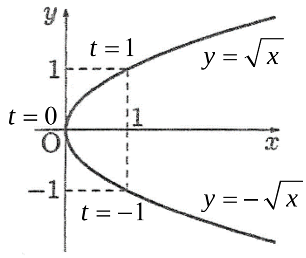
１章　微分法

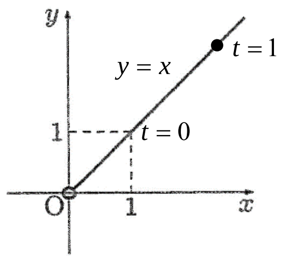
１節　いろいろな関数表示の微分法（p.8～19）

練習 1

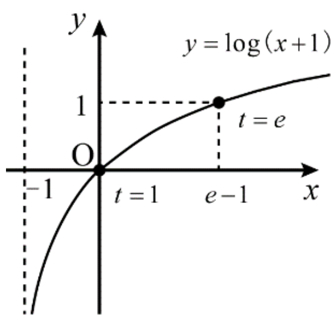
(1)



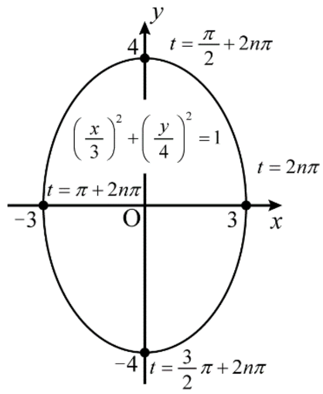
(2)



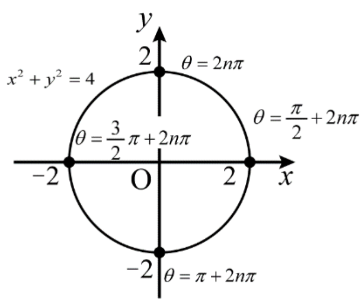
(3)



(4)



(5)



練習 2

(1)　$x=\dfrac{1}{2}t$　より　$y=\left(\dfrac{1}{2}t\right)^2=\dfrac{1}{4}t^2$　なので　$x=\dfrac{1}{2}t$，$y=\dfrac{1}{4}t^2$

(2)　$x=-t$　より　$y=(-t)^2=t^2$ なので　$x=-t$，$y=t^2$

練習 3

⑴　$x=t^2$ より，$t=\pm\sqrt{x}$ だから，$y=\pm\sqrt{x^3}$ で表される。対応する y は $x=0$ のとき１つ，$x>0$ のとき２つ。

⑵　$x^2=4\cos^2\theta$，$y^2=4\sin^2\theta$ より

$x^2+y^2=4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=4$ よって $y=\pm\sqrt{4-x^2}$ となる。

$x=\pm 2$ のとき 1 つ，$-2<x<2$ のとき 2 つ。

⑶　$\dfrac{x}{3}=\cos\theta$，$\dfrac{y}{4}=\sin\theta$ より

$\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{y}{4}\right)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ よって $y=\pm\dfrac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$ となる。

$x=\pm 3$ のとき 1 つ，$-3<x<3$ のとき 2 つ。

練習 4

⑴　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\dfrac{1}{t^2}}{1}=-\dfrac{1}{t^2}=-\dfrac{1}{x^2}$

⑵　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\dfrac{1}{2t^2}}{2}=-\dfrac{1}{4t^2}=-\dfrac{1}{x^2}$

⑶　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(\sin 2t)'}{(\cos 2t)'}=\dfrac{2\cos 2t}{-2\sin 2t}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\begin{array}{l}\cos^2 2t+\sin^2 2t=1 \text{ より } 0<t<\dfrac{\pi}{2} \text{ のとき} \\ \sin 2t=\sqrt{1-\cos^2 2t}=\sqrt{1-x^2}\end{array}\right)$

練習 5

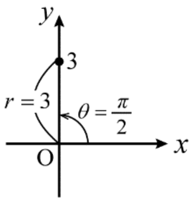
⑴　$\dfrac{dx}{dt}=\cos t=0$ となる $t=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{2}$ を除く範囲だから，$0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{3\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{2}<t\leqq 2\pi$

練習 6

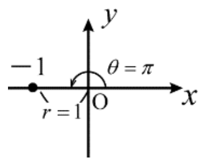
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{2\left(1+t^2\right)-2t\cdot 2t}{\left(1+t^2\right)^2}}{\dfrac{-2t\left(1+t^2\right)-\left(1-t^2\right)\cdot 2t}{\left(1+t^2\right)^2}}=\frac{2+2t^2-4t^2}{-2t-t^3-2t+2t^3}=-\frac{2t^2-2}{t^3-4t}$$ より，$\dfrac{dy}{dx}=0$ となるのは

$2t^2-2=0$ より $t=\pm 1$ のとき，すなわち，$x=0$ のときである。

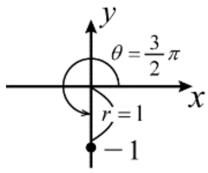
練習 7

(1) 

より $\left(3,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

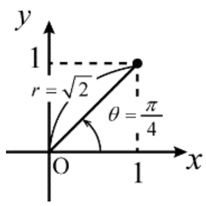
(2) 

より $(1,\ \pi)$

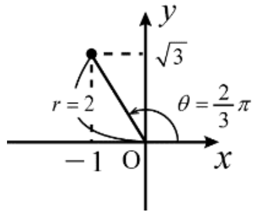
(3) 

より $\left(1,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$

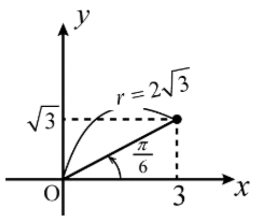
練習 8

(1) 

より $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$

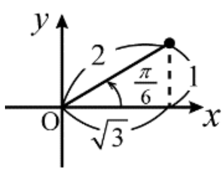
(2) 

より $\left(2,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$

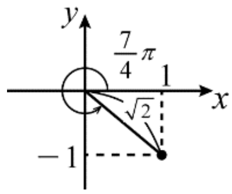
(3) 

より $\left(2\sqrt{3},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$

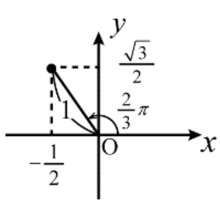
練習 9

(1) 

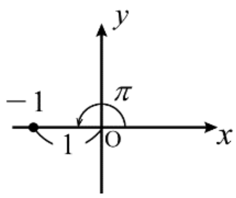
より $\left(\sqrt{3},\ 1\right)$

(2) 

より $(1,\ -1)$

(3) 

より $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

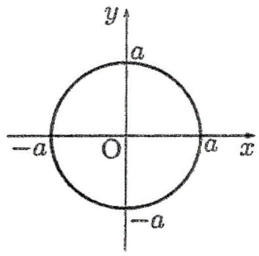
(4) 

より $(-1,\ 0)$

練習 10

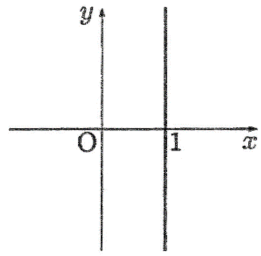
(1) $r=a$ より $\sqrt{x^2+y^2}=a$

よって $x^2+y^2=a^2$



(2) $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$ より $r\cos\theta=1$

よって $x=1$



(3) $r=2\sin\theta$ より $r^2=2r\sin\theta$ よって $\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}=2y$

$x^2+y^2-2y=0$ または $x^2+(y-1)^2=1$

(4) $x^2+y^2=4$ より $r^2=4$

$r>0$ より $r=2$

(5) $(x-1)^2+y^2=1$ より $x^2-2x+1+y^2=1$

よって $x^2+y^2=2x$ 従って $r^2=2r\cos\theta$

よって $r=0$ ㋐ または $r=2\cos\theta$ ㋑

㋐は㋑に含まれるので $r=2\cos\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

練習 11

(1) $\begin{cases} x=r\cos\theta=a\cos\theta \\ y=r\sin\theta=a\sin\theta \end{cases}$ より $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(a\sin\theta)'}{(a\cos\theta)'}=\dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

(2) $\begin{cases} x=r\cos\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{\tan\theta} \\ y=r\sin\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\sin\theta=1 \end{cases}$ より $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(1)'}{\left(\dfrac{1}{\tan\theta}\right)'}=0$

練習 12

⑴　$(x-1)^2+y^2=4$　より　$y^2=4-(x-1)^2=3+2x-x^2$

$y \geqq 0$　より　$y=\sqrt{3+2x-x^2}$

⑵　$x^2+9y^2=9$　より　$9y^2=9-x^2$　　$y^2=1-\dfrac{x^2}{9}$

$y \geqq 0$　より $y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}$

⑶　$x-y^2=0$　より　$y^2=x$

$y \geqq 0$　より　$y=\sqrt{x}$

練習 13

⑴　両辺を x で微分すると，$2x+2y+2x\dfrac{dy}{dx}-2y\dfrac{dy}{dx}=0$　$\therefore (x-y)\dfrac{dy}{dx}=-(x+y)$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+y}{x-y}$

⑵　$$\frac{1}{x^2+y^2}\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)+\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1\cdot y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}=0$$

$\therefore\ \dfrac{1}{x^2+y^2}\left(2x+2y\dfrac{dy}{dx}+y-x\dfrac{dy}{dx}\right)=0$　　$\therefore\ \left(2x+y\right)-\left(x-2y\right)\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+y}{x-2y}$

練習 14

⑴　両辺を θ で微分して，$2r\dfrac{dr}{d\theta}=2\cos 2\theta$　　$\therefore\ \dfrac{dr}{d\theta}=\dfrac{\cos 2\theta}{r}$

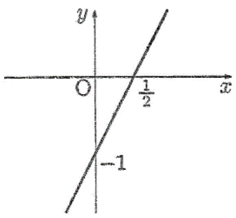
⑵　両辺を θ で微分して，$2r\dfrac{dr}{d\theta}=-4\sin 4\theta$　　$\therefore\ \dfrac{dr}{d\theta}=-\dfrac{2\sin 4\theta}{r}$

節末問題（p.19）

1

⑴ $t=x-1$ を $y=2t+1$ に代入すると，

$y=2(x-1)+1=2x-1$

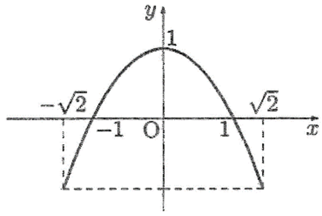


⑵ $x^2=2\sin^2 t$ より，

$y=\cos 2t=1-2\sin^2 t=1-x^2$

ただし

$-1 \leqq \sin t \leqq 1$ より $-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$

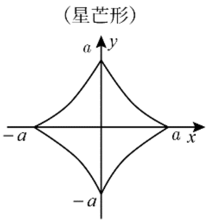


⑶ $\dfrac{x}{a}=\cos^3\theta$ より $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=\cos^2\theta$

$\dfrac{y}{a}=\sin^3\theta$ より $\left(\dfrac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=\sin^2\theta$

よって $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$

したがって $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$



2

⑴ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2t}{3t^2+1}=0$ $\therefore$ $t=0$ よって $(0,\ 1)$

⑵ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=0$ $\therefore$ $e^t=e^{-t}$ $\therefore$ $t=-t$ $\therefore$ $t=0$ よって，$(0,\ 2)$

3

(1)　$r=1-\cos\theta$ より　$r^2=r-r\cos\theta$

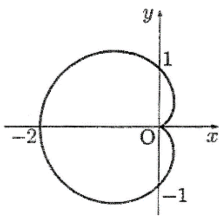
よって　$x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}-x$

したがって　$\left(x^2+y^2+x\right)^2-\left(x^2+y^2\right)=0$

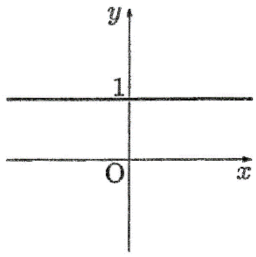
$r=1-\cos\theta=1+\cos\left(\theta-\pi\right)$だから，P.14 例 10 の

カージオイド$r=1+\cos\theta$をπだけ

進めたもの（つまり回転したもの）である。



(2)　$r\sin\theta=1$ すなわち $y=1$ である。

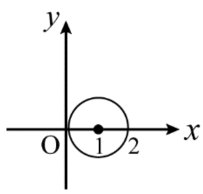


(3)　$r=2\cos\theta$　より

$r^2=2r\cos\theta$　よって　$x^2+y^2=2x$

したがって　$x^2+y^2-2x=0$　$\left(\text{または}\left(x-1\right)^2+y^2=1\right)$

中心（1，0），半径 1 の円である。



4

(1)　$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ より

$(r^2)^2=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=r^2\cos 2\theta$

よって$r=0$　ア　または$r^2=\cos 2\theta$　イ

アはイに含まれるので

$r^2=\cos 2\theta$

(2)　$x^2-2x+1+y^2-2y+1=2$　より

$x^2+y^2=2x+2y$　よって　$r^2=2r\cos\theta+2r\sin\theta$

よって　$r=0$　ア　または　$r=2\cos\theta+2\sin\theta$　イ

アはイに含まれるので

$r=2\cos\theta+2\sin\theta$

(3)　$(r\cos\theta)^{\frac{2}{3}}+(r\sin\theta)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$　より

$r^{\frac{2}{3}}\left\{(\cos\theta)^{\frac{2}{3}}+(\sin\theta)^{\frac{2}{3}}\right\}=a^{\frac{2}{3}}$　よって　$r\left\{\cos^{\frac{2}{3}}\theta+\sin^{\frac{2}{3}}\theta\right\}^{\frac{3}{2}}=a$

したがって　$r=\dfrac{a}{\left(\cos^{\frac{2}{3}}\theta+\sin^{\frac{2}{3}}\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$　グラフは 1 (3)の解答参照。

5

(1) $\begin{cases} x = r\cos\theta = e^{\theta}\cos\theta \\ y = r\sin\theta = e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$ より $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(e^{\theta}\sin\theta)'}{(e^{\theta}\cos\theta)'} = \dfrac{e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta + e^{\theta}(-\sin\theta)} = \dfrac{\tan\theta + 1}{1 - \tan\theta}$

(2) $\begin{cases} x = r\cos\theta = \theta^{\theta}\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \theta^{\theta}\sin\theta \end{cases}$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\theta^{\theta}\sin\theta)'}{(\theta^{\theta}\cos\theta)'} = \frac{(\theta^{\theta})'\sin\theta + \theta^{\theta}\cos\theta}{(\theta^{\theta})'\cos\theta + \theta^{\theta}(-\sin\theta)}$$

$$= \frac{(\theta^{\theta})'\tan\theta + \theta^{\theta}}{(\theta^{\theta})' - \theta^{\theta}\tan\theta}$$

ここで $r = \theta^{\theta}$ について $r' = (\theta^{\theta})'$ を求める。

$\log r = \log\theta^{\theta} = \theta\log\theta$

左辺を θ で微分して $\dfrac{d(\log r)}{d\theta} = \dfrac{d(\log r)}{dr}\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{1}{r}\cdot r'$

右辺を θ で微分して $1\cdot\log\theta + \theta\cdot\dfrac{1}{\theta}$

$\therefore\ \dfrac{r'}{r} = \log\theta + \theta\cdot\dfrac{1}{\theta}$ $\therefore\ r' = \theta^{\theta}(\log\theta + 1)$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\theta^{\theta}\left(\log\theta + 1\right)\tan\theta + \theta^{\theta}}{\theta^{\theta}\left(\log\theta + 1\right) - \theta^{\theta}\tan\theta} = \dfrac{\left(\log\theta + 1\right)\tan\theta + 1}{\log\theta + 1 - \tan\theta}$

6

(1) $2y\dfrac{dy}{dx} = (1-x)^2 + x\cdot 2(1-x)\cdot(-1) = (1-x)(1-3x)$ $\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1-x)(1-3x)}{2y}$

(2) $5x^4 - 2y - 2x\dfrac{dy}{dx} + 5y^4\dfrac{dy}{dx} = 0$ $\therefore\ -(2x - 5y^4)\dfrac{dy}{dx} = -(5x^4 - 2y)$ $\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5y^4 - 2y}{2x - 5y^4}$

7

(1)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=\sin t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=\cos t$ より

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^3}=\frac{\cos t(1-\cos t)-(1+\cos t)(1-\cos t)}{(1-\cos t)^3}=\frac{\cos t-1-\cos t}{(1-\cos t)^2}$$

$$=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}$$