１章　微分法

２節　平均値の定理とその応用（p.20~29）

練習 1

⑴　任意の実数 x について，$\left|\mathrm{Tan}^{-1}x\right| \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから，$y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ は実数全体で有界である。

⑵　任意の実数 x について，$\left|e^{-x^2}\right| \leqq 1$ だから，$y=e^{-x^2}$ は実数全体で有界である。

⑶　任意の実数 x について，$\left|1-\cos x\right| \leqq 2$ だから，$y=1-\cos x$ は実数全体で有界である。

練習 2

$f(x)$ は実数全体で連続かつ微分可能であり，$f(0)=f(2)=0$ である。

$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)=0$ を解くと，$x=0$，$\dfrac{4}{3}$

よって，$c=\dfrac{4}{3}$ とすれば，ロールの定理が成り立つ。

練習 3

$\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{8+1}{2+1}=3$，$f'(x)=3x^2$ だから，$3=3c^2$，$-1<c<2$ となる c を求めればよい。

よって，$c=1$

練習 4　（証明）

$f'(x)=a$，$(ax)'=a$ より，$f'(x)=(ax)'$ である。したがって，$f(x)-ax$ は定数関数であり，

定数 b により，$f(x)-ax=b$，すなわち，$f(x)=ax+b$ と表せる。

練習 5

⑴　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

⑵　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1$

⑶　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$

節末問題（p.29）

1

$f(x)$ は実数全体で連続かつ微分可能であり， $f(a)=f(a+1)=-a$ である。

$f'(x)=2x-(2a+1)=0$ を解くと， $x=\dfrac{2a+1}{2}$ である。 $a<\dfrac{2a+1}{2}<a+1$ だから， $c=\dfrac{2a+1}{2}$

2 （証明）

$f'(x)=ax$， $\left(\dfrac{1}{2}a^2\right)'=ax$ より， $f'(x)=\left(\dfrac{1}{2}ax^2\right)'$ である。したがって， $f(x)-\dfrac{1}{2}ax^2$ は

定数関数であり，定数 b により， $f(x)-\dfrac{1}{2}ax^2=b$，すなわち， $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+b$ と表せる。

3

$f(x)$， $g(x)$ は実数全体で連続かつ微分可能であり， $f'(x)=3\neq 0$ である。

$\dfrac{g(1)-g(0)}{f(1)-f(0)}=\dfrac{1-0}{4-1}=\dfrac{1}{3}$， $\dfrac{g'(x)}{f'(x)}=\dfrac{2x}{3}$ より， $\dfrac{g(1)-g(0)}{f(1)-f(0)}=\dfrac{g'(x)}{f'(x)}$ を解くと， $x=\dfrac{1}{2}$ である。

$0<\dfrac{1}{2}<1$ だから， $c=\dfrac{1}{2}$

4

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cos 2x}{e^x+e^{-x}}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{e^x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x}=\frac{3}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}e^x}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}}=0$