３章　偏微分

２節　偏微分の応用（p.111～121）

練習 1

⑴　$f_x = 2x - 2 = 0,\ f_y = 2y - 1 = 0$ を満たすのは $(x,\ y) = \left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ のみ。

$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = 0,\ f_{yy} = 2$ より $\mathrm{H}(x,\ y) = 2 \times 2 - 0^2 = 4$。したがって $\mathrm{H}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right) = 4 > 0$。

よって，$\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ で極値をもつ。値は $f\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right) = 1 + \dfrac{1}{4} - 2 - \dfrac{1}{2} + 1 = -\dfrac{1}{4}$

$f_{xx}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right) > 0$ よりこれは極小値

⑵　$f_x = 2x + 4y = 0$ かつ $f_y = 4x - 12y = 0$ を満たすのは $x = 0$，かつ $y = 0$ のみ。

$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = 4,\ f_{yy} = -12$ より $\mathrm{H}(x,\ y) = 2 \times (-12) - 16 = -40$。

$\mathrm{H}(0,\ 0) = -40 < 0$ より極値なし。

⑶　(o)　$f_x = 2x = 0$，かつ $f_y = 2y + 3y^2 = y(2 + 3y) = 0$ を満たすのは

$x = 0$ かつ $y = 0,\ -\dfrac{2}{3}$ のとき。従って$(0,\ 0),\ \left(0,\ -\dfrac{2}{3}\right)$で極値をとる可能性がある。

$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = 0,\ f_{yy} = 2 + 6y$ なので $\mathrm{H}(x,\ y) = 2(2 + 6y)$ より

ヘシアンは（i）　$\mathrm{H}(0,\ 0) = 4(1 + 0) > 0$　より $(0,\ 0)$ で極値をとる。

その値は $Z = f(0,\ 0) = 0$

$f_{xx}(0,\ 0) = 2 > 0$ よりこれは極小値である。$(0,\ 0)$ で極小値 0

(ii)　$\mathrm{H}\left(0,\ -\dfrac{2}{3}\right) = 4(1 - 2) < 0$　よって，$\left(0,\ -\dfrac{2}{3}\right)$で極値をとらない。

練習 2

⑴　$F(x,\ y) = x^2 + xy + y^2 - 6$ とおくと $y' = \dfrac{-F_x}{F_y} = \dfrac{-(2x + y)}{x + 2y}$

⑵　$F(x,\ y) = x^3 + y^3 - 6xy$ とおくと $y' = \dfrac{-F_x}{F_y} = \dfrac{-(3x^2 - 6y)}{3y^2 - 6x} = \dfrac{-(x^2 - 2y)}{y^2 - 2x}$

練習 3

⑴　$F(x,\ y)=\dfrac{x^2}{4}-y^2-1$ とおくと $F_x=\dfrac{1}{2}x$, $F_x(4,\ \sqrt{3})=\dfrac{4}{2}=2$

$F_y=-2y$　$F_y(4,\ \sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

よって，l は $2(x-4)-2\sqrt{3}(y-\sqrt{3})=0$

$2x-2\sqrt{3}y-8+6=0$　よって　$x-\sqrt{3}y-1=0$。

l' は　$\sqrt{3}x+y-5\sqrt{3}=0$

⑵　$F(x,\ y)=y^2-8x$ とおくと $F_x=-8$, $F_x(2,\ 4)=-8$

$F_y=2y$　$F_y(2,\ 4)=8$

よって，l は $-8(x-2)+8(y-4)=0$

従って　$x-y+2=0$,

l' は　$8(x-2)+8(y-4)=0$　より　$x+y-6=0$

練習 4

⑴　$F(x,\ y)=3x^2+4xy+4y^2-24=0$　…㋐

$F_x(x,\ y)=6x+4y=0$　より　$y=-\dfrac{3}{2}x$　…㋑

㋐に代入して　$6x^2=24$, $x=\pm 2$　よって，㋑より $(2,\ -3)$, $(-2,\ 3)$ で極限をとる可能性あり。

$F_{xx}=6$, $F_y=4x+8y$ より $(2,\ -3)$ のとき $-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=\dfrac{-6}{8-24}>0$ より 極小値は $y=-3$,

$(-2,\ 3)$ のとき　$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=\dfrac{-6}{-8+24}<0$ より 極大値は $y=3$

⑵　$F(x,\ y)=x^2-4y^2+9=0$　…㋒

$F_x=2x=0$ よって $x=0$

㋒に代入して　$y=\pm\dfrac{3}{2}$　　よって　$\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $\left(0,\ -\dfrac{3}{2}\right)$ で y が極値をとる可能性。

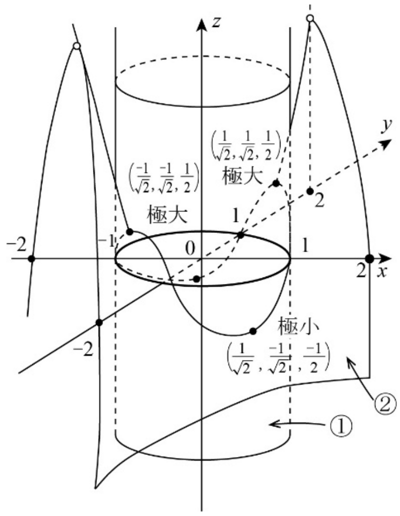
$F_{xx}=2$, $F_y=-8y$　より　$\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ のとき　$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=\dfrac{-2}{-12}>0$　極小値　$y=\dfrac{3}{2}$

$\left(0,\ -\dfrac{3}{2}\right)$ のとき $-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=\dfrac{-2}{12}<0$　極大値　$y=-\dfrac{3}{2}$

練習 5

⑴　極大値　$2\sqrt{5}$，極小値　$-2\sqrt{5}$

⑵　$g = x^2 + y^2 - 1 = 0$　……①，　$f = xy$　……②とおくと



$f_x = y$，$f_y = x$，$g_x = 2x$，$g_y = 2y$

$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = 2y^2 - 2x^2 = 0$　より　$y = \pm x$

①より $x^2 + x^2 = 1$，$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　②より $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって

$(x,\ y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

順に A，B，C，D とおくと

グラフより，A，D で極大値 $z = \dfrac{1}{2}$，

B，C で極小値 $z = -\dfrac{1}{2}$ となる。

節末問題（p.122）

1

⑴　$f_x = 3x^2$，$f_{xx} = 6x$，$f_{xy} = 0$，$f_y = 2y$，$f_{yy} = 2$　より　$\mathrm{H}(x,\ y) = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 12x$。

$f_x = f_y = 0$ となるのは $(x,\ y) = (0,\ 0)$ のときである。$\mathrm{H}(0,\ 0) = 12 \times 0 = 0$ より p113 の定理は使えない。

x 軸上においては $y = 0$ だから $f(x,\ y) = x^3$ となるが，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ 近くで x が増加すると $f(x,\ y)$ は増加。したがって $(x,\ y) = (0,\ 0)$ で極値をとらない。よって　極値なし。

⑵　$f_x = 6x + 3y$，$f_{xx} = 6$，$f_{xy} = 3$，$f_y = 3x + 6y^2$，$f_{yy} = 12y$　より　$\mathrm{H}(x,\ y) = 72x - 9$。

$f_x = f_y = 0$ となるのは $y = -2x$　より　$3x + 6 \cdot 4x^2 = 0$　　$x(8x+1) = 0$。よって $x = 0,\ -\dfrac{1}{8}$

よって $(x,\ y) = (0,\ 0)$，$\left(\dfrac{-1}{8},\ \dfrac{1}{4}\right)$

$\mathrm{H}(0,\ 0) = -9 < 0$　より　$(x,\ y) = (0,\ 0)$ で極値をとらない。

$\mathrm{H}\left(-\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{4}\right) = 18 - 9 > 0$　より　$(x,\ y) = \left(-\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{4}\right)$　で極値をとる。

$f_{xx}\left(-\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{4}\right) = 6 > 0$　よりそれは極小値であり，その値は $f\left(-\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{3}{64} - \dfrac{3}{32} + \dfrac{2}{64} = \dfrac{-1}{64}$

よって　$(x,\ y) = \left(-\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{4}\right)$ のとき極小値　$\dfrac{-1}{64}$

(3) $f_x = e^x(x^2 - y^2) + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 - y^2 + 2x)$, $f_y = e^x(-2y)$

$f_{xx} = e^x(x^2 - y^2 + 2x) + e^x(2x+2) = e^x(x^2 - y^2 + 4x + 2)$, $f_{xy} = e^x(-2y)$, $f_{yy} = -2e^x$ より

$f_x = f_y = 0$ となるのは $x = 0, \ -2$ のとき。

$\mathrm{H}(x, \ y) = -2e^{2x}(x^2 - y^2 + 4x + 2)$ より

$\mathrm{H}(0, \ 0) = -2 \times 2 < 0$ で $(x, \ y) = (0, \ 0)$ では極値をとらない。

$\mathrm{H}(-2, \ 0) = -2e^{-4}(4 - 8 + 2) > 0$ より $(x, \ y) = (-2, \ 0)$ で極値をとる。

$f_{xx}(-2, \ 0) = e^{-2}(4 - 8 + 2) < 0$ よりそれは極大値。その値は $f(-2, \ 0) = e^{-2}(4 - 0) = \dfrac{4}{e^2}$

よって $(x, \ y) = (-2, \ 0)$ のとき極大値 $\dfrac{4}{e^2}$

(4) $f_x = \cos x$, $f_y = -\sin y$, $f_{xx} = -\sin x$, $f_{yy} = -\cos y$, $f_{xy} = 0$ より

$f_x = f_y = 0$ となるのは $x = \dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{3}{2}\pi$, $y = \pi$ のとき。

$\mathrm{H}(x, \ y) = \sin x \cos y - 0^2$ より $\mathrm{H}\left(\dfrac{\pi}{2}, \ \pi\right) = 1 \times (-1) < 0$

よって $(x, \ y) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \ \pi\right)$ では極値をとらない。

$\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{2}\pi, \ \pi\right) = (-1) \times (-1) > 0$ より $(x, \ y) = \left(\dfrac{3}{2}\pi, \ \pi\right)$ で極値をとる。

$f_{xx}\left(\dfrac{3}{2}\pi, \ \pi\right) > 0$ よりそれは極小値。その値は $f\left(\dfrac{3}{2}\pi, \ \pi\right) = -1 - 1 = -2$

よって $(x, \ y) = \left(\dfrac{3}{2}\pi, \ \pi\right)$ のとき極小値 -2

2 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-F_x}{F_y}$ をつかう。

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(2x - 6)}{2y - 8} = \dfrac{-x + 3}{y - 4}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}} = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(3x^2 - 3y)}{-3x + 3y^2} = \dfrac{-x^2 + y}{-x + y^2}$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(2x + 2y)}{2x - 2y} = \dfrac{-x - y}{x - y}$

3　$F(x,\ y)=0$ 上の点 $(x,\ y)=(a,\ b)$ において

接線は　$F_x(a,\ b)(x-a)+F_y(a,\ b)(y-b)=0$

法線は　$F_y(a,\ b)(x-a)-F_x(a,\ b)(y-b)=0$

⑴　$F_x=\dfrac{1}{2}x$，$F_y=2y$　より

接線は　$\dfrac{1}{2}(x-1)+\sqrt{3}\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$，$x-1+2\sqrt{3}\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0,$

$x-1+2\sqrt{3}y-3=0$　　接線は　$x+2\sqrt{3}y-4=0$

法線は　$\sqrt{3}(x-1)-\dfrac{1}{2}\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$，$2\sqrt{3}(x-1)-\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$，

$2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}-y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　法線は　$4\sqrt{3}x-2y-3\sqrt{3}=0$

⑵　$F_x=2x$，$F_y=-\dfrac{1}{2}y$　より　$2\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\times1(y-1)=0$

$\sqrt{5}x-\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}=0$，$2\sqrt{5}x-5-y+1=0$　　接線　は $2\sqrt{5}x-y-4=0$

法線は $-\dfrac{1}{2}\times1\left(x-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)-2\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}(y-1)=0$，$-\left(x-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)-2\sqrt{5}(y-1)=0$

$-x+\dfrac{\sqrt{5}}{2}-2\sqrt{5}y+2\sqrt{5}=0$，$-2x+\sqrt{5}-4\sqrt{5}y+4\sqrt{5}=0$　　法線は　$-2x-4\sqrt{5}y+5\sqrt{5}=0$

⑶　$F_x=y$，$F_y=x$　より　$4(x-1)+1(y-4)=0$，$4x-4+y-4=0$　　接線は　$4x+y-8=0$

法線は　$1\times(x-1)-4(y-4)=0$　　法線は　$x-4y+15=0$

⑷　$F_x=4$，$F_y=-2y$　より　$4(x-1)-4(y-2)=0$，$x-1-y+2=0$　　接線は　$x-y+1=0$

法線は　$-4(x-1)-4(y-2)=0$，$-x+1-y+2=0$　　法線は　$-x-y+3=0$

4

(1) $F = xy^2 + x^2y - 2 = 0$ ㋐, $F_x = y^2 + 2xy = 0$ ㋑ をみたす$(x,\ y)$を求める。

㋑より $y(y + 2x) = 0$ なので $y = 0$, 又は $y = -2x$。$y = 0$ は㋐をみたさないので

$y = -2x$ ㋒, これを㋐に代入して $4x^3 - 2x^3 - 2 = 0$ よって $x = 1$, ㋒より $y = -2$

$-\dfrac{F_{xx}}{F_y} = \dfrac{-2y}{2xy + x^2} = \dfrac{4}{-4+1} < 0$ より y は $x = 1$ で極大値 $y = -2$ をとる。

(2) $F = 8x + 8y + x^2y^2 = 0$ ㋐, $F_x = 8 + 2xy^2 = 0$ ㋑ をみたす$(x,\ y)$を求める。

㋑より $4 + xy^2 = 0$ よって $4x + x^2y^2 = 0$ ㋑′。㋐－㋑′より $4x + 8y = 0$

よって $x = -2y$ ㋒。㋐より $-16y + 8y + 4y^4 = 0$, $-8y + 4y^4 = 0$

$-2y + y^4 = 0$, $y(-2 + y^3) = 0$。$y = 0$ のとき㋑が成立しないので $y^3 = 2$。

よって $y = \sqrt[3]{2}$。㋒より $x = -2\sqrt[3]{2}$

$-\dfrac{F_{xx}}{F_y} = \dfrac{-2y^2}{8 + 2yx^2} = \dfrac{-2\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{8 + 2\sqrt[3]{2}\cdot 4\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} < 0$ より y は $x = -2\sqrt[3]{2}$ で極大値 $y = \sqrt[3]{2}$ をとる。

(3) $F = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ ㋐, $F_x = 3x^2 - 3y = 0$ ㋑ をみたす$(x,\ y)$を求める。

㋑より $y = x^2$ よって㋐より $x^3 + x^6 - 3x^3 = 0$, $x^6 - 2x^3 = x^3(x^3 - 2) = 0$

よって $x = 0$, $\sqrt[3]{2}$。$x = 0$ のとき $y = 0$ だが, このとき $F_y = 3y^2 - 3x = 0$ となるので

$(x,\ y) = (0,\ 0)$ は特異点。$x = \sqrt[3]{2}$ のとき $y = (\sqrt[3]{2})^2$ で

$-\dfrac{F_{xx}}{F_y} = -\dfrac{6x}{3y^2 - 3x} = -\dfrac{6\sqrt[3]{2}}{3\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 - 3\sqrt[3]{2}} < 0$ より y は $x = \sqrt[3]{2}$ で極大値 $y = (\sqrt[3]{2})^2$ をとる。

(4) $F = x^2 + 4xy + 5y^2 - 1 = 0$ ㋐, $F_x = 2x + 4y = 0$ ㋑ をみたす$(x,\ y)$を求める。

㋑より $y = -\dfrac{1}{2}x$ なので ㋐より $x^2 - 2x^2 + \dfrac{5}{4}x^2 - 1 = 0$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$。

よって $y = \mp 1$。

$(x,\ y) = (2,\ -1)$ のとき $-\dfrac{F_{xx}}{F_y} = -\dfrac{2}{4x + 10y} = -\dfrac{1}{2x + 5y} = -\dfrac{1}{8 - 10} > 0$

$(x,\ y) = (-2,\ 1)$ のとき $-\dfrac{F_{xx}}{F_y} = -\dfrac{1}{-4 + 5} < 0$

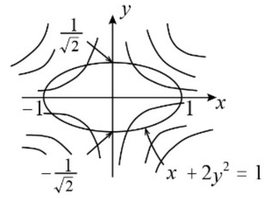
よって y は $x = 2$ のとき極小値 $y = -1$, $x = -2$ のとき極大値 $y = 1$ をとる。

5

⑴　$f_x = y$, $f_y = x$, $g_x = 2x$, $g_y = 4y$ より

$f_x g_y - f_y g_x = 4y^2 - 2x^2 = 0$ をみたすのは $2x^2 = 4y^2$, $x = \pm\sqrt{2}\,y$ のとき。

与式に代入して $2y^2 + 2y^2 = 1$　$y = \pm\dfrac{1}{2}$, よって $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (複号同順)。

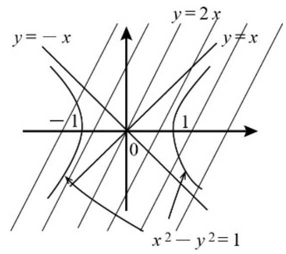


曲面 $x^2 + 2y^2 = 1$ と曲面 $z = xy$ との交わりは第 1, 第 3 象限で極大値, 第 2, 第 4 象限で極小値をもつことがそれぞれ「研究」の等高線図を利用する方法で分かるので

$(x,\ y) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$ のとき極大値 $z = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$(x,\ y) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\dfrac{1}{2}\right)$ のとき極小値 $z = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

⑵　$f_x = 2$, $f_y = -1$, $g_x = 2x$, $g_y = -2y$ より $f_x g_y - f_y g_x = -4y + 2x = 0$。



これをみたすのは $x = 2y$ のとき。

与式に代入して $4y^2 - y^2 = 1$

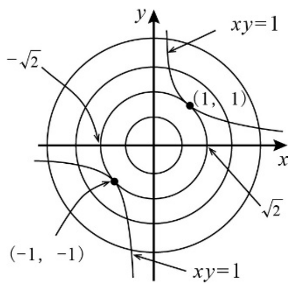
$y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (複号同順)。

曲面 $x^2 - y^2 = 1$ と平面 $z = 2x - y$ との交わりは, 第 1 象限で極大値, 第 3 象限で極小値をもつことがそれぞれ「研究」の等高線図を利用する方法で分かるので

$(x,\ y) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき極小値　$z = \dfrac{4}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$(x,\ y) = \left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき極大値　$z = \dfrac{-4}{\sqrt{3}} - \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

⑶　$f_x = 2x$, $f_y = 2y$, $g_x = y$, $g_y = x$ より



$f_x g_y - f_y g_x = 2x^2 - 2y^2 = 0$ をみたすのは $x = \pm y$ のとき。

与式に代入して $x^2 = 1$, $x = \pm 1$。与式より $y = \pm 1$ (複号同順)。

曲面 $xy = 1$ と曲面 $z = x^2 + y^2$ との交わりは, 第 1 象限, 第 3 象限で極小値をもつことがそれぞれ「研究」の等高線図を利用する方法で分かるので

$(x,\ y) = (1,\ 1)$ で極小値　$z = 1 + 1 = 2$

$(x,\ y) = (-1,\ -1)$ で極小値　$z = (-1)^2 + (-1)^2 = 2$

6

$f(x,\ y) = Ax^2 + 2Exy + By^2$， $g(x,\ y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ とする。

$f_x = 2Ax + 2Ey$， $f_y = 2Ex + 2By$， $g_x = 2x$， $g_y = 2y$ より極値をとる点 $(x,\ y) = (a,\ b)$ について，

ラグランジュの乗数法より

$$\begin{cases}(2Aa + 2Eb) - \lambda \cdot 2a = 0 \\ (2Ea + 2Bb) - \lambda \cdot 2b = 0\end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases}(A - \lambda)a + Eb = 0 & ㋐ \\ Ea + (B - \lambda)b = 0 & ㋑\end{cases}$$

従って　㋐ $\times a$，㋑ $\times b$ より $\begin{cases}(A - \lambda)a^2 + Eba = 0 & ㋐' \\ Eab + (B - \lambda)b^2 = 0 & ㋑'\end{cases}$

㋐$'$＋㋑$'$　より　$Aa^2 - \lambda a^2 + 2Eab + Bb^2 - \lambda b^2 = 0$

$Aa^2 + 2Eab + Bb^2 = \lambda(a^2 + b^2)$

よって　$f(a,\ b) = \lambda$　　（今 $g(a,\ b) = a^2 + b^2 - 1 = 0$）

条件 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとで連続関数 $f(x,\ y)$ が最大値，最小値をもつ事実を用いると λ は極値である。㋒

一方，㋐ ㋑が $(a,\ b) = (0,\ 0)$ 以外の解をもつには $(A - \lambda)(B - \lambda) - E^2 = 0$，

$\lambda^2 - (A + B)\lambda + AB - E^2 = 0$　㋓　　㋒より λ は極値だが $M,\ m$ が極値なので $\lambda = M,\ m$ であり

㋓より $A + B = M + m$， $AB - E^2 = Mm$， である。

(参考)

$\begin{pmatrix} A & E \\ E & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が ㋐ ㋑ より導かれるが，今 $a^2 + b^2 = 1$ より

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから λ は対称行列 $\begin{pmatrix} A & E \\ E & B \end{pmatrix}$ の固有値である。

7

底面の半径を x，高さを y とすると体積 $V = \pi x^2 y = a^3$ であるから $g(x,\ y) = \pi x^2 y - a^3$ とおく。

表面積 $f(x,\ y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ とする。

$f_x = 4\pi x + 2\pi y$， $f_y = 2\pi x$， $g_x = 2\pi xy$， $g_y = \pi x^2$　より　$f_x g_y - f_y g_x = (4\pi x + 2\pi y)\pi x^2 - 2\pi x(2\pi xy) = 0$

$(4x + 2y)x^2 - 2x(2xy) = 0$， $4x^3 + 2yx^2 - 4x^2 y = 0$

$2x^3 + yx^2 - 2x^2 y = 0$， $x > 0$ より x^2 でわると $2x + y - 2y = 0$， $2x = y$

このとき　$V = \pi x^2 \cdot 2x = a^3$ なので　$x^3 = \dfrac{a^3}{2\pi}$

$x = \dfrac{a}{\sqrt[3]{2\pi}}$， $y = \dfrac{2a}{\sqrt[3]{2\pi}}$　表面積が最小となる x は必ずあるので，このときが求める答となる。

底面の半径は $\dfrac{a}{\sqrt[3]{2\pi}}$， 高さは $\dfrac{2a}{\sqrt[3]{2\pi}}$

演習（p.124）

$ax = \alpha(y - \alpha)$ ……㋐

より　$f = ax - \alpha y + \alpha^2 = 0$ とおくと

$f_\alpha = -y + 2\alpha = 0$　　よって　$\alpha = \dfrac{y}{2}$　これを㋐に代入して

$ax = \dfrac{y}{2}\left(y - \dfrac{y}{2}\right) = \dfrac{y^2}{4}$　よって　$y^2 = 4ax$