３章　偏微分

１節　2 変数関数と偏微分（p.86～110）

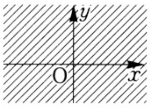
練習 1

⑴　$f(-2,\ 1) = -6+1+1 = -4$，$f(a,\ b-1) = 3a+b-1+1 = 3a+b$

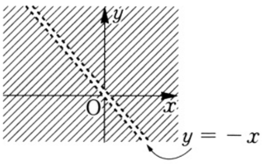
⑵　$f(-2,\ 1) = 4+3 = 7$，$f(a,\ b-1) = a^2+3(b-1) = a^2+3b-3$

練習 2

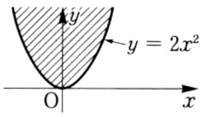
⑴　xy 平面の点 $(x,\ y)$ 全体



⑵　$x+y \fallingdotseq 0$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体。つまり xy 平面から直線 $x+y=0$ を除いた点 $(x,\ y)$ 全体。



⑶　$y-2x^2>0$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体。つまり $y>2x^2$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体。



練習 3

⑴　平面　$2x+3y-z=0$。「$(0,\ 0,\ 0)$ を通りベクトル $\overrightarrow{n} = (2,\ 3,\ -1)$ に垂直な平面」

⑵　x，y がどんな値であっても $z=4$ なので，点 $(x,\ y,\ 4)$（ただし x，y は任意）全体の集まりだから「$(0,\ 0,\ 4)$ を通り z 軸に垂直な平面」

練習 4

⑴　$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta - r\sin\theta}{r\cos\theta + r\sin\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{0-1}{0+1} = -1$，$\theta = 0$ のとき $\dfrac{1-0}{1+0} = 1$

θ によって $f(x,\ y)$ は異なる値に近づくので極限値なし。

⑵　$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta\, r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2}$$　$(\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より$)$

$= \lim_{r\to 0} r^2\cos^2\theta\sin^2\theta = 0$　$(0 \leqq \cos^2\theta \leqq 1,\ 0 \leqq \sin^2\theta \leqq 1$ より$)$

練習 5

⑴ $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y) = \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$

$\displaystyle = \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2}$ （$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より）

$\displaystyle = \lim_{r\to 0}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\theta = 0$ のとき $1 - 0 = 1$，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $0 - 1 = -1$，θ により異なる値に近づくので極限値なし。

よって，$f(x,\ y)$ は $(0,\ 0)$ で連続でない。

⑵ $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y) = \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0$ （練習 4 ⑵より）

一方，仮定より $f(0,\ 0) = 0$。よって，$f(x,\ y)$ は $(0,\ 0)$ で連続である。

練習 6

⑴ $f_x = 2xy$，$f_y = x^2$，$f_x(2,\ 1) = 2\times 2\times 1 = 4$，$f_y(2,\ 1) = 2^2 = 4$

⑵ $f_x = 2x + 2y$，$f_y = 2x$，$f_x(2,\ 1) = 2\times 2 + 2\times 1 = 6$，$f_y(2,\ 1) = 4$

⑶ $\displaystyle f_x = \frac{(x-3y)_x(2x+y) - (x-3y)(2x+y)_x}{(2x+y)^2} = \frac{(2x+y) - (x-3y)\times 2}{(2x+y)^2} = \frac{7y}{(2x+y)^2}$

$\displaystyle f_y = \frac{(x-3y)_y(2x+y) - (x-3y)(2x+y)_y}{(2x+y)^2} = \frac{-3(2x+y) - (x-3y)}{(2x+y)^2} = \frac{-7x}{(2x+y)^2}$

$\displaystyle f_x(2,\ 1) = \frac{7}{(4+1)^2} = \frac{7}{25}$，$\displaystyle f_y(2,\ 1) = \frac{-14}{(4+1)^2} = \frac{-14}{25}$

⑷ $f_x = 3(2x-3y)^2 \times (2x-3y)_x = 6(2x-3y)^2$，$f_y = 3(2x-3y)^2 \times (2x-3y)_y = -9(2x-3y)^2$

$f_x(2,\ 1) = 6(4-3) = 6$，$f_y(2,\ 1) = -9(4-3)^2 = -9$

練習 7 （練習 6 で f_x，f_y はすでに求めている。）

⑴ $f_{xx} = 2y$，$f_{xy} = 2x$，$f_{yx} = 2x$，$f_{yy} = 0$

⑵ $f_{xx} = 2$，$f_{xy} = 2$，$f_{yx} = 2$，$f_{yy} = 0$

⑶ $\displaystyle f_{xx} = 7\cdot\frac{0 - y\cdot 2(2x+y)\cdot 2}{(2x+y)^4} = \frac{-28y}{(2x+y)^3}$，

$\displaystyle f_{xy} = 7\cdot\frac{1\cdot(2x+y)^2 - y\cdot 2(2x+y)\cdot 1}{(2x+y)^4} = 7\cdot\frac{2x-y}{(2x+y)^3}$，

$\displaystyle f_{yx} = -7\cdot\frac{1\cdot(2x+y)^2 - x\cdot 2(2x+y)\cdot 2}{(2x+y)^4} = -7\cdot\frac{2x+y-4x}{(2x+y)^3} = -7\cdot\frac{-2x+y}{(2x+y)^3}$，

$\displaystyle f_{yy} = -7\cdot\frac{0 - x\cdot 2(2x+y)\cdot 1}{(2x+y)^4} = -7\cdot\frac{-2x}{(2x+y)^3} = \frac{14x}{(2x+y)^3}$

⑷ $f_{xx} = 12(2x-3y)\cdot 2 = 24(2x-3y)$，$f_{xy} = 12(2x-3y)\cdot(-3) = -36(2x-3y)$，

$f_{yx} = -18(2x-3y)\cdot 2 = -36(2x-3y)$，$f_{yy} = -18(2x-3y)\cdot(-3) = 54(2x-3y)$

練習 8

練習 7 ⑷より　$f_{yyx} = 108$，$f_{yx} = f_{xy} = -36(2x-3y)$　より $f_{yxy} = f_{xyy} = 108$

練習 9

⑴ $\dfrac{dz}{dt} = f_x x'(t) + f_y y'(t) = 4x(-\sin t) + 6y\cos t$

$= -4\cos t\sin t + 6\sin t\cos t$

$= 2\cos t\sin t = \sin 2t$

⑵ $\dfrac{\partial z}{\partial u} = f_x x_u + f_y y_u = 4x\cdot 1 + 6y\cdot v = 4(u+v) + 6uv\cdot v$

$= 4u + 4v + 6uv^2$

$\dfrac{\partial z}{\partial v} = f_x x_v + f_y y_v = 4x\cdot 1 + 6y\cdot u = 4(u+v) + 6uv\cdot u$

$= 4u + 4v + 6u^2 v$

練習 10　$f_x = y$，$f_y = x$ であるので

⑴ $(1+h)(1+k) = 1\times 1 + (1+\theta k)h + (1+\theta h)k$　より

$1 + h + k + hk = 1 + h + \theta kh + k + \theta hk$　よって　$\theta = \dfrac{1}{2}$

⑵ $(1+h)(2+k) = 1\times 2 + (2+\theta k)h + (1+\theta h)k$　より

$2 + 2h + k + hk = 2 + 2h + \theta kh + k + \theta hk$　よって　$\theta = \dfrac{1}{2}$

練習 11

縦が x cm，横が y cm，高さが x cm とすると体積は $f(x, y) = x^2 y$ なので

$f(6+0.1, 8+0.1) \fallingdotseq f(6, 8) + 0.1\times f_x(6, 8) + 0.1\times f_y(6, 8)$

$= 288 + 0.1\times 96 + 0.1\times 36 = 301.2\,(\mathrm{cm}^3)$

練習 12

⑴ $f_x = 2x$，$f_y = 2y$　より　$dz = 2x\,dx + 2y\,dy$

⑵ $f_x = y$，$f_x = x$　より　$dz = y\,dx + x\,dy$

練習 13

⑴ 縦が x cm，横が y cm とすると面積 z は　$z = f(x, y) = xy$　なので

$dz = f_x\Delta x + f_y\Delta_y = y\Delta x + x\Delta y = 8\times 0.1 + 6\times 0.1 = 1.4\,(\mathrm{cm}^2)$

⑵ ⑴に加え，高さも x cm とすると，体積 z は　$z = f(x, y) = x^2 y$　なので

$dz = f_x\Delta x + f_y\Delta_y = 2xy\,\Delta x + x^2\Delta y$

$= 2\times 6\times 8\times 0.1 + 6^2\times 0.1 = 6\times 0.1\times(2\times 8 + 6) = 13.2\,(\mathrm{cm}^3)$

練習 14

$f_x = y$，$f_y = x$　である。

⑴　$f_x(1,\ 1) = 1$，$f_y(1,\ 1) = 1$　より　$z - 1 = 1(x - 1) + (y - 1)$

よって　$x + y - z - 1 = 0$

⑵　$f_x(1,\ 2) = 2$，$f_y(1,\ 2) = 1$　より　$z - 2 = 2(x - 1) + 1(y - 2)$

$z - 2 = 2x - 2 + y - 2$　よって　$2x + y - z - 2 = 0$

⑶　接点の z 座標は

$z = f(2,\ -1) = -2$ なので

接点は $(2,\ -1,\ -2)$　㋐

一方，$f_x(2,\ -1) = -1$

$f_y(2,\ -1) = 2$　㋑

㋐，㋑より求める平面は

$z - (-2) = (-1)(x - 2) + 2(y - (-1))$

$= -x + 2y + 4$

よって，$z = -x + 2y + 2$

⑷　接点の z 座標は

$z = f(-1,\ -2) = 2$ なので

接点は $(-1,\ -2,\ 2)$　㋐

一方，$f_x(-1,\ -2) = -2$

$f_y(-1,\ -2) = -1$　㋑

㋐，㋑より求める平面は

$z - 2 = -2(x - (-1)) + (-1)(y - (-2))$

$= -2x - y - 4$

よって，$z = -2x - y - 2$

節末問題（p.106）

1

(1)　$y = x^2$ に沿って $(x,\ y) \to (0,\ 0)$ とすると　$\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \dfrac{x^4}{x^4 + x^4} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$

$y = 2x^2$ に沿って $(x,\ y) \to (0,\ 0)$ とすると　$\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \dfrac{x^2 \cdot 2x^2}{x^4 + 4x^4} \longrightarrow \dfrac{2}{5}$

となるので極限値なし。

(2)　与式 $= \displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} (x^2 - y^2) = \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} (r^2 \cos^2\theta - r^2 \sin^2\theta)$

$= \displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} r^2 \cos 2\theta = 0$　$(-1 \leqq \cos 2\theta \leqq 1$ より$)$

2

$f(0,\ 0) = 0$　…㋐

$\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \cos^2\theta}{r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \cos^2\theta = \cos^2\theta$　…㋑

㋐ $\neq$ ㋑　なので　$f(x,\ y)$ は $(x,\ y) = (0,\ 0)$ で連続でない。よって，全微分可能でない。

$f_x(0,\ 0) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,\ 0) - f(0,\ 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-0}{h}$　よって，x について偏微分可能でない。

$f_y(0,\ 0) = \displaystyle\lim_{k\to 0} \frac{f(0,\ 0+k) - f(0,\ 0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$　よって，y について偏微分可能。

3

(1) $$z_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \times (yx^{-1})_x = \frac{x^2}{x^2+y^2} \times (-yx^{-2}) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$z_{xx} = -y \cdot \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad z_{xy} = -\frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \times (x^{-1}) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad z_{yx} = \frac{(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_{yy} = x\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

(2) $$z_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \times \left(\frac{x}{y}\right)_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \times (x)(-y^{-2}) = \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}},$$

$$z_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \times \left(\frac{x}{y}\right)_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \times \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}},$$

$$z_{xx} = \left[(y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_x = -\frac{1}{2}(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}} \times (-2x) = \frac{x}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$z_{xy} = \left[(y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_y = -\frac{1}{2}(y^2-x^2)^{-\frac{3}{2}} \times 2y = \frac{-y}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z_{yx} = -\frac{y\sqrt{y^2-x^2} - x\left(y\cdot\frac{1}{2}(y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\right)}{y^2(y^2-x^2)} = -\frac{y(y^2-x^2)+x^2y}{y^2\sqrt{y^2-x^2}^{\,3}} = \frac{-y}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z_{yy} = -x\cdot\frac{-\left(\sqrt{y^2-x^2} + y\cdot\frac{1}{2}(y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2y)\right)}{y^2(y^2-x^2)} = x\cdot\frac{\sqrt{y^2-x^2}+\frac{y^2}{\sqrt{y^2-x^2}}}{y^2(y^2-x^2)} = \frac{x(2y^2-x^2)}{y^2(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) $$z_x = \frac{2x}{x^2+y^2},$$

$$z_{xx} = 2\cdot\frac{1(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_y = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad z_{yy} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_{xy} = 2x\cdot\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad z_{yx} = 2y\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

4

$z_r = z_x x_r + z_y y_r = z_x \cos\theta + z_y \sin\theta$　より

$(z_r)^2 = {z_x}^2 \cos^2\theta + {z_y}^2 \sin^2\theta + 2z_x z_y \cos\theta \sin\theta$　㋐

$z_\theta = z_x x_\theta + z_y y_\theta = z_x r(-\sin\theta) + z_y r\cos\theta$　より

$(z_\theta)^2 = {z_x}^2 r^2 \sin^2\theta + {z_y}^2 r^2 \cos^2\theta - 2z_x z_y r^2 \sin\theta\cos\theta$　㋑

㋐，㋑より　$(z_r)^2 + \dfrac{1}{r^2}(z_\theta)^2 = {z_x}^2 + (z_y)^2$

5

$z = xy$　とすると　$\Delta z \fallingdotseq z_x \Delta x + z_y \Delta y = y\Delta x + x\Delta y$

ここで　$\Delta x = 0.1,\ \Delta y = 0.1$　とおくと　$\Delta z \fallingdotseq 8 \times 0.1 + 6 \times 0.1 = 1.4$（cm）

6

⑴　$z = f(x,\ y) = x^3 y + 4xy^2$　とおくと　$f_x = 3x^2 y + 4y^2,\ f_y = x^3 + 8xy$　より

$f_x(1,\ -1) = 1,\ f_y(1,\ -1) = -7$　であり，接平面は

$z - 3 = 1 \cdot (x-1) - 7(y+1)$　よって　$x - 7y - z - 5 = 0$

⑵　$z = f(x,\ y) = xy + 3xy^2$　とおくと　$f_x = y + 3y^2,\ f_y = x + 6xy$　より

$f_x(1,\ 1) = 4,\ f_y(1,\ 1) = 7$　であり，接平面は

$z - 4 = 4(x-1) + 7(y-1)$　よって　$4x + 7y - z - 7 = 0$

7

底面の 1 辺を x，高さを y とすると　$V = x^2 y$　であり

$V_x = 2xy,\ V_y = x^2$ である。$\Delta V \fallingdotseq V_x \Delta x + V_y \Delta y = 2xy\Delta x + x^2 \Delta y$　なので

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \fallingdotseq \left|\frac{2xy\Delta x}{x^2 y}\right| + \left|\frac{x^2 \Delta y}{x^2 y}\right| \leqq 2 \times \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$

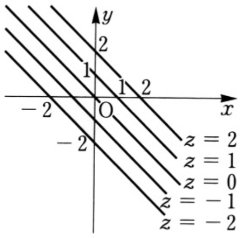
$$= 2 \times 0.01 + 0.01 = 0.03$$

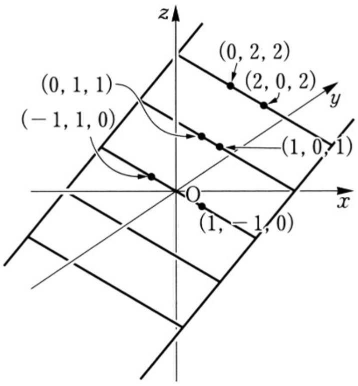
よって誤差は 3%以内。

演習（p.108）

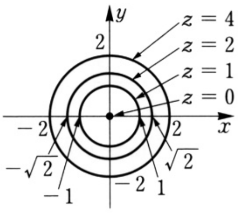
演習 1

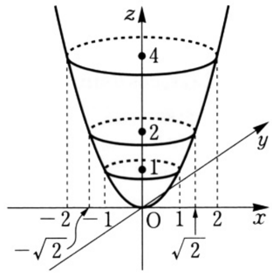
⑴





⑵





⑶