５章　微分方程式

１節　微分方程式と解（p.156～162）

練習 1

$$\frac{dT}{dt} = k(T_0 - T)$$

練習 2

$$y' = 2y$$

練習 3

⑴　$y' = C$　より，$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2} = Cx + \sqrt{1 + C^2}$

であるから微分方程式を満たす。また，1 個の任意定数を含むので一般解である。

⑵　$y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$　より

$$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2} = x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{-x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{\frac{1 - x^2 + x^2}{1 - x^2}} = \sqrt{1 - x^2}$$

であるから，微分方程式を満たす。しかし，一般解　$y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$　の任意定数 C にどんな値を

代入しても　$y = \sqrt{1 - x^2}$　は得られないのでこれは特異解である。

練習 4

⑴　$y' = Ce^x$　より，$y' = y$ を満たす。また 1 個の任意定数を含むので一般解である。

⑵　$y = Ce^x$　に $x = 0,\ \ y = 1$　を代入すると

$1 = Ce^0$　より　$C = 1$

したがって求める特殊解は　$y = e^x$

練習 5

⑴　$y' = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{C_1}{x}$，$y'' = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{C_1}{x^2}$　より

$$xy'' + y' = x\left(\frac{2}{3}x - \frac{C_1}{x^2}\right) + \frac{1}{3}x^2 + \frac{C_1}{x} = x^2$$

であるから，微分方程式を満たす。また 2 個の任意定数を含むので一般解である。

⑵ $\begin{cases} y = \dfrac{1}{9}x^3 + C_1 \log|x| + C_2 \\ y' = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{C_1}{x} \end{cases}$ に $x = 1 \quad y = 1 \quad y' = 2$ を代入すると

$\begin{cases} 1 = \dfrac{1}{9} + C_2 \\ 2 = \dfrac{1}{3} + C_1 \end{cases}$ より $C_1 = \dfrac{5}{3}$，$C_2 = \dfrac{8}{9}$

したがって求める特殊解は，$y = \dfrac{1}{9}x^3 + \dfrac{5}{3}\log|x| + \dfrac{8}{9}$

練習 6　$y = \dfrac{1}{9}x^3 + C_1 \log|x| + C_2$ に $x = 1,\ y = 0$ と $x = e,\ y = 1$ を代入すると

$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{9} + C_2 \\ 1 = \dfrac{1}{3}e^3 + C_1 + C_2 \end{cases}$ これより $C_1 = \dfrac{10}{9} - \dfrac{1}{9}e^3$，$C_2 = -\dfrac{1}{9}$

したがって求める特殊解は，$y = \dfrac{1}{9}x^3 + \dfrac{10 - e^3}{9}\log|x| - \dfrac{1}{9}$

節末問題（p.163）

1

$x'' = x^2$

2

$\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$

3

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ における接線の方程式は　$Y - y = y'(X - x)$　である。
点 Q の座標は　$X = 0$，$Y - y = y'(0 - x)$，$Y = y - xy'$　より　（0，$y - xy'$）である
したがって，条件から　$y - xy' = -y$　$\therefore$　$xy' - 2y = 0$

4

⑴　$y' = C$　より，$y = xy' + y' - (y')^2 = Cx + C - C^2$　であるから
微分方程式を満たす。また 1 個の任意定数を含むので一般解である。

⑵　$y' = \dfrac{1}{2}(x+1)$ より，
$$\begin{aligned} y &= xy' + y' - (y')^2 \\ &= \frac{x}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x+1) - \left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(x+1)^2 \end{aligned}$$

であるから微分方程式を満たす。しかし，一般解の任意定数 C にどんな値を代入しても
得られないのでこれは特異解である。

(3) $f(x,\ y,\ C) = Cx + C - C^2 - y = 0$ として $f_C = x + 1 - 2C = 0$ より $C = \dfrac{x+1}{2}$

これを $y = Cx + C - C^2$ に代入すると

$$y = \frac{x+1}{2}x + \frac{x+1}{2} - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}(x+1)^2$$

したがって包絡線の方程式は $y = \dfrac{1}{4}(x+1)^2$

5

(1) $y' = kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx$

$y'' = -k^2 C_1 \sin kx - k^2 C_2 \cos kx$
$= -k^2 y$

であるから微分方程式を満たす。また 2 個の任意定数を含むので一般解である。

(2) $\begin{cases} y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \\ y' = kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx \end{cases}$ に $x = 0,\ y = 1,\ y' = 1$ を代入すると

$\begin{cases} 1 = C_2 \\ 1 = kC_1 \end{cases}$ より $C_1 = \dfrac{1}{k},\ C_2 = 1$

したがって求める特殊解は $y = \dfrac{1}{k}\sin kx + \cos kx$

(3) $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$ に

$x = 0,\ y = a$ を代入して $a = C_2$

$x = \dfrac{\pi}{2},\ y = b$ を代入して $b = C_1$

したがって求める特殊解は $y = b \sin kx + a \cos kx$