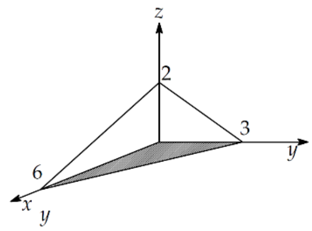
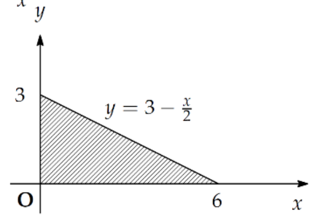
４章　重積分

２節　重積分の応用（p.145～151）

練習 1

⑴　$x+2y+3z=6$ から $z=2-\dfrac{x}{3}-\dfrac{2}{3}y$ であるから





$$V=\iint_D z\,dx\,dy=\int_0^6\int_0^{3-\frac{x}{2}}\left(2-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}y\right)dy\,dx$$

$$=\int_0^6\left[\left(2-\frac{x}{3}\right)y-\frac{y^2}{3}\right]_0^{3-\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int_0^6\left\{\left(2-\frac{x}{3}\right)\left(3-\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(3-\frac{x}{2}\right)^2\right\}dx$$

$$=\int_0^6\left\{\frac{1}{6}(x-6)^2-\frac{1}{12}(x-6)^2\right\}dx$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^6(x-6)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{36}\Big[(x-6)^3\Big]_0^6=\frac{6^3}{36}=6$$

⑵　3

⑶　$\dfrac{10}{3}$

練習 2

$D=\left\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqq 1,\quad y\geqq 0\right\}$ とおくと，求める体積 V は対称性から

$$V=2\iint_D(1-x)\,dx\,dy$$

$$=2\int_0^\pi\int_0^1(1-r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_0^1d\theta$$

$$=2\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos\theta\right)d\theta$$

$$=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\Big[\sin\theta\Big]_0^\pi\right)=\pi$$

練習 3

$D=\left\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 2x,\quad y \geqq 0\right\}$ とおくと，求める体積 V は対称性から

$$V=2\iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}\ dx\,dy$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}(4-r^2)^{\frac{1}{2}}\ r\ dr\ d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{8}{3}\sin^3\theta+\frac{8}{3}\right)d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\ d\theta=\frac{16}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

練習 4

$$\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

練習 5

⑴ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\ dx \cdots$ (a)

$t=\sqrt{x}$ とおく,

$dx=2tdt$,

$x:0 \to +\infty$ のとき

$t:0 \to +\infty$ であるから

$$(\mathrm{a})=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t}\cdot 2t\ dt$$

$$=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\ dt$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

⑵ $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}\ dx=\int_0^{+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)\left(e^{-x^2}\right)'\ dx$

$$=\left[-\frac{x}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}\ dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\ dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

練習 6　4 分円の領域を D として，

$$x_G=\frac{\iint_D x\rho\,dx\,dy}{\iint_D \rho\,dx\,dy}=\frac{\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\rho r\,dr\,d\theta}{\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho r\,dr\,d\theta}$$

$$=\frac{\rho\frac{a^3}{3}\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{\rho\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{a}{3}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4a}{3\pi}$$

y_G についても対称性から

$y_G=\dfrac{4a}{3\pi}$　なので，$(x_G,\ y_G)=\left(\dfrac{4a}{3\pi},\ \dfrac{4a}{3\pi}\right)$

練習 7

$$I_y=\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\cos^2\theta\,\rho r\,dr\,d\theta$$

$$=\rho\int_0^R r^3\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}R^4\rho\cdot 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}R^4\rho\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(\rho\pi R^2)\cdot R^2=\frac{1}{4}\rho\pi R^4$$

節末問題（p.152）

1

(1)　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+z=1$　より　$z=1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}$　となるから，求める体積は

$$\int_0^2\int_0^{4-2x}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)dy\,dx=\frac{1}{4}\int_0^2\int_0^{4-2x}\left\{(4-2x)-y\right\}dy\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2\left[(4-2x)y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^{4-2x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2\left((4-2x)^2-\frac{1}{2}(4-2x)^2\right)dx$$

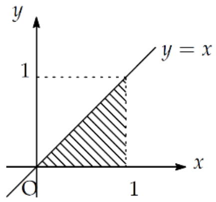
$$=\frac{1}{8}\int_0^2(4-2x)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(x-2)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\left[(x-2)^3\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

⑵　積分領域 D は条件から



の斜線部分であるから

$$V=\iint_D\left\{e^{x+y}-(x+y)\right\}dx\,dy$$

$$=\int_0^1\int_0^x\left\{e^{x+y}-(x+y)\right\}dy\,dx$$

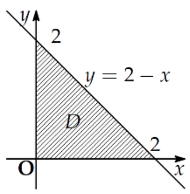
$$=\int_0^1\left[e^xe^y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^1\left(e^{2x}-\frac{3}{2}x^2-e^x\right)dx$$

$$=\left[\frac{e^{2x}}{2}-\frac{x^3}{2}-e^x\right]_0^1$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-e-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{e^2}{2}-e$$

⑶　積分領域 D は条件から



の斜線部分であるから

$$V=\iint_D\left\{x-(-x)\right\}dx\,dy$$

$$=\int_0^2\int_0^{2-x}2x\,dy\,dx$$

$$=\int_0^2 2x\left(\int_0^{2-x}dy\right)dx$$

$$=\int_0^2 2x(2-x)\,dx$$

$$=\int_0^2(4x-2x^2)\,dx$$

$$=\left[2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=8-\frac{2}{3}\cdot 8=\frac{8}{3}$$

⑷

$$V=\iint_D \left\{4-(x^2+y^2)\right\} dx\, dy$$

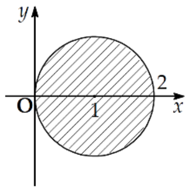
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2) r\, dr\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^2 (4-r^2)\, r\, dx$$

$$=2\pi\left[2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^2$$

$$=2\pi\left(8-\frac{16}{4}\right)=8\pi$$

⑸ $z=x^2+y^2$ と $z=2x$ から z を消去すると $(x-1)^2+(y)^2=1$ であるから，
積分領域 D は



となり，極座標に変換して計算すると

$$V=\iint_D \left\{2x-(x^2+y^2)\right\} dx\, dy$$

$$=\iint_{D'} \left\{2r\cos\theta-(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)\right\} r\, dr\, d\theta$$

$$\left(D'=\left\{(r,\ \theta)\,|\,0 \leqq r \leqq 2\cos\theta,\quad -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right\}\right)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} (2r\cos\theta-r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2}{3}r^3\cos\theta-\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3}\cdot 8\cos^4\theta-\frac{1}{4}\cdot 16\cos^4\theta\right) d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16}{3}\cos^4\theta-4\cos^4\theta\right) d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

⑹　$x^2+y^2+z^2=2$　より　$z=\pm\sqrt{2-(x^2+y^2)}$

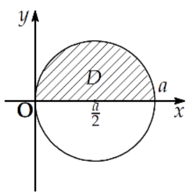
積分領域 D は単位円の内部であるから，
極座標に変換して計算すると

$$V=\iint_D\left\{\sqrt{2-(x^2+y^2)}-\left(-\sqrt{2-(x^2+y^2)}\right)\right\}dx\,dy$$
$$=2\iint_D\sqrt{2-(x^2+y^2)}\ dx\,dy$$
$$=2\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}\ r\ dr\ d\theta$$
$$=4\pi\int_0^1\left(2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}\ r\ dr$$
$$=-2\pi\left[\frac{2}{3}\left(2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi$$

⑺　立体の xy 平面と xz 平面に対する対称性から，
求める立体の体積 V は

$$V=4\iint_D\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\ dx\,dy$$

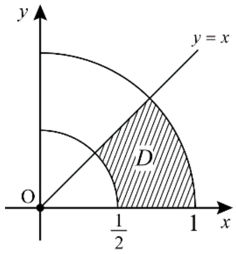
ここで，積分領域 D は



の斜線部分である。極座標に変換すると

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\ r\ dr\ d\theta$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\cos\theta}\ d\theta$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{3}a^3\sin^3\theta+\frac{1}{3}a^3\right)d\theta$$
$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\ d\theta$$
$$=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

(8) 積分領域 D は



の斜線部分である。求める体積を V とし，極座標に変換すると

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D \mathrm{Tan}\left(\frac{y}{x}\right) dx\, dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) \cdot r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{Tan}^{-1}\left(\tan\theta\right) \cdot r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \theta r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\, d\theta \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{1} r\, dr \\
&= \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{3}{256}\pi^2
\end{aligned}
$$

2 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ を z について解けば $z = \pm c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$

極座標 $x = ar\cos\theta$， $y = br\sin\theta$ に変換すると，ヤコビ行列式 J は $J = abr$ となる。

対称性を考慮すると求める体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 c\sqrt{1 - r^2}\ abr\, dr\, d\theta \\
&= 4\pi abc \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}\ r\, dr \\
&= -2\pi abc \left[\frac{2}{3}(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= -2\pi abc\left(-\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}\pi abc
\end{aligned}
$$

3　$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ と $z=c$ より，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\left(\sqrt{c}\right)^2$

極座標 $x=ar\cos\theta$，$y=br\sin\theta$ に変換すると，ヤコビ行列式 J は $J=abr$ となり，

対称性を利用すれば求める体積 V は

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{c}}(c-r^2)\,abr\,dr\,d\theta$$

$$=2ab\pi\int_0^{\sqrt{c}}(cr-r^3)\,dr$$

$$=2ab\pi\left[\frac{cr^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{c}}$$

$$=2ab\pi\left(\frac{c^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)$$

$$=\frac{abc^2}{2}\pi$$

4

⑴ $I(a)=\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy$

$=\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$

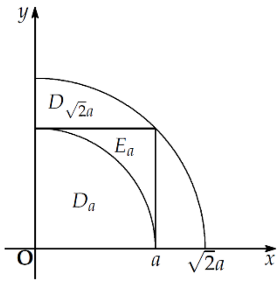
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\cdot\int_0^a e^{-r^2}\,r\,dr$

$=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a$

$=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right)$

⑵ $\lim_{a\to\infty} I(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right)$

⑶



図のように$D_a\subset E_a\subset D_{\sqrt{2}a}$ であり， $e^{-(x^2+y^2)}>0$ であるから

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leqq \iint_{E_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leqq \iint_{D_{\sqrt{2}a}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

したがって

$I(a)\leqq J(a)\leqq I(\sqrt{2}a)$

⑷　⑶から

$$\lim_{a\to\infty} I(a) \leqq \lim_{a\to\infty} J(a) \leqq \lim_{a\to\infty} I(\sqrt{2}\,a)$$

ここで⑵の結果を用いれば

$$\frac{\pi}{4} \leqq \lim_{a\to\infty} J(a) \leqq \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\quad \lim_{a\to\infty} J(a) = \frac{\pi}{4}$$

ここで

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty} J(a) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2\end{aligned}$$

であるから，結局

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$