C = 0,\ D = -\frac{1}{2}$$

㋑に代入して　$y = \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^x \sin x$

⑵　$y'' - 5y' + 6y = e^{x} + e^{2x}$　㋐

［1］$y'' - 5y' + 6y = 0$ の一般解を求める。

特性方程式　$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$　$\therefore$ $\lambda = 2$，3

P.56（i）より　$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

（注意）
（i）より $y = e^{2x}$ が $y'' - 5y' + 6y = 0$ の解なので
第 2 項を Be^{2x} としても B が求められない

［2］㋐の 1 つの解を $y = Ae^{x} + Bxe^{2x}$ と予想する

$y' = Ae^{x} + Be^{2x} + 2Bxe^{2x}$

$y'' = Ae^{x} + 4Be^{2x} + 4Bxe^{2x}$

これらを㋐に代入して

$$Ae^{x} + 4Be^{2x} + 4Bxe^{2x} - 5Ae^{x} - 5Be^{2x} - 10Bxe^{2x}$$
$$+ 6Ae^{x} + 6Bxe^{2x} = e^{x} + e^{2x}$$

よって　$2Ae^{x} - Be^{2x} = e^{x} + e^{2x}$

$\begin{cases} 2A = 1 \\ -B = 1 \end{cases}$ より　$A = \dfrac{1}{2}$，$B = -1$

［1］，［2］より㋐の一般解は $y = \dfrac{1}{2}e^{x} - xe^{2x} + Ce^{2x} + De^{3x}$　㋑

$$y' = \frac{1}{2}e^{x} - e^{2x} - 2xe^{2x} + 2Ce^{2x} + 3De^{3x}$$

$x = 0$　$y = -1$　$y' = 1$ を代入して

$\begin{cases} -1 = \dfrac{1}{2} + C + D \\ 1 = \dfrac{1}{2} - 1 + 2C + 3D \end{cases}$ より　$C = -6$，$D = \dfrac{9}{2}$

㋑に代入して　$y = \dfrac{1}{2}e^{x} - xe^{2x} - 6e^{2x} + \dfrac{9}{2}e^{3x}$

⑶　$y'' + y' - 6y = x + \sin x$　㋐

［1］ $y'' + y' - 6y = 0$ の一般解を求める。

特性方程式　$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$　∴ $\lambda = 2, -3$

P.56（ⅰ）より　$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$

［2］㋐の１つの解を $y = Ax + B + C\sin x + D\cos x$ と予想すると

$$y' = A + C\cos x - D\sin x$$

$$y'' = -C\sin x - D\cos x$$

これらを㋐に代入して

$$-C\sin x - D\cos x + A + C\cos x - D\sin x$$
$$-6Ax - 6B - 6C\sin x - 6D\cos x = x + \sin x$$

よって　$-6Ax + (A - 6B) + (-C - D - 6C)\sin x + (-D + C - 6D)\cos x = x + \sin x$

$$\begin{cases} -6A = 1 \\ A - 6B = 0 \\ -C - D - 6C = 1 \\ -D + C - 6D = 0 \end{cases}$$

より

$A = -\dfrac{1}{6}$　$B = -\dfrac{1}{36}$

$C = -\dfrac{7}{50}$　$D = -\dfrac{1}{50}$

［1］，［2］より㋐の一般解は　$y = -\dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{36} - \dfrac{7}{50}\sin x - \dfrac{1}{50}\cos x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$　㋑

$$y' = -\frac{1}{6} - \frac{7}{50}\cos x + \frac{1}{50}\sin x + 2C_1 e^{2x} - 3C_2 e^{-3x}$$

$x = 0$　$y = 0$　$y' = 1$ を代入して

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{1}{36} - \dfrac{1}{50} + C_1 + C_2 \\ 1 = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{7}{50} + 2C_1 - 3C_2 \end{cases}$$

より

$C_1 = \dfrac{29}{100}$

$C_2 = -\dfrac{109}{450}$

㋑に代入して　$y = -\dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{36} - \dfrac{7}{50}\sin x - \dfrac{1}{50}\cos x + \dfrac{29}{100}e^{2x} - \dfrac{109}{450}e^{-3x}$

170　$y'' + 2y' + ay = 0$　　（$a > 1$）

⑴　特性方程式

$\lambda^2 + 2\lambda + a = 0$

$\lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4a}}{2} = -1 \pm \sqrt{a-1}\, i$　（$a>1$ より $a-1>0$）

P.56（iii）より∴　$y = e^{-x}(C\cos(\sqrt{a-1}\,x) + D(\sin\sqrt{a-1}\,x))$　（C，D は任意定数）㋐

⑵　$y' = -e^{-x}(C\cos(\sqrt{a-1}\,x) + D\sin(\sqrt{a-1}\,x))$

$+e^{-x}(-\sqrt{a-1}\,C\sin(\sqrt{a-1}\,x) + \sqrt{a-1}\,D\cos(\sqrt{a-1}\,x))$

$y(0) = 1$，$y'(0) = -1$ より

$\begin{cases} 1 = C \\ -1 = -C + \sqrt{a-1}\,D \end{cases}$　より　$\begin{matrix} C = 1 \\ D = 0 \end{matrix}$

㋐に代入して　$y = e^{-x}\cos(\sqrt{a-1}\,x)$

⑶　$y(\pi) = 0$ より $0 = e^{-\pi}\cos(\sqrt{a-1}\pi)$

よって　$0 = \cos(\sqrt{a-1}\,\pi)$

したがって　$\sqrt{a-1}\,\pi = \dfrac{\pi}{2} + n\pi = \dfrac{2n+1}{2}\pi$　（n は整数）

よって　$a = \dfrac{(2n+1)^2}{4} + 1$　（n は整数）

171

⑴　$\alpha = 0$ より

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y & ① \quad x' = -y \text{ とかく。} \\ \dfrac{dy}{dt} = x & ② \quad y' = -y \text{ とかく。} \end{cases}$$

①の両辺を t で微分すると　$x'' = -y'$

②を代入して　$x'' = -x$

よって　$x'' + x = 0$　㋐

特性方程式　$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i$　　P.56（iii）より㋐の一般解は $x = e^{0t}(C\cos t + D\sin t)$

つまり $x(t) = C\cos t + D\sin t$　㋑

よって $x'(t) = -C\sin t + D\cos t$

①より　$y = -x'$

$= -(-C\sin t + D\cos t)$

$= C\sin t - D\cos t$　㋒

$x(0) = 1,\ \ y(0) = 1$　より　㋑　㋒は

$$\begin{cases} 1 = C \\ 1 = -D \end{cases}$$

㋑　㋒に代入して　$\begin{cases} x(t) = \cos t - \sin t \\ y(t) = \sin t + \cos t \end{cases}$

(2)　$\alpha \neq 0$ より

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - y & \cdots① \quad x' = \alpha x - y \text{ とかく。} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \alpha y & \cdots② \quad y' = x + \alpha y \text{ とかく。} \end{cases}$$

①の両辺を t で微分すると　$x'' = \alpha x' - y'$

①，②を代入して　$x'' = \alpha(\alpha x - y) - (x + \alpha y)$

$= \alpha^2 x - \alpha y - x - \alpha y$

$= (\alpha^2 - 1)x - 2\alpha y$

①より　$y = \alpha x - x'$ であるので

$x'' = (\alpha^2 - 1)x - 2\alpha(\alpha x - x')$

$= (\alpha^2 - 1)x - 2\alpha^2 x + 2\alpha x'$

$x'' - 2\alpha x' + (1 + \alpha^2)x = 0$

特性方程式　$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (1 + \alpha^2) = 0$

$$\lambda = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(1+\alpha^2)}}{2} = \alpha \pm i$$　（←P.56（iii））

$\therefore$　$x(t) = e^{\alpha t}(C\cos t + D\sin t)$　㋐

よって　$x'(t) = \alpha e^{dt}(C\cos t + D\sin t) + e^{\alpha t}(-C\sin t + D\cos t)$

$= e^{\alpha t}\{(\alpha C + D)\cos t + (\alpha D - C)\sin t\}$ ㋑

よって①より $y = \alpha x - x'$ なので

㋐ ㋑を代入して

$y = e^{\alpha t}\{\alpha C\cos t + \alpha D\sin t\}$

$+ e^{\alpha t}\{(-\alpha C - D)\cos t + (-\alpha D + C)\sin t\}$

$= e^{\alpha t}(-D\cos t + C\sin t)$　㋒

$x(0) = 1,\ \ y(0) = 1$　より

$$\begin{cases} 1 = C & (㋐\text{より}) \\ 1 = -D & (㋒\text{より}) \end{cases}$$

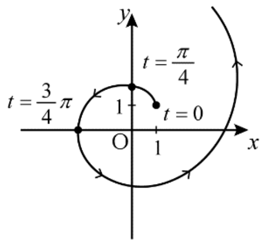
㋐ ㋒に代入して
$$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t}(\cos t - \sin t) \text{ ㋓} \\ y(t) = e^{\alpha t}(\sin t + \cos t) \text{ ㋔} \end{cases}$$

$\left(x(t) = e^{\alpha t} \cdot \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{3}{4}\pi\right) \right.$（公式$\boxed{10}$(1)より）$\Big)$

$\left(y(t) = e^{\alpha t} \cdot \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \right.$（公式$\boxed{10}$(1)より）$\Big)$

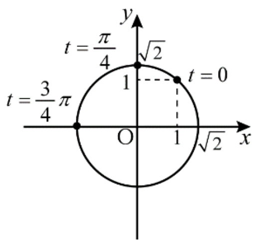
(3)

（i） $\alpha > 0$ のとき



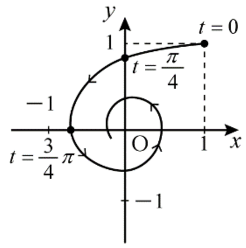
原点 O からの距離 r は増加。

（ii） $\alpha = 0$ のとき



原点 O からの距離 r は一定。

（iii） $\alpha < 0$ のとき



原点 O からの距離 r は減少。
$t \leftarrow \infty$ で $(x,\ y) \leftarrow (0,\ 0)$

（注意）

㊁より $x^2 = e^{2\alpha t}(\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t) = e^{2\alpha t}(1 - \sin 2t)$　㊁′　（公式 $\boxed{8}$ $\boxed{10}$ ）

㊂より $y^2 = e^{2\alpha t}(\cos^2 t + 2\cos t \sin t + \sin^2 t) = e^{2\alpha t}(1 + \sin 2t)$　㊂′

㊁′ + ㊂′ より　$x^2 + y^2 = 2e^{2\alpha t}$

P.4 極座標表示より　$r^2 = 2e^{2\alpha t}$

r は原点からの距離で $r > 0$ より　$r^2 = \sqrt{2}e^{2\alpha t}$

（r は $\alpha > 0$ のとき増加関数， $\alpha < 0$ のとき減少関数， $\alpha = 0$ のとき定数関数）

（i）（iii）のとき

	t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$
㊁より	x	1	0	$-\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi\alpha}$
㊂より	y	1	$\sqrt{2}e^{\frac{x}{4}\alpha}$	0

（ii）のとき $r = \sqrt{2}$

172

(1)　$x^2 y'' + 2xy' + 5y = 0$ はオイラーの微分方程式のタイプである。（$a = 2$，$b = 5$）

$x = e^t$ とすると　$\dfrac{d^2 y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{dy}{dt}e^{-t}$ などを用いて
y と t の微分方程式に直せる。$\boxed{教}$ P.200

P.56 より
特性方程式

$$\lambda^2 + \lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-20}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2}$$

よって P.56（iii）より　$y = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C\cos\dfrac{\sqrt{19}}{2}t + D\sin\dfrac{\sqrt{19}}{2}t\right)$　（$x = e^t$ より $\log x = t$ ）

$$y = x^{-\frac{1}{2}}\left(C\cos\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\log x\right) + D\sin\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\log x\right)\right)$$　（C，D は任意定数）

⑵　$x^2y'' - 4xy' + 4y = \log x$ はオイラーの微分方程式のタイプである。（$a = -4$，$b = 4$）

$x = e^t$ とすると　$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 4y = t$　㋐

（ⅰ）$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0$ の一般解を求める。

特性方程式

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$　$\lambda = 1,\ 4$　P.56（ⅰ）より

$\therefore\quad y = Ce^t + De^{4y}$

（ⅱ）㋐の 1 つの解を　$y = At + B$ と予想すると

$\dfrac{dy}{dt} = A,\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$ であるから，これらを㋐に代入して

$-5A + 4At + 4B = t$

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ -5A + 4B = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{array}{l} A = \dfrac{1}{4} \\ B = \dfrac{5}{16} \end{array}$$

$\therefore\quad y = \dfrac{1}{4}t + \dfrac{5}{16}$　は㋐の 1 つの解

（ⅰ）（ⅱ）より㋐の一般解は　$y = \dfrac{1}{4}t + \dfrac{5}{16} + Ce^t + De^{4t}$　（$x = e^t$ より $\log x = t$）

$y = \dfrac{1}{4}\log x + \dfrac{5}{16} + Cx + Dx^4$　（C，D は任意定数）

173

⑴　$y = e^x$　$y' = e^x$　$y'' = e^x$　よりこれらを与式左辺に代入すると

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = e^x - \frac{x}{x-1}e^x + \frac{1}{x-1}e^x$$

$$= \left(1 - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right)e^x = \left(\frac{x-1-x+1}{x-1}\right)e^x = 0$$

となるので，$y = e^x$ は同次方程式の解である。

⑵　⑴より $y=Be^x$（B は任意定数）も $y''-\dfrac{x}{x-1}y'+\dfrac{1}{x-1}y=0$ の解である。B を x の関数 u として

$y=ue^x$ ㋐とおく。（P.52（ⅱ）と同様の定数変化法）

$y'=u'e^x+ue^x$ ㋑，　$y''=u''e^x+2u'e^x+ue^x$ ㋒を与式 $y''-\dfrac{x}{x-1}y'+\dfrac{1}{x-1}y=x-1$ に代入すると

$$u''e^x+2u'e^x+ue^x-\frac{x}{x-1}(u'e^x+ue^x)+\frac{1}{x-1}ue^x=x-1$$

$$e^xu''+\frac{x-2}{x-1}e^xu'=x-1$$

$u'=v$　とおくと　$u''=v'$　なので

$$e^xv'+\frac{x-2}{x-1}e^xv=x-1$$

$$v'+\frac{x-2}{x-1}v=e^{-x}(x-1)\quad ㋓$$

㋓の一般解を求める為に

（ⅰ）　同次方程式　$v'+\dfrac{x-2}{x-1}v=0$ の一般解を求める。

$$v'=-\frac{x-2}{x-1}v \quad より \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=-\frac{x-2}{x-1}$$

よって　$\displaystyle\int\frac{1}{v}dv=-\int\frac{x-2}{x-1}dx=-\int\frac{x-1-1}{x-1}dx=-\int\left(1-\frac{1}{x-1}\right)dx$

$$\log|v|=-(x-\log|x-1|)+C$$

$$=-x+\log|x-1|+C \quad より \quad \log\left|\frac{v}{x-1}\right|=-x+C$$

$$\frac{v}{x-1}=\pm e^{C-x}=Be^{-x} \quad とおく$$

$$v=B(x-1)e^{-x}$$

（ⅱ）　B を x の関数 $c(x)$ として　$v=c(x)(x-1)e^{-x}=c(x)(xe^{-x}-e^{-x})$ ㋔とおくと

$v'=c'(x)(x-1)e^{-x}+c(x)(2e^{-x}-xe^{-x})$ より ㋕

㋓に㋔ ㋕を代入して

$$c'(x)(x-1)e^{-x}+c(x)(2e^{-x}-xe^{-x})$$
$$+\frac{x-2}{x-1}c(x)(x-1)e^{-x}=e^{-x}(x-1)$$

$$\therefore\quad c'(x)(x-1)e^{-x}=e^{-x}(x-1)$$

$$c'(x)=1$$

したがって　$c(x)=x+C$

$\therefore$　$v=(x+C)(x-1)e^{-x}$

よって

$$u' = (x+C)(x-1)e^{-x}$$

$$u = \int (x^2+(C-1)x-C)e^{-x}dx$$

$$= \int \left\{ x^2+(C-1)x+C \right\} (-e^{-x})' \, dx$$

$$= \left\{ x^2+(C-1)x+C \right\}(-e^{x}) - \int \left\{ x^2+(C-1)x+C \right\}' (-e^{-x}) \, dx$$ （公式$\boxed{31}$）

$$= -(x^2+(C-1)x-C)e^{-x} + \int (2x+C-1)e^{-x}dx$$

$$\left(\begin{array}{l} \displaystyle\int (2x+C-1)e^{-x} = \int (2x+C-1)(-e^{-x})' \, dx \\ \displaystyle = (2x+C-1)(-e^{x}) - \int (2x+C-1)'(-e^{-x}) \, dx \quad \text{（公式}\boxed{31}\text{）} \end{array} \right)$$

$$= -(x^2+(C-1)x-C)e^{-x} + \left(-(2x+C-1)e^{-x} + \int 2e^{-x}dx \right)$$

$$= -(x^2+(C-1)x-C)e^{-x} - (2x+C-1)e^{-x} - 2e^{-x} + D$$

$$= -(x^2+(C+1)x+1)e^{-x} + D$$

これを㋐に代入して　$y = -(x^2+(C+1)x+1) + De^{x}$　（C，D は任意定数）

174　C, D は任意定数

(1)　$t=\int e^{-\int dx}\,dx=\int e^{-x+C}\,dx=-e^{-x}\cdot e^{C}$

$\therefore$　$t=-e^{-x}$ と変換すると $\dfrac{dt}{dx}=e^{-x}$ なので ㋐

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-x}\frac{dy}{dt}\quad ㋑$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)\frac{dy}{dt}+e^{-x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\quad（公式\ \boxed{22}\ ）$$

$$=-e^{-x}\frac{dy}{dt}+e^{-x}\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}\quad\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right)$$

$$=-e^{-x}\frac{dy}{dt}+e^{-2x}\frac{d^2y}{dt^2}\quad ㋒\quad（㋐より）$$

与式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+e^{-2x}y=0$ に㋑ ㋒を代入して

$$-e^{-x}\frac{dy}{dt}+e^{-2x}\frac{d^2y}{dt^2}+e^{-x}\frac{dy}{dt}+e^{-2x}y=0$$

$$e^{-2x}\frac{d^2y}{dt^2}+e^{-2x}y=0$$

$$\therefore\quad\frac{d^2y}{dt^2}+y=0\quad ㋓$$

特性方程式　$\lambda^2+1=0$　$\therefore$　$\lambda=\pm i$　P.56 (iii) より㋓の一般解は

$y=e^{0t}(C\cos t+D\sin t)$ なので

$y=C\cos t+D\sin t$

ここに　$t=-e^{-x}$ を代入して

$y=C\cos e^{-x}-D\sin e^{-x}$

(2)

$$t=\int e^{\int \frac{1}{\tan x}dx}dx \qquad \left[\int \frac{1}{\tan x}dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx=\log|\sin x|+C \quad (公式\boxed{30})\right]$$

$$=\int e^{\log|\sin x|+C}dx=\pm e^{C}\int \sin x\,dx=-(\cos x)\cdot(\pm e^{C}) \left[e^{\log|\sin x|}=|\sin x| \quad (公式\boxed{5})\right]$$

今、$t=-\cos x$ ㋐とすると $\dfrac{dt}{dx}=\sin x$ なので

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\sin x\frac{dy}{dt} \quad ㋑$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\sin x)\frac{dy}{dt}+\sin x\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) \quad (公式\ \boxed{22}\ )$$

$$=\cos x\frac{dy}{dt}+\sin x\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx} \qquad \left[\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt}\frac{dt}{dx}\right]$$

$$=\cos x\frac{dy}{dt}+\sin^2 x\frac{d^2y}{dt^2} \quad ㋒$$

㋑ ㋒を与式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{1}{\tan x}\dfrac{dy}{dx}+(\sin x)^2y=\cos x\cdot\sin^2 x$ に代入して

$$\cos x\frac{dy}{dt}+\sin^2 x\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{\tan x}\left(\sin x\frac{dy}{dt}\right)+(\sin^2 x)y=\cos x\cdot\sin^2 x$$ 両辺を $\sin^2 x$ でわって

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=-t$$ ㋓（㋐より）

（i）$\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0$ ㋔の一般解を求める。

特性方程式　$\lambda^2+1=0$　$\therefore\ \lambda=\pm i$　よって P.56（iii）より㋔の一般解は $y=e^{0x}(C\cos t+D\sin t)$

つまり　$y=C\cos t+D\sin t$

（ii）㋓の 1 つの解を　$y=At+B$ と予想すると　$\dfrac{dy}{dt}=A,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=0$

これらを㋓に代入して　$At+B=-t$　　$\therefore$　$A=-1,\ B=0$

よって㋓の 1 つの解は　$y=-t$

（i）（ii）より㋓の一般解は　$y=-t+C\cos t+D\sin t$

$$=\cos x+C\cos(-\cos x)+D\sin(-\cos x) \quad (㋐より)$$

ゆえに　$y=\cos x+C\cos(\cos x)-D\sin(\cos x)$　（$\cos(-\theta)=\cos\theta,\ \sin(-\theta)=-\sin\theta$ より）

175

⑴　$y'' - 6y' + 5y = e^{-x}$　　$(D^2 - 6D + 5)y = e^{-x}$

$$y = \frac{1}{D^2 - 6D + 5} e^{-x} = \frac{1}{(-1)^2 - 6(-1) + 5} e^{-x} \quad \text{(P.62 ①)}$$

$$= \frac{1}{1 + 6 + 5} e^{-x} = \frac{1}{12} e^{-x}$$

⑵　$y'' - 2y' + y = xe^x$　　$(D^2 - 2D + 1)y = xe^x$

p.61 ⑶より

$$y = \frac{1}{D^2 - 2D + 1} xe^x = \frac{1}{(D-1)^2} xe^x$$

$$= e^x \frac{1}{((D-1)-1)^2} (e^{-x} xe^x) \quad \text{(P.62 ②)}$$

$$= e^x \frac{1}{D^2} x = e^x \frac{1}{D}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = e^x \frac{1}{6} x^3 = \frac{1}{6} x^3 e^x$$

⑶　$y'' - 4y = \sin 2x$　より

$(D^2 - 4)y = \sin 2x$　　　P.61 ⑶より　$y = \dfrac{1}{D^2 - 4}\sin 2x$　これを求める為に

$$\frac{1}{D^2 - 4} e^{2ix} = \frac{1}{(2i)^2 - 4} e^{2ix} \quad \text{P.62（公式①より）}$$

$$= \frac{1}{-8}(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{i}{8}\sin 2x$$

したがって P.63 ③より　$y = \dfrac{1}{D^2 - 4}\sin 2x = -\dfrac{1}{8}\sin 2x$

⑷　$y'' - 2y' - 2y = x^2 + 1$

$(D^2 - 2D - 3)y = x^2 + 1$ であるから

$$y = \frac{1}{D^2 - 2D - 3}(x^2 + 1) = \frac{1}{(D-3)(D+1)}(x^2 + 1)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{D+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}D}(x^2 + 1) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+D}\left(1 + \frac{1}{3}D + \frac{1}{9}D^2 + \cdots\right)(x^2 + 1) \quad \text{(P.63　公式④)}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+D}\left(x^2 + 1 + \frac{1}{3}D(x^2 + 1) + \frac{1}{9}D^2(x^2 + 1)\right)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+D}\left(x^2 + 1 + \frac{1}{3}(2x) + \frac{1}{9} \cdot 2\right)$$

$$= -\frac{1}{3}(1 - D + D^2 + \cdots)\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9} - D\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}\right) + D^2\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9} - \left(2x + \frac{2}{3}\right) + 2\right) = -\frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{23}{27}$$

5章の問題

1　Cは任意定数

⑴　$x^3 \dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$

$$x^3 \frac{dy}{dx} = -y^2$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^3}$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = -\int \frac{1}{x^3} dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2x^2} + C = \frac{1+2Cx^2}{2x^2}$$

$$y = -\frac{2x^2}{1+Cx^2}$$

⑵　$\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x}$　㋐

$u = \dfrac{y}{x}$ とおくと $y = ux$ ㋑,　$y = ux$,　$y' = u'x + u$ ㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して

$$u'x + u = 1 + u$$

$u'x = 1$　より　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$$\int du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$u = \log|x| + C$$

$\therefore\ \dfrac{y}{x} = \log|x| + C$

$\therefore\ y = x(\log|x| + C)$

(3)　$x\dfrac{dy}{dx}+y=\sin x$

$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}\cdot y=\dfrac{\sin x}{x}$　㋐

［1］ $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=0$ の一般解を求める。

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x}$

$\int\dfrac{1}{y}dy=-\int\dfrac{1}{x}dx$

$\log|y|=-\log|x|+C$

$|yx|=e^C$

$yx=\pm e^C=B$ とおくと

$y=\dfrac{B}{x}$

［2］B を x の関数 u として $y=\dfrac{u}{x}$ ㋑とおくと $y'=\dfrac{u'x-u(x)'}{x^2}$ ㋒（公式 $\boxed{23}$ ）

㋐に㋑ ㋒を代入すると　$\dfrac{u'}{x}-\dfrac{u}{x^2}+\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{u}{x}\right)=\dfrac{\sin x}{x}$

よって $u'=\sin x$

$u=-\cos x+C$

したがって　$y=-\dfrac{1}{x}\cos x+\dfrac{C}{x}$

(4) $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}=xy+1$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{1+x^2}y+\dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{x}{1+x^2}y=\dfrac{1}{1+x^2}$ ㋐

[1] $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{x}{1+x^2}y=0$ の一般解を求める。

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{1+x^2}y$

$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{1+x^2}$

$\displaystyle\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{x}{1+x^2}dx$

右辺 $\displaystyle=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\log\left|1+x^2\right|+C$ （公式 $\boxed{30}$ ）

$\log|y|=\dfrac{1}{2}\log|1+x^2|+C$

$\log\left|\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right|=C$ より $\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}}=\pm e^C$

$y=B\sqrt{1+x^2}$ とおく

[2] B を x の関数 u として $y=u\sqrt{1+x^2}$ ㋑とおくと,

$y'=u'\sqrt{1+x^2}+u\cdot\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+x^2)'=u'\sqrt{1+x^2}+u\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ㋒（公式 $\boxed{22}$ ）

㋐に㋑ ㋒を代入すると $u'\sqrt{1+x^2}+u\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{x}{1+x^2}\cdot u\sqrt{1+x^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$

よって $u'=\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

よって $\displaystyle u=\int\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\left\{\frac{1+x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}dx$

$\displaystyle=\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx-\int x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

$\left[\left\{-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}'=\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1+x^2)'=\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\text{ を用いて}\right]$

$\displaystyle=\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx-\int x\left\{-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}'dx=\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx+\left\{x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}-\int(x)'(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx\right\}$

$=x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+C$ （公式 $\boxed{31}$ ）

㋑に代入して $y=x+C\sqrt{1+x^2}$

2

(1) $y' + y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$ ㋐　　$(y(0) = 1)$

［1］ $y' + y\tan x = 0$ の一般解を求める。

$y' = -y\tan x \qquad \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = -\tan x$

$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \tan x\,dx$

$$\left(\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C\right)$$ （公式 $\boxed{30}$ ）

$\log|y| = \log|\cos x| + C$

$\log\left|\dfrac{y}{\cos x}\right| = C$ より $\dfrac{y}{\cos x} = \pm e^C = B$ とおくと

$y = B\cos x$

［2］ B を x の関数 u として

$y = u\cos x$ ㋑とおくと， $y' = u'\cos x - u\sin x$ ㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して

$u'\cos x - u\sin x + u\sin x = \dfrac{1}{\cos x}$

$u' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\therefore\ u = \tan x + D$ （公式 $\boxed{26}$ ）

$\therefore\ y = (\tan x + D)\cos x = \sin x + D\cos x$

$y(0) = 1$ より $1 = D \quad \therefore\ y = \sin x + \cos x$

(2) $\dfrac{dy}{dx}+2y=x$ ㋐ $(y(0)=1)$

［1］ $\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ の一般解を求める。

$\dfrac{dy}{dx}=-2y$ より $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=-2$

$\displaystyle\int\frac{1}{y}\,dy=-2\int dx$

$\log|\,y\,|=-2x+C$

$y=\pm e^{C-2x}$

$=\pm e^{C}\cdot e^{-2x}=Be^{-2x}$ とおく

［2］ B を x の関数 u として

$y=ue^{-2x}$ ㋑とおくと

$y'=u'e^{-2x}-2ue^{-2x}$ ㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して

$u'e^{-2x}-2ue^{-2x}+2ue^{-2x}=x$

$u'=xe^{2x}$

よって $u=\displaystyle\int xe^{2x}\,dx=\int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$

$=x\cdot\dfrac{1}{2}e^{2x}-\displaystyle\int(x)'\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$

$=\dfrac{x}{2}e^{2x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}e^{2x}+D$

㋑に代入して $\therefore\ y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}+De^{-2x}$

$y(0)=1$ より $1=-\dfrac{1}{4}+C$ $\therefore\ D=\dfrac{5}{4}$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}e^{-2x}$

3

⑴　$y'' - 2y' + 5y = 0$

特性方程式　$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i$$

$\therefore\ y = e^x(C\cos 2x + D\sin 2x)$　（C，D は任意定数）

⑵　$y'' + 4y' + 4y = x^2$　㋐

［1］ $y'' + 4y' + 4y = 0$ の一般解を求める。

特性方程式 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda + 2)^2 = 0$　$\lambda = -2$

$\therefore\ y = (C + Dx)e^{-2x}$

［2］㋐の１つの解を $y = Ax^2 + Bx + E$ と予想すると $y' = 2Ax + B$，$y'' = 2A$

これらを㋐に代入して

$2A + 8Ax + 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4E = x^2$

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 8A + 4B = 0 \\ 2A + 4B + 4E = 0 \end{cases}$$

より $A = \frac{1}{4}$

$B = -\frac{1}{2}$　$E = \frac{3}{8}$

$\therefore\ y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$　は㋐の１つの解

［1］，［2］より㋐の一般解は

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} + (C + Dx)e^{-2x}$$　（C，D は任意定数）

⑶　$y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$　㋐

［1］ $y'' + 2y' - 3y = 0$ の一般解を求める

特性方程式　$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$(\lambda+3)(\lambda-1) = 0$　$\lambda = -3$，1

$\therefore\ y = Ce^{-3x} + De^x$

［2］㋐の１つの解を $y = Ae^{2x}$ と予想すると

$y' = 2Ae^{2x}$，$y'' = 4Ae^{2x}$　これらを㋐に代入して

$4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = e^{2x}$

$5A = 1$　$\therefore\ A = \frac{1}{5}$　よって　$y = \frac{1}{5}e^{2x}$ は㋐の１つの解。

［1］，［2］より㋐の一般解は

$$y = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x} + De^x$$　（C，D は任意定数）

⑷ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$ ㋐

［1］ $y'' + y = 0$ の一般解を求める

特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ $\lambda = \pm i$

（P.56 定数係数 2 階同次線形微分方程式（iii））より $y = e^{0x}(C\cos x + D\sin x)$

よって $y = C\cos x + D\sin x$

［2］㋐の 1 つの解を $y = x(A\cos x + B\sin x)$ ㋑と予想すると

$$y' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$$

$$= (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x$$ ㋒より

$$y'' = B\cos x + (A + Bx)(-\sin x) - A\sin x + (B - Ax)\cos x$$

$$= (2B - Ax)\cos x + (-2A - Bx)\sin x$$ ㋓

㋐に㋑，㋓を代入すると

$$2B\cos x - 2A\sin x = \cos x$$

$$\begin{cases} 2B = 1 \\ -2A = 0 \end{cases}$$ より $A = 0$ $B = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $y = \dfrac{1}{2}x\sin x$ は㋐の 1 つの解。

［1］［2］より㋐の一般解は

$y = \dfrac{1}{2}x\sin x + C\cos x + D\sin x$ （C，D は任意定数）

4

⑴ $y'' - y' - 2y = 0$ （$y(0) = 2$，$y'(0) = 1$）（←P.56 $\boxed{5}$ ）

特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$ $\lambda = 2, -1$（P.56 $\boxed{5}$ （i））

$\therefore$ $y = Ce^{2x} + De^{-x}$

$y' = 2Ce^{2x} - De^{-x}$

$y(0) = 2$，$y'(0) = 1$ より

$$\begin{cases} 2 = C + D \\ 1 = 2C - D \end{cases}$$ これより $C = 1$，$D = 1$

したがって $y = e^{2x} + e^{-x}$

⑵　$y''-4y=\sin x$ ㋐　$(y(0)=0,\ y'(0)=3)$

［1］ $y''-4y=0$ の一般解を求める。

特性方程式　$\lambda^2-4=0$　$\lambda=\pm 2$

$\therefore\ y=Ce^{2x}+De^{-2x}$

［2］㋐の１つの解を　$y=A\sin x+B\cos x$ 予想すると

$y'=A\cos x-B\sin x$

$y''=-A\sin x-B\cos x$　これらを㋐に代入して

$-A\sin x-B\cos x-4A\sin x-4B\cos x=\sin x$

$\begin{cases}-5A=1\\-5B=0\end{cases}$ より $A=-\dfrac{1}{5}$，$B=0$

$\therefore\ y=-\dfrac{1}{5}\sin x$ は㋐の１つの解。

［1］［2］より㋐の一般解は

$\therefore\ y=-\dfrac{1}{5}\sin x+Ce^{2x}+De^{-2x}$

よって $y'=-\dfrac{1}{5}\cos x+2Ce^{2x}-2De^{-2x}$

$y(0)=0,\ y'(0)=3$ より

$\begin{cases}0=C+D\\3=-\dfrac{1}{5}+2C-2D\end{cases}$ これより $C=\dfrac{4}{5}$，$D=-\dfrac{4}{5}$

したがって $y=-\dfrac{1}{5}\sin x+\dfrac{4}{5}e^{2x}-\dfrac{4}{5}e^{-2x}$

⑶　$y''+3y'+2y=1$　㋐

［1］ $y''+3y'+2y=0$ の一般解を求める。

特性方程式 $\lambda^2+3\lambda+2=0$

$(\lambda+1)(\lambda+2)=0$　$\lambda=-1,\ -2$

$\therefore\ y=Ce^{-x}+De^{-2x}$

［2］㋐の１つの解を $y=A$ とおくと

$y'=y''=0$　これらを㋐に代入して

$2A=1\ \therefore\ A=\dfrac{1}{2}$　よって $y=\dfrac{1}{2}$ は㋐の１つの解。

［1］［2］より㋐の一般解は

$\therefore\ y=\dfrac{1}{2}+Ce^{-x}+De^{-2x}$

よって　$y'=-Ce^{-x}-2De^{-2x}$

$x=0$　$y=0$　$y'=0$　を代入して

$\begin{cases}0=\dfrac{1}{2}+C+D\\0=-C-2D\end{cases}$ より $\begin{matrix}C=-1\\D=\dfrac{1}{2}\end{matrix}$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{2}-e^{-x}+\dfrac{1}{2}e^{-2x}$

5

⑴　$z=\dfrac{1}{y}=y^{-1}$ より $\dfrac{dz}{dx}=-y^{2}\cdot\dfrac{dy}{dx}$　（公式$\boxed{24}$）

よって $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{y^{2}}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$$=-\frac{1}{y^{2}}(y+xy^{2})=-\frac{1}{y}-x=-z-x$$

したがって $z'+z=-x$　㋐

⑵

［1］ $z'+z=0$ の一般解を求める。

$z'=-z$ より $\dfrac{1}{z}\dfrac{dz}{dx}=-1$

$$\int\frac{1}{z}\,dz=-\int dx$$

$$\log|z|=-x+C$$

$z=\pm e^{C-x}=\pm e^{C}\cdot e^{-x}=Be^{-x}$ とおく。

［2］ B を x の関数 u とすると　$z=ue^{-x}$ ㋑，　$z'=u'e^{-x}-ue^{-x}$ ㋒

㋐に㋑ ㋒を代入して

$$u'e^{-x}-ue^{-x}+ue^{-x}=-x$$

$u'=-e^{x}x$ よって $u=-\displaystyle\int e^{x}\,dx=\int x(e^{x})'\,dx=-\left\{xe^{x}-\int(x)'e^{x}\,dx\right\}$

よって　$u=-xe^{x}+e^{x}+C$

$$\therefore\ z=-x+1+Ce^{-x}$$

$y=\dfrac{1}{z}$ より $y=\dfrac{1}{-x+1+Ce^{-x}}$　　（C は任意定数）

6

⑴　$y=e^{-2x}\sin 3x$ ㋐　公式 $\boxed{22}$ より

$y'=-2e^{-2x}\sin 3x+e^{-2x}\cdot 3\cdot\cos 3x$　（公式 $\boxed{24}$ より　$(e^{-2x})'=e^{-2x}\cdot(-2x)'$，$(\sin 3x)'=\cos 3x\cdot(3x)'$）

$=e^{-2x}(3\cos 3x-2\sin 3x)$

$y''=-2e^{-2x}(3\cos 3x-2\sin 3x)+e^{-2x}(-9\sin 3x-6\cos 3x)$

$=e^{-2x}(-12\cos 3x-5\sin 3x)$

したがって　$y'=e^{-2x}(3\cos 3x-2\sin 3x)$　㋑

$y''=e^{-2x}(-12\cos 3x-5\sin 3x)$ ㋒

⑵　㋐ ㋑ ㋒を与式に代入して

$e^{-2x}(-12\cos 3x-5\sin 3x)+ae^{-2x}(3\cos 3x-2\sin 3x)$

$+be^{-2x}\sin 3x=0$ より $(-12+3a)\cos 3x+(-5-2a+b)\sin 3x=0$

$\begin{cases}-12+3a=0\\-5-2a+b=0\end{cases}$ より　$a=4$, $b=13$

一般解は　$y''+4y'+13=0$

特性方程式　$\lambda^2+4\lambda+13=0$

$$\lambda=\frac{-4\pm\sqrt{36}\,i}{2}=-2\pm 3i$$

$\therefore\ y=e^{-2x}(C\cos 3x+D\sin 3x)$

したがって答は $a=4$，$b=13$

$y=e^{-2x}(C\cos 3x+D\sin 3x)$

（C，D は任意定数）

7

⑴ $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=-4y^{-5}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ （公式 $\boxed{24}$ ）

$$\therefore\ \frac{dz}{dx}=-4y^{-5}\frac{dy}{dx}$$

⑵ ⑴より $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{4}y^5\dfrac{dz}{dx}$ なので

$-\dfrac{1}{4}y^5\dfrac{dz}{dx}+yP(x)=y^5Q(x)$ 両辺に $-4y^{-5}$ をかけて

$\dfrac{dz}{dx}-4y^{-4}P(x)=-4Q(x)$ $z=y^{-4}$ より

$$\therefore\ \frac{dz}{dx}-4P(x)z=-4Q(x)$$

⑶ $z=y^{-4}$ とおくと 与式 $\dfrac{dy}{dx}+xy=\dfrac{1}{2}xy^5$ は $P(x)=x$，$Q(x)=\dfrac{1}{2}$ であるから

⑵より $\dfrac{dz}{dx}-4xz=-2x$ ㋐

$\dfrac{dz}{dx}-4xz=0$ の一般解を求める。

$$\frac{dz}{dx}=4xz$$

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx}=4x$$

$$\int\frac{1}{z}\,dz=\int 4x\,dx$$

$$\log|z|=2x^2+C$$

$$z=\pm e^{C+2x^2}=\pm e^C\cdot e^{2x^2}=Be^{2x^2}$$

B を x の関数 u とすると $z=ue^{2x^2}$，$z'=u'e^{2x^2}+4uxe^{2x^2}$

これらを㋐に代入して

$$u'e^{2x^2}+4uxe^{2x^2}-4xue^{2x^2}=-2x$$

$$u'=-2xe^{-2x^2}$$

よって $u=\displaystyle\int -2xe^{-2x^2}\,dx$ $\left(-2x^2=t\ とおくと\ -4x=\dfrac{dt}{dx}\ より\ -2xdx=\dfrac{1}{2}dt\right)$

$$=\int e^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int e^t\,dt=\frac{1}{2}e^t+C$$

$$u=\frac{1}{2}e^{2x^2}+C$$

$$\therefore\ z=\frac{1}{2}+Ce^{2x^2}=\frac{1+Ce^{2x^2}}{2}$$

したがって $y^4=\dfrac{2}{Ce^{2x^2}+1}$ （C は任意定数）

8

⑴　$x' = \dfrac{u''u - (u')^2}{u^2}$　　（公式 $\boxed{23}$ ）

与式　$x^1 + x^2 + a(t)x + b(t) = 0$ ㋐に入れて

$$\frac{u''u - (u')^2}{u^2} + \frac{(u')^2}{u^2} + a(t)\frac{u'}{u} + b(t) = 0$$

$$\frac{u''}{u} + a(t)\frac{u'}{u} + b(t) = 0$$

$$\therefore\ u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$$

⑵　$x' = x(1-x)$

$x' + x^2 - x = 0$　これは与式 ㋐のタイプである。（$a(t) = -1$　$b(t) = 0$）

$x = \dfrac{u'}{u}$ ㋑とおくと　⑴より　$u'' - u' = 0$ ㋒

$u' = p$ とおくと $u'' = p'$　よって㋒は

$p' - p = 0$

$p' = p$ より $\dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{dx} = 1$ なので

$$\int \frac{1}{p}\,dp = \int dx$$

$\log|\ p\ | = t + C$

よって　$p = \pm\, e^{t+C} = \pm\, e^C \cdot e^t = Be^t$ とおくと

$p = Be^t$

よって　$u' = Be^t$ ㋓

$u = Be^t + C_2$ ㋔

㋑に㋓ ㋔を代入して

$\therefore\ x = \dfrac{Be^t}{Be^t + C_2} = \dfrac{e^t}{e^t + C}$　　（C は任意定数）　$\left(\dfrac{C_2}{B}\text{ を } C \text{ とおいた。}\right)$

9　$\alpha = 64$ のとき　与式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 20\dfrac{dx}{dt} + \alpha x = 0$　㋐

⑴の特性方程式は $\lambda^2 + 20\lambda + 64 = 0$

$(\lambda + 4)(\lambda + 16) = 0$　$\therefore \lambda = -4,\ -16$

よって㋐の一般解は $\therefore\ x = Ce^{-4t} + De^{-16t}$ ㋑

$x' = -4Ce^{-4t} - 16De^{-16t}$

$t = 0,\ x = 1,\ x' = 8$ を代入して

$$\begin{cases} 1 = C + D \\ 8 = -4C - 16D \end{cases} \text{より}\quad \begin{matrix} C = 2 \\ D = -1 \end{matrix}$$

㋑に代入して $x = 2e^{-4t} - e^{-16t}$ が求める解。

⑵　与式㋐の特性方程式は　$\lambda^2+20\lambda+\alpha=0$

$$\lambda=\frac{-20\pm\sqrt{400-4\alpha}}{2}=-10\pm\sqrt{100-\alpha}$$

（ⅰ）　$\alpha>100$ のとき　$\lambda=-10\pm\sqrt{\alpha-100}\,i$

$x=e^{-10t}(C\cos\sqrt{\alpha-100}\,t)+(D\sin\sqrt{\alpha-100}\,t)$　㋐

よって

$x'=-10e^{-10t}\left(C\cos\sqrt{\alpha-100}t+D\sin\sqrt{\alpha-100}t\right)$

$+e^{-10t}\left(-C\sqrt{\alpha-100}\sin\sqrt{\alpha-100}t+D\sqrt{\alpha-100}\cos\sqrt{\alpha-100}t\right)$ ㋑

$t=0$，$x=1$，$x'=-15$ を代入して

㋐は$1=C$　㋑は$-15=-10C+D\sqrt{\alpha-100}$

よって　$D=\dfrac{-5}{\sqrt{\alpha-100}}$

$\therefore\ x=e^{-10t}\left(\cos\sqrt{\alpha-100}\,t-\dfrac{5}{\sqrt{\alpha-100}}\sin\sqrt{\alpha-100}\,t\right)$

$t=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha-100}}\cdot\dfrac{x}{2}$ のとき x は負になる。したがってつねに $x(t)>0$ とは言えないので不適当

（ⅱ）　$\alpha=100$ のとき $\lambda=-10$

$x=(C+Dt)\cdot e^{-10t}$ ㋒

よって $x'=De^{-10t}+(C+Dt)(-10e^{-10t})$　㋓

$t=0$，$x=1$，$x'=-15$ を代入して

㋒は$1=C$　㋑は$-15=D+C\cdot(-10)$

よって　$-5=D$

$\therefore\ x=(1-5t)e^{-10t}$

$t>\dfrac{1}{5}$ のとき $x(t)<0$ となるので不適当

(iii)　$0<\alpha<100$ のとき

$\beta=\sqrt{100-\alpha}$ とおくと $\lambda=-10\pm\beta$

$x(t)=Ce^{(\beta-10)t}+De^{(-\beta-10)t}$　㋔

よって $x'=C(\beta-10)e^{(\beta-10)t}+D(-\beta-10)e^{(-\beta-10)t}$　㋕

$t=0$，$x=1$，$x'=-15$ を代入して

㋔は　$1=C+D$　㋔′

㋕は　$-15=C(\beta-10)+D(-\beta-10)$　㋕′

㋔′ より $(\beta-10)=C(\beta-10)+D(\beta-10)$ ㋔″ なので

㋔″ −㋕′ より $\beta+5=D\cdot 2\beta$

よって　$D=\dfrac{\beta+5}{2\beta}$　$C=\dfrac{\beta-5}{2\beta}$

$$\therefore\quad x(t)=\frac{\beta-5}{2\beta}e^{(\beta-10)t}+\frac{\beta+5}{2\beta}e^{(-\beta-10)t}$$

$$=\frac{\beta+5}{2\beta}\cdot e^{(-\beta-10)t}\left(1+\frac{2\beta}{\beta+5}e^{(\beta+10)t}\cdot\frac{\beta-5}{2\beta}e^{(\beta-10)t}\right)$$

$$=\frac{\beta+5}{2\beta}\cdot e^{(-\beta-10)t}\left(1+\frac{(\beta-5)^2}{(\beta+5)(\beta-5)}\cdot e^{2\beta t}\right)$$

$$=\frac{\beta+5}{2\beta}\cdot e^{(-\beta-10)t}\left(1+\frac{(\beta-5)^2}{75-\alpha}\cdot e^{2\beta t}\right)$$ （$\beta=\sqrt{100-\alpha}$ より）

したがって　$0<\alpha<75$ のときは常に $x(t)>0$

$75<\alpha<100$ のときは $x(t)>0$ とは限らない。

なぜなら $2\beta>0$ より $e^{2\beta t}$ は増加関数なので t を十分大きくとると $\dfrac{(\beta-5)^2}{75-\alpha}e^{2\beta t}<-1$ となる。

(i)，(ii)，(iii)　より　$0<\alpha<75$

10　与式　$x''+2bx'+\omega^2x=0$

(1)　特性方程式　$\lambda^2+2b\lambda+\omega^2=0$

$\lambda=-b\pm\sqrt{b^2-\omega^2}$

したがって（←P.56 定数係数 2 階同次線形微分方程式 (i) (ii) より）

$$\begin{cases} b^2-\omega^2=0 \text{ のとき } & x=(C+Dt)e^{-bt} \\ b^2-\omega^2>0 \text{ のとき } & x=e^{-bt}(C\cos\sqrt{\omega^2-b^2}\,t+D\sin\sqrt{\omega^2-b^2}\,t) \end{cases}$$

（C，D は任意定数）

⑵　（i）　$b^2-\omega^2=0$ のとき

$x=(C+Dt)e^{-bt}$ ㋐

$x'=De^{-bt}+(C+Dt)(-b)e^{-bt}$ 　㋑

$t=0$，　$x=0$，　$x'=1$　より

㋐は　$0=C$

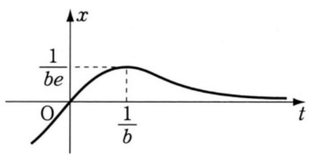
㋑は　$1=D+C(-b)$　よって　$1=D$

$\therefore\quad x(t)=te^{-bt}$

$x'(t)=e^{-bt}+t(-b)e^{-bt}=e^{-bt}(1-bt)=0$ となるのは $t=\dfrac{1}{b}$ のときでその前後で x' は＋から－にかわる。

また，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}x=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{bt}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{be^{bt}}=0$

グラフは



（ii）　$b^2-\omega^2<0$ のとき

$x=e^{-bt}\left(C\cos\sqrt{\omega^2-b^2}\,t+D\sin\sqrt{\omega^2-b^2}\,t\right)$ 　㋒

$x'=(-b)e^{-bt}\left(C\cos\sqrt{\omega^2-b^2}\,t+D\sin\sqrt{\omega^2-b^2}\,t\right)$

$\quad+e^{-bt}\left(-C\sqrt{\omega^2-b^2}\sin\sqrt{\omega^2-b^2}\,t+D\sqrt{\omega^2-b^2}\cos\sqrt{\omega^2-b^2}\,t\right)$ 　㋓

$t=0$,　$x=0$,　$x'=1$ より

㋒は　$0=C$

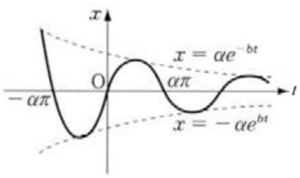
㋓は　$1=-bC+D\sqrt{\omega^2-b^2}$

よって　$D=\dfrac{1}{\sqrt{\omega^2-b^2}}$

$\therefore\ x(t)=\dfrac{e^{-bt}}{\sqrt{\omega^2-b^2}}\sin\sqrt{\omega^2-b^2}\,t$

$b>0$　より　e^{-bt}　は単調減少で　$t\to\infty$　のとき　$e^{-bt}\to0$

グラフは



$\left(\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{\omega^2-b^2}}\text{ とおく}\right)$