１章　微分法

３節　テイラーの定理とその応用（p.30~46）

練習 1

⑴　$\sqrt{1.2} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}(1.2-1)=1+0.1=1.1$

⑵　$\sqrt{1.01} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}(1.01-1)=1+0.005=1.005$

⑶　$\sqrt{0.9} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}(0.9-1)=1-0.05=0.95$

練習 2

⑴　$f(x)=e^x$ とおくと，$f'(x)=e^x$，$f(1)=e$，$f'(1)=e$ だから，$e^x \fallingdotseq e+e(x-1)$

$\therefore\ e^x \fallingdotseq ex$

⑵　$f(x)=\log x$ とおくと，$f'(x)=\frac{1}{x}$，$f(1)=0$，$f'(1)=1$ だから，$\log x \fallingdotseq 0+1\cdot(x-1)$

$\therefore\ \log x \fallingdotseq x-1$

⑶　$f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x$ とおくと，$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$f(1)=\frac{\pi}{4}$，$f'(1)=\frac{1}{2}$ だから，

$\mathrm{Tan}^{-1} \fallingdotseq \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)$

練習 3

⑴　$\sqrt{1.2} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}(1.2-1)-\frac{1}{8}(1.2-1)^2=1+\frac{1}{10}-\frac{1}{200}=\frac{200+20-1}{200}=\frac{219}{200}=1.095$

⑵　$\sqrt{0.9} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}(0.9-1)-\frac{1}{8}(0.9-1)^2=1-\frac{1}{20}-\frac{1}{800}=\frac{800-40-1}{800}=\frac{759}{800}=0.94875$

練習 4

⑴　$f(x)=e^x$ とおくと，$f'(x)=e^x$，$f''(x)=e^x$ だから，$f(0)=f'(0)=f''(0)=1$

よって，$e^x \fallingdotseq 1+1\cdot(x-0)+\frac{1}{2}(x-0)^2$　　$\therefore\ e^x \fallingdotseq 1+x+\frac{x^2}{2}$

⑵　$f(x)=\sin x$ とおくと，$f'(x)=\cos x$，$f''(x)=-\sin x$ だから，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$

よって，$\sin x \fallingdotseq 0+1\cdot(x-0)+\frac{0}{2}(x-0)^2$　　$\therefore\ \sin x \fallingdotseq x$

⑶　$f(x)=\cos x$ とおくと，$f'(x)=-\sin x$，$f''(x)=-\cos x$ だから，$f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(0)=-1$

よって，$\cos x \fallingdotseq 1+0\cdot(x-0)+\frac{-1}{2}(x-0)^2$　　$\therefore\ \cos x \fallingdotseq 1-\frac{x^2}{2}$

練習 5

$f(x)=\sqrt{x}$， $a=1$， $n=3$ としてテイラーの定理を考えると，

$$\sqrt{1+h} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2,\quad R_3=\frac{1}{16\sqrt{(1+\theta h)^5}}h^3$$

よって，近似値は $\sqrt{1.1} \fallingdotseq 1+\frac{1}{20}-\frac{1}{800}=\frac{839}{800}=1.04875$，

誤差を評価すると，$|R_3|=\frac{1}{16\sqrt{\left(1+\frac{\theta}{10}\right)^5}}\left(\frac{1}{10}\right)^3<\frac{1}{16\times 10^3}=0.0000625$

だから，$1.0486875<\sqrt{1.1}<1.0488125$ よって，この近似値は，小数点以下第 3 位まで正しい。

練習 6

$f(x)=e^{x-1}$ とおくと，$f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^{x-1}$ だから

$f'(1)=f''(1)=\cdots=f^{(n)}(1)=e^0=1$ である。よって，e^{x-1} の $x=1$ におけるテイラー展開は，

$$e^{x-1}=1+(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x-1)^2+\cdots$$

練習 7

$f(x)=\frac{1}{x+1}$，$f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$， $f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$， $\cdots$， $f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$ より，

$f(0)=1$，$f'(1)=-1$，$f''(0)=2$， $\cdots$， $f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$ だから，

$$f(x)=1-x+\frac{2}{2!}x^2+\cdots+\frac{(-1)^n n!}{n!}x^n+\cdots=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

練習 8

(1) $\dfrac{1}{e^x}=e^{-x}=1+(-x)+\dfrac{1}{2!}(-x)^2+\dfrac{1}{3!}(-x)^3+\cdots=1-x+\dfrac{1}{2!}x^2-\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots$

(2) $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(1-\dfrac{1}{2!}(2x)^2+\dfrac{1}{4!}(2x)^4-\dfrac{1}{6!}(2x)^6+\cdots\right)\right\}$

$$=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\cdots$$

(3) $2\sin x\cos x=\sin 2x=(2x)-\dfrac{1}{3!}(2x)^3+\dfrac{1}{5!}(2x)^5-\dfrac{1}{7!}(2x)^7+\cdots$

$$=2x-\frac{2^3}{3!}x^3+\frac{2^5}{5!}x^5-\frac{2^7}{7!}x^7+\cdots$$

(4) $\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x}\right)$

$\dfrac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots$ に $t=\dfrac{1}{2}x$ を代入して

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^3+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^3}+\frac{x^3}{2^4}+\cdots$$

練習 9

⑴ $f(x)=x^2-4x$，$f'(x)=2x-4$，$f''(x)=2$

$f'(x)=0$ となるのは，$x=2$ であり，$f''(2)=2>0$ よって，
$x=2$ のとき極小値 $f(2)=4-8=-4$ をとる。

⑵ $f(x)=x^3-3x+2$，$f'(x)=3x^2-3$，$f''(x)=x^2-1$

$f'(x)=0$ となるのは，$x=\pm1$ であり，$f''(-1)=-6<0$，$f(-1)=4$，$f''(1)=6>0$，$f(1)=0$
よって，$x=-1$ のとき極大値 4，$x=1$ のとき極小値 0

⑶ $f(x)=xe^x$，$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$，$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

$f'(x)=0$ を解くと $x=-1$ であり，$f''(-1)=e^{-1}>0$，$f(-1)=-e^{-1}$

よって，$x=-1$ のとき極小値 $-e^{-1}$

⑷ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，$f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$，

$$f''(x)=-\frac{2\left(x^2+1\right)^2-2x\cdot2\left(x^2+1\right)\cdot2x}{\left(x^2+1\right)^4}=-\frac{2x^2+2-8x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{6x^2-2}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$f'(x)=0$ を解くと $x=0$ であり，$f''(0)=-2<0$，$f(0)=1$
よって，$x=0$ のとき極大値 1

練習 10

⑴　$f(x)=x^2-x$，　$f'(x)=2x-1$，　$f''(x)=2$　より　$f''(0)=2>0$

従って，下に凸

⑵　$f(x)=x^3-3x^2+1$，　$f'(x)=3x^2-6x$，　$f''(x)=6x-6$　より　$f''(0)=-6<0$

従って，上に凸

⑶　$f(x)=\sqrt{x+1}=(x+1)^{\frac{1}{2}}$，　$f'(x)=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$，　$f''(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$　より　$f''(0)=-\frac{1}{4}<0$

従って，上に凸

⑷　$f(x)=\cos x-x\sin x$，　$f'(x)=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x$，

$f''(x)=-2\cos x-\cos x+x\sin x=-3\cos x+x\sin x$，$f''(0)=-3<0$

よって，$f(x)$は $x=0$ で上に凸

⑸　$f(x)=x\log(x+1)$，　$f'(x)=\log(x+1)+\frac{x}{x+1}$，

$f''(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2}=\frac{x+2}{(x+1)^2}$，　$f''(0)=2>0$

よって，$f(x)$は $x=0$ で下に凸

⑹　$f(x)=e^{-x^2+1}$，　$f'(x)=e^{-x^2+1}(-2x)=-2xe^{-x^2+1}$，　$f''(x)=-2\left\{e^{-x^2+1}+xe^{-x^2+1}(-2x)\right\}$

よって　$f''(0)=-2(e+0)<0$　従って，上に凸

演習（P.45）

⑴　$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

⑵　$e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

⑶　$e^{1+i\frac{\pi}{2}}=e^1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=ei$

節末問題（P.44）

1

⑴ $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，$f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$より，$f(1)=1$，$f'(1)=-1$，$f''(1)=2$ だから，

$\dfrac{1}{x}\fallingdotseq 1-(x-1)+(x-1)^2$

⑵ $f(x)=\sqrt[3]{x}$，$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，$f''(x)=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$より，$f(1)=1$，$f'(1)=\dfrac{1}{3}$，$f''(1)=-\dfrac{2}{9}$ だから，

$\sqrt[3]{x}\fallingdotseq 1+\dfrac{1}{3}(x-1)-\dfrac{1}{9}(x-1)^2$

2

$f(x)=\log x$，$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，$f'''(x)=\dfrac{2}{x^3}$，$f^{(4)}=-\dfrac{6}{x^4}$より，$f(1)=0$，$f'(1)=1$，

$f''(1)=-1$，$f'''(1)=2$だから，$\log(1+h)\fallingdotseq h-\dfrac{1}{2}h^2+\dfrac{1}{3}h^3$，$R_4=-\dfrac{1}{4(1+\theta h)}h^4$

よって，$\log 1.1\fallingdotseq\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{10}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{10}\right)^3=\dfrac{143}{1500}=0.095333\cdots$

$|R_4|=\dfrac{1}{4(1+\theta h)}\left(\dfrac{1}{10}\right)^4<\dfrac{1}{40000}=0.000025$より，$0.095308333\cdots<\log 1.1<0.095358333\cdots$

だから，この近似値は，小数点以下第 4 位まで正しい。

3

⑴ $f(x)=\log(x^2+1)$，$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$，$f''(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$を解くと$x=0$であり，$f''(0)=2>0$，$f(0)=\log 1=0$だから，$x=0$で極小値 0

⑵ $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}=\dfrac{x-1}{2\sqrt{x^3}}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}+\dfrac{3}{4\sqrt{x^5}}$

$f'(x)=0$を解くと$x=1$であり，$f''(1)=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}>0$，$f(1)=2$だから，$x=1$で極小値 2

4

⑴ $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$,　$f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$,

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}\cdot 2\left(1+\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x\left(1+\sqrt{x}\right)^4}=\frac{3\sqrt{x}+1}{4x\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^3},$$

$f''(1)=\dfrac{1}{8}>0$より，　$f(x)$は$x=1$で下に凸

⑵ $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$,　$f'(x)=\dfrac{e^x x-e^x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$,

$$f''(x)=\frac{\left\{e^x(x-1)+e^x\cdot 1\right\}x^2-e^x(x-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{e^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3},$$

$f''(-1)=\dfrac{e^{-1}(1+2+2)}{-1}=-\dfrac{5}{e}<0$より，　$f(x)$は$x=-1$で上に凸

5

⑴ $f(x)=e^{-x}$,　$f'(x)=-e^{-x}$,　$f''(x)=e^{-x}$,　$f'''(x)=-e^{-x}$,　$\cdots$,　$f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}$,　$\cdots$

$f(1)=e^{-1}$,　$f'(1)=-e^{-1}$,　$f''(1)=e^{-1}$,　$f'''(1)=-e^{-1}$,　$\cdots$,　$f^{(n)}(1)=(-1)^n e^{-1}$,　$\cdots$

よって，$\dfrac{1}{e}\left\{1-(x-1)+\dfrac{1}{2}(x-1)^2-\dfrac{1}{3!}(x-1)^3+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n!}(x-1)^n+\cdots\right\}$

⑵ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$,　$f'(x)=-2x^{-3}$,　$f''(x)=2\cdot 3x^{-4}$,　$f'''(x)=-2\cdot 3\cdot 4x^{-5}$,　$\cdots$,

$f^{(n)}(x)=(-1)^n(x+1)!\,x^{-(n+2)}$,　$\cdots$

$f(1)=1$,　$f'(1)=-2$,　$f''(1)=3!$,　$f'''(1)=-4!$,　$\cdots$,　$f^{(n)}(1)=(-1)^n(n+1)!$,　$\cdots$

よって，$1-2(x-1)+3(x-1)^2-4(x-1)^3+\cdots+(-1)^n(n+1)(x-1)^n+\cdots$

⑶ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$,　$f'(x)=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$,　$f''(x)=\dfrac{3}{2^2}x^{-\frac{5}{2}}$,　$f'''(x)=-\dfrac{3\cdot 5}{2^3}x^{-\frac{7}{2}}$,　$\cdots$,

$f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2-1)}{2^n}x^{-\frac{2n+1}{2}}$,　$\cdots$

$f(1)=1$,　$f'(1)=-\dfrac{1}{2}$,　$f''(1)=\dfrac{3}{4}$,　$f'''(1)=-\dfrac{15}{8}$,　$\cdots$,　$f^{(n)}(1)=(-1)^n\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}$,　$\cdots$

よって，$1-\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{3}{8}(x-1)^2-\dfrac{15}{48}(x-1)^3+\cdots+(-1)^n\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}(x-1)^n+\cdots$

6

(1) $$\frac{1}{\sqrt{e^x}} = e^{-\frac{x}{2}} = 1 + \left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4\cdot 2!}x^2 - \frac{1}{8\cdot 3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2^n n!}x^n + \cdots$$

(2) $$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots) + (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + \ldots)$$

$$= 2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + \cdots + 2x^{2n} + \cdots$$

(3) $$\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2}x + \frac{2^2}{3^3}x^2 - \frac{2^3}{3^4}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}}x^n + \cdots$$

(4) $$1 + x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^n + \cdots$$