５章　微分方程式

３節　２階微分方程式（p.178～199）

練習１　C，D は任意定数

⑴　$y'' = \dfrac{1}{x^2}$

$$y' = -\frac{1}{x} + C \qquad y = -\log|\,x\,| + Cx + D$$

⑵　$y'' = x\cos x$

$$y' = \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

$$y = \int (x\sin x + \cos x + C)\,dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx + \sin x + Cx + D$$

$$= -x\cos x + 2\sin x + Cx + D$$

練習２　C，D は任意定数

⑴　$y'' + (\,y'\,)^2 = 0$

$y' = p$　とおくと　$y'' = p'$

$$p' + p^2 = 0$$

$$\int \frac{1}{p^2}\,dp = -\int dx$$

$$-\frac{1}{p} = -x + C$$

$$p = \frac{1}{x + C} \quad （C = -C とおく）$$

$$y' = \frac{1}{x + C}$$

$$\therefore\ y = \log|\,x + C\,| + D$$

⑵　$xy'' - y' + 1 = 0$

$y' = p$　とおくと　$y'' = p'$

$$xp' - p + 1 = 0$$

$$\int \frac{1}{p - 1}\,dp = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\log|\,p - 1\,| = \log|\,x\,| + C$$

$$\log\left|\,\frac{p - 1}{x}\,\right| = C$$

$$\frac{p - 1}{x} = \pm e^C = C$$

$$p = Cx + 1$$

$$y' = Cx + 1$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{2}Cx^2 + x + D$$

$$= Cx^2 + x + D$$

練習 3　C，D は任意定数

⑴　$yy'' + (y')^2 + 1 = 0$

$y' = p$ とおくと $y'' = \dfrac{dp}{dy}p$

$$y \cdot p\frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0$$

$$\int \frac{p}{p^2+1}dp = -\int \frac{1}{y}dy$$

$$\frac{1}{2}\log\left|\,p^2+1\,\right| = -\log\left|\,y\,\right| + C$$

$$\log\left|\,(p^2+1)y^2\,\right| = 2C$$

$$(p^2+1)y^2 = \pm e^{2C} = C$$

$$p^2 + 1 = \frac{C}{y^2} \qquad p^2 = \frac{C}{y^2} - 1 = \frac{C-y^2}{y^2}$$

$\therefore\ p = \pm\sqrt{\dfrac{C-y^2}{y^2}}$　すなわち $\dfrac{dy}{dx} = \pm\dfrac{\sqrt{C-y^2}}{y}$

$$\pm\frac{y}{\sqrt{C-y^2}}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\mp\sqrt{C-y^2} = x + D$$

$\therefore\ (x+D)^2 + y^2 = C$

⑵　$(y+1)y'' + (y')^2 = 0$

$y' = p$ とおくと $y'' = \dfrac{dp}{dy}p$

$$(y+1)\frac{dp}{dy}p + p^2 = 0$$

$$\int \frac{1}{p}dp = -\int \frac{1}{y+1}dy$$

$$\log\left|\,p\,\right| = -\log\left|\,y+1\,\right| + C$$

$$\log\left|\,p(y+1)\,\right| = C$$

$$p(y+1) = \pm e^C = C$$

$$p = \frac{C}{y+1} \qquad y' = \frac{C}{y+1}$$

$$\int (y+1)\,dy = \int C\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + y = Cx + D$$

$\therefore\ y^2 + 2y + Cx + D = 0$

練習 4

⑴　$W(e^x,\ xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^x(e^x + xe^x) - e^x \cdot xe^x = e^{2x} \neq 0$　$\therefore$　1 次独立

⑵　$W(x,\ x^2) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0$　$(x \neq 0)$　$\therefore$　1 次独立

⑶　$W(\log x,\ \log x^2) = \begin{vmatrix} \log x & \log x^2 \\ \dfrac{1}{x} & \dfrac{2}{x} \end{vmatrix} = \dfrac{2\log x}{x} - \dfrac{\log x^2}{x} = 0$　$\therefore$　1 次従属

練習 5

⑴　$y = \sin x$　とすると　$y' = \cos x$，$y'' = -\sin x$　より

$y'' + y = -\sin x + \sin x = 0$　であるから　$y = \sin x$　は微分方程式を満たす。

同様に，$y = \cos x$ とすると

$y' = -\sin x$，$y'' = -\cos x$　より

$y'' + y = -\cos x + \cos x = 0$　であるから　$y = \cos x$ は微分方程式を満たす。

また，$W(\sin x,\ \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$　　∴　1 次独立

⑵　$y = C\sin x + D\cos x$　　（C，D は任意定数）

練習 6

⑴　$y = x^2 - 2$

$y' = 2x$，$y'' = 2$　より

$y'' + y = 2 + x^2 - 2 = x^2$　と微分方程式を満たすので解である。

⑵　$y = C\sin x + D\cos x + x^2 - 2$　　（C，D は任意定数）

練習 7　C，D は任意定数

⑴　特性方程式

$3\lambda^2 + 10\lambda + 8 = 0$

$(\lambda + 2)(3\lambda + 4) = 0$

∴　$\lambda = -2,\ -\dfrac{4}{3}$

∴　$y = Ce^{-2x} + De^{-\frac{4}{3}x}$

⑵　特性方程式

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda - 3)^2 = 0$

∴　$\lambda = 3$

∴　$y = (C + Dx)e^{3x}$

⑶　特性方程式

$\lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$

$\lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{36\text{-}28}}{2} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$

∴　$y = Ce^{(3+\sqrt{2})x} + De^{(3-\sqrt{2})x}$

⑷　特性方程式

$2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{4}$

∴　$y = e^{-\frac{1}{4}x}\left(C\cos\dfrac{\sqrt{7}}{2}x + D\sin\dfrac{\sqrt{7}}{2}x \right)$

練習 8

⑴　特性方程式

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-3)=0 \quad \therefore \lambda=2,\ 3$$

$$\therefore\ y=Ce^{2x}+De^{3x}$$

$$y'=2Ce^{2x}+3De^{3x}$$

$x=0$ のとき　$y=0,\ y'=1$ を代入すると

$$\begin{cases} 0=C+D \\ 1=2C+3D \end{cases}$$ より $C=-1,\ D=1$

$$\therefore\ y=-e^{2x}+e^{3x}$$

⑵　特性方程式

$$\lambda^2+2\sqrt{2}\lambda+2=0$$

$$\lambda=\frac{-2\sqrt{2}\pm\sqrt{8-8}}{2}=-\sqrt{2}$$

$$\therefore\ y=(C+Dx)e^{-\sqrt{2}x}$$

$$y'=De^{-\sqrt{2}x}+(C+Dx)\cdot\left(-\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}x}$$

$x=1$ のとき　$y=0,\ y'=1$ を代入すると

$$\begin{cases} 0=(C+D)e^{-\sqrt{2}} \\ 1=De^{-\sqrt{2}}-\sqrt{2}(C+D)e^{-\sqrt{2}} \end{cases}$$ より $D=e^{\sqrt{2}},\ C=-e^{\sqrt{2}}$

$$\therefore\ y=\left(-e^{\sqrt{2}}+e^{\sqrt{2}}x\right)e^{-\sqrt{2}x}=(x-1)e^{\sqrt{2}(1-x)}$$

⑶　特性方程式

$$\lambda^2-3\lambda+5=0$$

$$\lambda=\frac{3\pm\sqrt{9-20}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$$

$$\therefore\ y=e^{\frac{3}{2}x}\left(C\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x+D\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)$$

$$y'=\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}\left(C\cos\frac{\sqrt{11}}{3}x+D\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)+e^{\frac{3}{2}x}\left(-\frac{\sqrt{11}}{2}C\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x+\frac{\sqrt{11}}{2}D\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)$$

$x=0$ のとき　$y=1,\ y'=0$ を代入すると

$$\begin{cases} 1=C \\ 0=\frac{3}{2}C+\frac{\sqrt{11}}{2}D \end{cases}$$ より $C=1,\ D=-\frac{3}{\sqrt{11}}$

$$\therefore\ y=e^{\frac{3}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x-\frac{3}{\sqrt{11}}\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)$$

練習 9　C, D は任意定数

⑴　$y'' + y' - 2y = 3x$

同次の特性方程式　$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0 \quad \lambda = -2, 1$

$\therefore\ y = Ce^{-2x} + De^{x}$

1 つの解を　$y = Ax + B$ と予想　$y' = A,\ y'' = 0$

$A - 2(Ax + B) = 3x$

$-2Ax + A - 2B = 3x$

$$\therefore \begin{cases} -2A = 3 \\ A - 2B = 0 \end{cases} \text{ より } A = -\frac{3}{2},\ B = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$$

したがって一般解は，$y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{4} + Ce^{-2x} + De^{x}$

⑵　$3y'' - y' + y = x^2 + x$

同次の特性方程式　$3\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{11}}{6}i$$

$$\therefore\ y = e^{\frac{1}{6}x}\left(C\cos\frac{\sqrt{11}}{6}x + D\sin\frac{\sqrt{11}}{6}x\right)$$

1 つの解を　$y = Ax^2 + Bx + C$ と予想　$y' = 2Ax + B,\ y'' = 2A$

$6A - 2Ax - B + Ax^2 + Bx + C = x^2 + x$

$Ax^2 + (-2A + B)x + 6A - B + C = x^2 + x$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 1 \\ 6A - B + C = 0 \end{cases} \text{ より } A = 1,\ B = 3,\ C = -3$$

$$\therefore\ y = x^2 + 3x - 3$$

したがって一般解は，$y = x^2 + 3x - 3 + e^{\frac{1}{6}x}\left(C\cos\dfrac{\sqrt{11}}{6}x + D\sin\dfrac{\sqrt{11}}{6}x\right)$

練習 10　C，D は任意定数

⑴　$y'' - 5y' + 6y = e^x$

同次の特性方程式　$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$　$\therefore$　$\lambda = 2$，3

$\therefore$　$y = Ce^{2x} + De^{3x}$

1 つの解を　$y = Ae^x$ と予想　　$y' = Ae^x$，$y'' = Ae^x$

$Ae^x - 5Ae^x + 6Ae^x = e^x$

$2Ae^x = e^x$　より　$A = \frac{1}{2}$　　$\therefore$　$y = \frac{1}{2}e^x$

したがって一般解は，　$y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{2x} + De^{3x}$

⑵　$y = (Cx + D)e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$

練習 11　C，D は任意定数

⑴　練習 10 より

同次の一般解は　$y = Ce^{2x} + De^{3x}$

一つの解を　$y = Axe^{2x}$ と予想

$y' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$

$y'' = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$

$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 5Ae^{2x} - 10Axe^{2x} + 6Axe^{2x} = e^{2x}$

$-Ae^{2x} = e^{2x}$　$\therefore$　$A = -1$

$y = -xe^{2x}$

したがって一般解は，　$y = -xe^{2x} + Ce^{2x} + De^{3x}$

⑵　$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

同次の特性方程式　$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda - 3)^2 = 0$　$\lambda = 3$

$\therefore$　$y = (C + Dx)e^{3x}$

1 つの解を　$y = Ax^2e^{3x}$ と予想

$y' = 2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x}$

$y'' = 2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x}$

$2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x} - 12Axe^{3x} - 18Ax^2e^{3x} + 9Ax^2e^{3x} = e^{3x}$

$2Ae^{3x} = e^{3x}$　　$\therefore$　$A = \frac{1}{2}$，　$y = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$

したがって一般解は，　$y = \frac{1}{2}x^2e^{3x} + (C + Dx)e^{3x}$

練習 12　C，D は任意定数

⑴　$y'' - 3y' + y = \cos x$

同次の特性方程式　$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\ y = Ce^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} + De^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}$$

1 つの解を　$y = A\cos x + B\sin x$ と予想

$$y' = -A\sin x + B\cos x$$

$$y'' = -A\cos x - B\sin x$$

$$-A\cos x - B\sin x + 3A\sin x - 3B\cos x + A\cos x + B\sin x = \cos x$$

$\begin{cases} 3A = 0 \\ -3B = 1 \end{cases}$　より　$A = 0$，$B = -\dfrac{1}{3}$

$$\therefore\quad y = -\frac{1}{3}\sin x$$

したがって一般解は，　$y = -\dfrac{1}{3}\sin x + Ce^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} + De^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}$

⑵　$y = Ce^{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}x} + De^{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}x} - 2\cos x$

練習 13　C，D は任意定数

⑴　$y'' + 9y = 2\sin 3x$

同次の特性方程式　$\lambda^2 + 9 = 0$

$\lambda = \pm 3i$　　$\therefore\ y = C\cos 3x + D\sin 3x$

1 つの解を　$y = x(A\cos 3x + B\sin 3x)$ と予想

$$y' = A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x)$$

$$y'' = -6A\sin 3x + 6B\cos 3x + x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x)$$

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x + x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x)$$
$$+ 9x(A\cos 3x + B\sin 3x) = 2\sin 3x$$

$\begin{cases} -6A = 2 \\ 6B = 0 \end{cases}$　より　$A = -\dfrac{1}{3}$，$B = 0$

$$\therefore\quad y = -\frac{1}{3}x\cos 3x$$

したがって一般解は，　$y = -\dfrac{1}{3}x\cos 3x + C\cos 3x + D\sin 3x$

⑵ $y' = -\frac{1}{3}\cos 3x + x\sin 3x - 3C\sin 3x + 3D\cos 3x$

$x = 0,\ \ y = 1,\ \ y' = 1$ を代入して

$$\begin{cases} 1 = C \\ 1 = -\frac{1}{3} + 3D \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{array}{l} C = 1 \\ D = \frac{4}{9} \end{array}$$

したがって $y = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \cos 3x + \frac{4}{9}\sin 3x$

⑶ $x = \frac{\pi}{6},\ \ y = 1$ と $x = \frac{\pi}{3},\ \ y = 0$ を代入して

$$\begin{cases} 1 = D \\ 0 = -\frac{\pi}{9} + C \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{array}{l} C = \frac{\pi}{9} \\ D = 1 \end{array}$$

したがって $y = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{\pi}{9}\cos 3x + \sin 3x$

練習 14

⑴ $y = x(A\cos x + B\sin x) + C\cos x + D\sin x$

$y' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x) - C\sin x + D\cos x$

$y'' = -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x) - C\cos x - D\sin x$

$-2A\sin x + 2B\cos x + Ax\cos x - Bx\sin x - C\cos x - D\sin x$

$\quad - 2A\cos x - 2B\sin x + 2Ax\sin x - 2Bx\cos x + 2C\sin x - 2D\cos x$

$\quad + Ax\cos x + Bx\sin x + C\cos x + D\sin x = x\sin x$

$(-2A - 2B + 2C)\sin x + (2B - 2A - 2D)\cos x + 2Ax\sin x - 2Bx\cos x = x\sin x$

$$\begin{cases} -A - B + C = 0 \\ B - A - D = 0 \\ 2A = 1 \\ -2B = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{array}{l} A = \frac{1}{2},\quad B = 0, \\ C = \frac{1}{2},\quad D = -\frac{1}{2} \end{array}$$

したがって $y = \frac{1}{2}(x\cos x + \cos x - \sin x)$

⑵ $y'' - 2y' + y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda = 1 \ \therefore\ y = (C + Dx)e^x$

したがって $y = \frac{1}{2}(x\cos x + \cos x - \sin x) + (C + Dx)e^x$

練習 15　C，D は任意定数

⑴　$y = Ax + B$　より　$y' = A$，$y'' = 0$

微分方程式に代入して　$4(Ax + B) = x$

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad A = \frac{1}{4},\ B = 0$$

したがって一つの解は　$y = \dfrac{x}{4}$

⑵　$y'' + 4y = x$

同次の特性方程式　$\lambda^2 + 4 = 0$　より　$\lambda = \pm 2i$

$\therefore\ y = C\cos 2x + D\sin 2x$

$y_1 = \cos 2x$，$y_2 = \sin 2x$　とすると

$$W(y_1,\ y_2) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$$

$\therefore$　1 つの解は

$$\begin{aligned} y &= -\cos 2x \int \frac{\sin 2x}{2} \cdot x\,dx + \sin 2x \int \frac{\cos 2x \cdot x}{2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\cos 2x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x \cdot x + \int \frac{1}{2}\cos 2x\,dx\right) + \frac{1}{2}\sin 2x\left(\frac{1}{2}\sin 2x \cdot x - \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx\right) \\ &= \frac{x}{4}\cos^2 2x - \frac{1}{8}\cos 2x \sin 2x + \frac{x}{4}\sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin 2x \cos 2x \\ &= \frac{x}{4} \end{aligned}$$

練習 16　C，D は任意定数

⑴　$y'' - y' - 6y = e^{3x}$

同次の特性方程式　$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda = 3,\ -2 \quad \therefore\ y = Ce^{3x} + De^{-2x}$$

$$W(e^{3x},\ e^{-2x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-2x} \\ 3e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{x} - 3e^{x} = -5e^{x}$$

∴　1 つの解は

$$y = -e^{3x}\int \frac{e^{-2x}\cdot e^{3x}}{-5e^{x}}\,dx + e^{-2x}\int \frac{e^{3x}\cdot e^{3x}}{-5e^{x}}\,dx$$

$$= \frac{e^{3x}}{5}\int dx - \frac{e^{-2x}}{5}\int e^{5x}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}xe^{3x} - \frac{1}{25}e^{3x}$$

したがって一般解は　$y = \frac{1}{5}xe^{3x} - \frac{1}{25}e^{3x} + Ce^{3x} + De^{-2x}$

$$= \frac{1}{5}xe^{3x} + Ce^{3x} + De^{-2x}$$

⑵　$y'' - 2y' + y = e^{x}\log x$

同次の特性方程式　$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \therefore\ y = (C + Dx)e^{x}$$

$$W(e^{x},\ xe^{x}) = \begin{vmatrix} e^{x} & xe^{x} \\ e^{x} & e^{x} + xe^{x} \end{vmatrix} = e^{x}(e^{x} + xe^{x}) - e^{x}\cdot xe^{x} = e^{2x}$$

∴　1 つの解は

$$y = -e^{x}\int \frac{xe^{x}\cdot e^{x}\cdot\log x}{e^{2x}}\,dx + x\cdot e^{x}\int \frac{e^{x}\cdot e^{x}\log x}{e^{2x}}\,dx$$

$$= -e^{x}\int x\log x\,dx + xe^{x}\int \log x\,dx$$

$$= -e^{x}\left(\frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) + xe^{x}\left(x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$= -e^{x}\left(\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2\right) + x\cdot e^{x}(x\log x - x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{x}\log x - \frac{3}{4}x^2e^{x}$$

したがって一般解は　$y = \frac{1}{2}x^2e^{x}\log x - \frac{3}{4}x^2e^{x} + (C + Dx)e^{x}$

(3)　$y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$

同次の特性方程式　　$\lambda^2 + 1 = 0$　　$\lambda = \pm i$

$$\therefore \ y = C\cos x + D\sin x$$

$$W(\cos x,\ \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

∴　1つの解は

$$y = -\cos x \int \frac{\dfrac{1}{\cos^3 x}\cdot \sin x}{1}\,dx + \sin x \int \frac{\dfrac{1}{\cos^3 x}\cdot \cos x}{1}\,dx$$

$$= -\cos x \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx + \sin x \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = -\cos x \cdot \left(\frac{1}{2}\cos^{-2} x\right) + \sin x \cdot \tan x$$

$$= -\frac{1}{2\cos x} + \sin x \cdot \tan x$$

$$= -\frac{1}{2\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{-1 + 2\sin^2 x}{2\cos x} = \frac{1}{2\cos x} - \cos x$$

したがって一般解は

$$y = \frac{1}{2\cos x} - \cos x + C\cos x + D\sin x$$

$$= \frac{1}{2\cos x} + C\cos x + D\sin x$$

練習 17　C，D は任意定数

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \cos 2t & \cdots① \\ \dfrac{dy}{dt} = x - \sin 2t & \cdots② \end{cases}$$

①を t で微分　$\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt} - 2\sin 2t$

②を代入して　$\dfrac{d^2x}{dt^2} = x - \sin 2t - 2\sin 2t$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} - x = -3\sin 2t \quad \cdots③$$

③の同次の特性方程式　$\lambda^2 - 1 = 0$　$\therefore$ $\lambda = 1$

$\therefore$ $x = C\cos t + D\sin t$

③の 1 つの解を　$x = A\cos 2t + B\sin 2t$　と予想

$$\frac{dx}{dt} = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$$

$$-4A\cos 2t - 4B\sin 2t - A\cos 2t - B\sin 2t = -3\sin 2t$$

$$-5A\cos 2t - 5B\sin 2t = -3\sin 2t$$

$\begin{cases} -5A = 0 \\ -5B = -3 \end{cases}$　より　$A = 0$，$B = \dfrac{3}{5}$

$\therefore$　③の一般解は　$x = \dfrac{3}{5}\sin 2t + Ce^{t} + Ce^{-t}$

①より　$y = \dfrac{dx}{dt} - \cos 2t$

$= \dfrac{6}{5}\cos 2t - \cos 2t + Ce^{t} - De^{-t}$

$= \dfrac{1}{5}\cos 2t + Ce^{t} - De^{-t}$

練習 18　C，D は任意定数

⑴　$x^2y'' + xy' - 4y = 0$

$y = x^\lambda$　の形の解があると予想

$y' = \lambda x^{\lambda-1}$，$y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$x^2 \cdot \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + x \cdot \lambda x^{\lambda-1} - 4x^\lambda = 0$

$\lambda^2 - \lambda + \lambda - 4 = 0$

$\lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda = \pm 2$

$\therefore$　$y = x^2$，$y = x^{-2}$　は解

これらは 1 次独立であるので　$y = Cx^2 + Dx^{-2}$

⑵　$x^2y'' - xy' + y = 0$

$y = x^\lambda$　の形の解があると予想

$y' = \lambda x^{\lambda-1}$，$y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$\lambda(\lambda-1)x^\lambda - \lambda x^\lambda + x^\lambda = 0$

$\lambda^2 - \lambda - \lambda + 1 = 0$

$(\lambda-1)^2 = 0$　$\therefore \lambda = 1$

$\therefore$　$y = x$　は解であり，$y = Cx$　も解である。

この C を x の関数 u として　$y = ux$　とおく。

$y' = u'x + u$

$y'' = u''x + 2u'$

$x^2(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = 0$

$u''x^3 + 2x^2u' - u'x^2 - ux + ux = 0$

$x^3u'' + x^2u' = 0$

$xu'' + u' = 0$

$(xu')' = 0$

$\therefore$　$u'x = C$　$u' = \dfrac{C}{x}$　$\therefore$　$u = C\log|x| + D$

よって一般解は，$y = (C\log|x| + D)x$

練習 19　C，D は任意定数

⑴　$xy'' - (3x+1)y' + (2x+1)y = 0$

$y = e^x \quad y' = y'' = e^x$

$xe^x - (3x+1)e^x + (2x+1)e^x = 0$

$\therefore\ y = e^x$　は微分方程式の 1 つの解である。

⑵　u と x の関数とし，$y = ue^x$　とおく

$y' = u'e^x + ue^x$，$y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$

$x(u''e^x + 2u'e^x + ue^x) - (3x+1)(u'e^x + ue^x) + (2x+1)ue^x = 0$　より

$xu'' - (x+1)u' = 0$

$u' = p$　とおくと

$$xp' - (x+1)p = 0$$

$$\int \frac{1}{p}\,dp = \int \frac{x+1}{x}\,dx$$

$$\log|\,p\,| = x + \log|\,x\,| + C$$

$$\therefore\ p = Cxe^x \quad (\pm e^C = C)$$

$$u' = Cxe^x$$

$$u = C\int xe^x\,dx = C(x-1)e^x + D$$

したがって，一般解は

$$y = (C(x-1)e^x + D)e^x$$

$$= C(x-1)e^{2x} + De^x$$

節末問題（p.200）

1　C，D は任意定数

⑴　$y'' \cos^2 x = 1$

$$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y' = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$y = -\log\left| \cos x \right| + Cx + D$$

⑵　$y^2 y'' = (y')^3$

$y' = p$　とおくと，$y'' = \dfrac{dp}{dy} p$

$$y^2 \frac{dp}{dy} p = p^3$$

$$\int \frac{1}{p^2} dp = \int \frac{1}{y^2} dy$$

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{y} + C = \frac{Cy - 1}{y}$$

$$p = \frac{y}{1 - Cy} \qquad y' = \frac{y}{1 - Cy}$$

$$\int \frac{1 - Cy}{y} dy = \int dx$$

$$\log\left| y \right| - Cy = x + D$$

$$\log\left| y \right| = x + Cy + D$$

$$\therefore \quad y = \pm e^{x + Cy + D} = Ce^{x + Dy}$$

⑶　$y'' + (y')^2 + 1 = 0$

$y' = p$　とおくと，$y'' = p'$

$$p' + p^2 + 1 = 0$$

$$\int \frac{1}{p^2 + 1} dp = -\int dx$$

$$\mathrm{Tan}^{-1} p = -x + C$$

$$p = \tan(-x + C)$$

$$y = \int \tan(-x + C)\, dx$$

$$= \log\left| \cos(-x + C) \right| + D$$

2　C, D は任意定数

(1)　$y'' - 2y' + 4 = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0 \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\therefore \quad y = e^x(C\cos\sqrt{3}x + D\sin\sqrt{3}x)$$

(2)　$y'' - 8y' + 16 = 0$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \quad \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4$$

$$\therefore \quad y = (C + Dx)e^{4x}$$

(3)　$y'' + 3y' + 2y = x^3$

同次の特性方程式　$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$$(\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \quad \lambda = -1,\ -2$$

$$\therefore \quad y = Ce^{-x} + De^{-2x}$$

1 つの解を　$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ と予想

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y'' = 6Ax + 2B$$

$$6Ax + 2B + 9Ax^2 + 6Bx + 3C + 2Ax^3 + 2Bx^2 + 2Cx + 2D = x^3$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 9A + 2B = 0 \\ 6A + 6B + 2C = 0 \\ 2B + 3C + 2D = 0 \end{cases} \text{より} \quad A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{9}{4},\ C = \frac{21}{4},\ D = -\frac{45}{8}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{21}{4}x - \frac{45}{8}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{21}{4}x - \frac{45}{8} + Ce^{-x} + De^{-2x}$$

(4)　$y'' - 5y' + 6y = e^{-x}$

同次の一般解は，$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$$(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \quad \lambda = 2,\ 3$$

$$\therefore \ y = Ce^{2x} + De^{3x}$$

1 つの解を　$y = Ae^{-x}$ と予想

$$y' = -Ae^{-x},\ y'' = Ae^{-x}$$

$$Ae^{-x} + 5Ae^{-x} + 6Ae^{-x} = e^{-x}$$

$$12A = 1 \quad A = \frac{1}{12} \quad \therefore \ y = \frac{1}{12}e^{-x}$$

よって一般解は，$y = \frac{1}{12}e^{-x} + Ce^{2x} + De^{3x}$

⑸ $2y'' - 3y' + y = \cos 2x + 2\sin x$

同次の一般解は　$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = 1,\ \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ y = Ce^x + De^{\frac{1}{2}x}$$

1つの解を　$y = A\cos 2x + B\sin 2x + C\cos x + D\sin x$ と予想

$$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - C\sin x + D\cos x$$

$$y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x - C\cos x - D\sin x$$

$$\begin{aligned} &-8A\cos 2x - 8B\sin 2x - 2C\cos x - 2D\sin x \\ &\quad + 6A\sin 2x - 6B\cos 2x + 3C\sin x - 3D\cos x \\ &\quad + A\cos 2x + B\sin 2x + C\cos x + D\sin x \\ &= \cos 2x + 2\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -8A - 6B + A = 1 \\ -8B + 6A + B = 0 \\ -2C - 3D + C = 0 \\ -2D + 3C + D = 2 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{aligned} A &= -\frac{7}{85} \\ B &= -\frac{6}{85} \\ C &= \frac{3}{5} \\ D &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore\ y = -\frac{7}{85}\cos 2x - \frac{6}{85}\sin 2x + \frac{3}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$$

よって一般解は，$y = -\frac{7}{85}\cos 2x - \frac{6}{85}\sin 2x + \frac{3}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x + Ce^x + De^{\frac{1}{2}x}$

⑹ $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$

同次の一般解は $\lambda^2 + 1 = 0$　　$\lambda = \pm i$

$$\therefore\ y = C\cos x + D\sin x$$

$W(\cos x,\ \sin x) = 1$

$\therefore$　1つの解は

$$\begin{aligned} y &= -\cos x \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}\,dx + \sin x \int \frac{\cos x}{\cos x}\,dx \\ &= \cos x \cdot \log|\cos x| + x\sin x \end{aligned}$$

よって　一般解は

$$y = \cos x \cdot \log|\cos x| + x\sin x + C\cos x + D\sin x$$

3　C, D は任意定数

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + t \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - t^2 \end{cases} \qquad y = -\frac{dx}{dt} + x + t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 1 = \frac{dx}{dt} - x - 2y + t^2 + 1$$

$$= \frac{dx}{dt} - x - 2\left(-\frac{dx}{dt} + x + t\right) + t^2 + 1$$

$$= 3\frac{dx}{dt} - 3x - 2t + t^2 + 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 3x = t^2 - 2t + 1$$

同次の一般解　$\lambda^2 - 3\lambda + 3 = 0$　$\lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$$\therefore\ x = e^{\frac{3}{2}t}\left(C\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + D\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

1 つの解を　$x = At^2 + Bt + C$　と予想

$$\frac{dx}{dt} = 2At + B$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2A$$

$$2A - 6At - 3B + 3At^2 + 3Bt + 3C = t^2 - 2t + 1$$

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ -6A + 3B = -2 \\ 2A - 3B + 3C = 1 \end{cases} \quad \text{より} \quad A = \frac{1}{3},\ B = 0,\ C = \frac{1}{9}$$

したがって　$x = \dfrac{1}{3}t^2 + \dfrac{1}{9} + e^{\frac{3}{2}t}\left(C\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + D\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

$$y = -\frac{dx}{dt} + x + t$$

$$= -\frac{2}{3}t - \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}t}\left(C\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + D\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - e^{\frac{3}{2}t}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}C\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}D\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$+ \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{9} + e^{\frac{3}{2}t}\left(C\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + D\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + t$$

$$= \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9} - \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}t}\left\{\left(C + \sqrt{3}D\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \left(\sqrt{3}C - D\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right\}$$

4　$y'' - 6y' + 5y = xe^x$

⑴　$y = (ax^2 + bx)e^x$

$y' = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x$

$y'' = 2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x$

$2ae^x + 4axe^x + 2be^x + ax^2e^x + bxe^x - 12axe^x - 6be^x - 6ax^2e^x - 6bxe^x$

$+ 5ax^2e^x + 5bxe^x = xe^x$

$\begin{cases} 4a + b - 12a - 6b + 5b = 1 \\ 2a + 2b - 6b = 0 \end{cases}$ より $a = -\dfrac{1}{8}$, $b = -\dfrac{1}{16}$

$$\therefore\ y = -\frac{1}{8}\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)e^x$$

$$= -\frac{1}{16}(2x^2 + x)e^x$$

⑵　同時の特性方程式

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$　$\lambda = 1,\ 5$

$\therefore\ y = Ce^x + De^{5x}$

したがって　$y = -\dfrac{1}{16}(2x^2 + x)e^x + Ce^x + De^{5x}$　　C，D は任意定数

5　C，D は任意定数

$$(x^2+3x+4)y''+(x^2+x+1)y'-(2x+3)y=0$$

⑴　$y=e^{-x}$　$y'=-e^{-x}$　$y''=e^{-x}$　より

$$(x^2+3x+4)e^{-x}+(x^2+x+1)(-e^{-x})-(2x+3)e^{-x}=0$$

$\therefore\ y=e^{-x}$　は1つの解

⑵　u を x の関数として，$y=ue^{-x}$　とおく

$$y'=u'e^{-x}-ue^{-x},\quad y''=u''e^{-x}-2u'e^{-x}+ue^{-x}$$

$$(x^2+3x+4)(u''e^{-x}-2u'e^{-x}+ue^{-x})+(x^2+x+1)(u'e^{-x}-ue^{-x})-(2x+3)ue^{-x}=0$$

$$x^2u''-2x^2u'+x^2u+3xu''-6xu'+3xu+4u''-8u'+4u$$
$$+x^2u'-x^2u+xu'-xu+u'-u-2xu-3u=0$$

$$(x^2+3x+4)u''+(-x^2-5x-7)u'=0$$

$u'=p$　とおくと

$$\int\frac{1}{p}dp=\int\frac{x^2+5x+7}{x^2+3x+4}dx$$
$$=\int\left(1+\frac{2x+3}{x^2+3x+4}\right)dx$$

$$\log|\ p\ |=x+\log|\ x^2+3x+4\ |+C$$
$$p=Ce^x(x^2+3x+4)$$

$$u=C\int e^x(x^2+3x+4)\,dx$$
$$=C\left(e^x(x^2+3x+4)-\int e^x(2x+3)\,dx\right)+D$$
$$=C\left(e^x(x^2+3x+4)-(e^x(2x+3)-2e^x)\right)+D$$
$$=Ce^x(x^2+x+3)+D$$

したがって一般解は　$y=C(x^2+x+3)+De^{-x}$

6　$L\dfrac{d^2I}{dt^2} + R\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{I}{C} = 0$

特性方程式　$L\lambda^2 + R\lambda + \dfrac{1}{C} = 0$

$$\lambda = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \dfrac{4L}{C}}}{2L}$$

したがって

$R^2 > \dfrac{4L}{C}$ のとき $I = De^{\frac{-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}t} + Ee^{\frac{-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}t}$

$R^2 = \dfrac{4L}{C}$ のとき $I = (C + Ex)e^{\frac{-R}{2L}t}$

$R^2 < \dfrac{4L}{C}$ のとき $I = e^{\frac{-R}{2L}t}\left(D\cos\dfrac{\sqrt{-R^2+\dfrac{4L}{C}}}{2L}t + E\sin\dfrac{\sqrt{-R^2+\dfrac{4L}{C}}}{2L}t\right)$

（D，E は任意定数）

演習

⑴ $x^2y'' + 3xy' + y = x^2$

$x = e^t$ とおくと $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = e^{2t}$

同次方程式の特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$ より $\lambda = -1$

したがって，同次方程式の一般解は $y = (C + Dt)e^{-t}$ （C，D は任意定数）

1 つの解を $y = Ae^{2t}$ と予想して微分方程式に代入すると

$4Ae^{2t} + 4Ae^{2t} + Ae^{2t} = e^{2t}$ より $A = \dfrac{1}{9}$

ゆえに，一般解は $y = \dfrac{1}{9}e^{2t} + (C + Dt)e^{-t}$

$x = e^t$ を代入すれば，求める一般解は

$$y = \frac{1}{9}x^2 + (C + D\log x)x^{-1}$$

⑵ $x^2y - 4xy' + 5y = x^2 + 2x + 2$

$x = e^t$ とおくと $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 5y = e^{2t} + 2e^t + 2$

同次の特性方程式

$$\lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad y = Ce^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}t} + De^{\frac{5-\sqrt{5}}{2}t}$$

（C，D は任意定数）

1 つの解を $y = Ae^{2t} + Be^t + C$ とおくと

$y' = 2Ae^{2t} + Be^t$

$y'' = 4Ae^{2t} + Be^t$

$$4Ae^{2t} + Be^t - 10Ae^{2t} - 5Be^t + 5Ae^{2t} + 5Be^t + 5C = e^{2t} + 2e^t + 2$$

$$\begin{cases} -A = 1 \\ B = 2 \\ 5C = 2 \end{cases} \quad \text{より} \quad A = -1,\ B = 2,\ C = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \quad y = -e^{2t} + 2e^t + \frac{2}{5}$$

したがって一般解は

$$y = -e^{2t} + 2e^t + \frac{2}{5} + Ce^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}t} + De^{\frac{5-\sqrt{5}}{2}t}$$

$x = e^t$ （$t = \log x$） を代入すれば

$$y = -x^2 + 2x + \frac{2}{5} + Cx^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + Dx^{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$ （C，D は任意定数）