

1章 数列 解答

1-1 数列とその和

A 問題

1

(1) $a_1 = 7, a_2 = 2, a_3 = -3, a_4 = -8, a_5 = -13$

(2) $a_1 = 1, a_2 = \frac{4}{3}, a_3 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{8}{5}, a_5 = \frac{5}{3}$

(3) $a_1 = 1, a_2 = -2, a_3 = 4, a_4 = -8, a_5 = 16$

2

(1) 偶数の数列だから $a_n = 2n$

(2) 分母は 3 の倍数で、分子は奇数だから $a_n = \frac{2n-1}{3n}$

3

(1) $a_n = 2 + (n-1) \cdot 6 = 6n - 4$
 $a_{10} = 6 \cdot 10 - 4 = 56$

(2) $a_n = -3 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 5$
 $a_{10} = 2 \cdot 10 - 5 = 15$

(3) 初項が3, 公差が $7-3=4$ だから
 $a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$
 $a_{10} = 4 \cdot 10 - 1 = 39$

(4) 初項が14, 公差が $9-14=-5$ だから
 $a_n = 14 + (n-1) \cdot (-5) = -5n + 19$
 $a_{10} = -5 \cdot 10 + 19 = -31$

4

初項を a , 公差を d とすると

(1) $a_5 = a + 4d = 13 \quad \dots \textcircled{1}$
 $a_{10} = a + 9d = 28 \quad \dots \textcircled{2}$

①, ②を解いて 初項=1, 公差=3

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$$

(2) $a_6 = a + 5d = 65 \quad \dots \textcircled{1}$

$$a_{30} = a + 29d = -103 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②を解いて 初項=100, 公差=-7

$$a_n = 100 + (n-1) \cdot (-7) = -7n + 107$$

5

$$(1) \frac{40(2+60)}{2} = 1240$$

$$(2) \frac{28(-1+23)}{2} = 308$$

$$(3) \frac{26\{2 \cdot 4 + (26-1) \cdot 3\}}{2} = 1079$$

$$(4) \frac{33\left\{2 \cdot 6 + (33-1) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)\right\}}{2} = -1188$$

6

$$(1) a_n = 5 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 1,$$

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 4\}}{2} = 2n^2 + 3n$$

$$(2) a_n = -1 + (n-1) \cdot 10 = 10n - 11,$$

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot (-1) + (n-1) \cdot 10\}}{2} = 5n^2 - 6n$$

(3) 初項が 3, 公差が -2 だから

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 5$$

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot 3 + (n-1) \cdot (-2)\}}{2}$$

$$= \frac{n(-2n+8)}{2} = -n(n-4)$$

(4) 初項が $\frac{1}{2}$, 公差が $\frac{3}{4}$ だから

$$a_n = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}n - \frac{1}{4}$$

$$S_n = \frac{n\left\{2 \cdot \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{3}{4}\right\}}{2}$$

$$= \frac{n\left(1 + \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}\right)}{2} = \frac{n(3n+1)}{8}$$

7

(1) $a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 1$ だから

$$3n - 1 = 296 \text{ より } n = 99$$

よって、第 99 項

その項までの和は

$$S_{99} = \frac{99}{2} \{ 2 \cdot 2 + (99-1) \cdot 3 \} = \frac{99}{2} \cdot 298 = 14751$$

(2) $\frac{n(5-55)}{2} = -525$

$$-50n = -1050 \text{ より } n = 21$$

よって、項数は 21 個

$$a_{21} = 5 + 20d = -55 \quad \therefore d = -3$$

よって、公差は -3

(3) $a_n = 1000 + (n-1) \cdot (-15) = -15n + 1015$

$$-15n + 1015 < 0 \text{ を解いて } n > 67.6 \dots\dots$$

よって、初めて負になるのは第 68 項目から。

負になる前の項までの和を求めればよいから

$$\frac{67}{2} \{ 2 \cdot 1000 + (67-1) \cdot (-15) \} = \frac{67}{2} (2000 - 990) = 33835$$

よって、最大値は 33835

8 等差数列をなす 3 つの数を a, b, c とおく。

(1)
$$\begin{cases} a+b+c=15 & \dots\dots① \\ abc=80 & \dots\dots② \\ 2b=a+c & \dots\dots③ \end{cases}$$

①, ③より

$$3b = 15 \quad \therefore b = 5$$

$$a+c=10, \text{ ②から } ac=16$$

解と係数の関係から

a, c は $t^2 - 10t + 16 = 0$ の解である。

$$\therefore (t-2)(t-8) = 0 \text{ より } t = 2, 8$$

よって、求める 3 つの数は 2, 5, 8

$$(2) \begin{cases} a+b+c=12 & \dots\dots① \\ a^2+b^2+c^2=120 & \dots\dots② \\ 2b=a+c & \dots\dots③ \end{cases}$$

①, ③より

$$3b=12 \quad \therefore b=4$$

②に代入して

$$a^2+c^2=104 \quad \dots\dots④$$

$$a+c=8 \quad \dots\dots⑤$$

$$a^2+(8-a)^2=104$$

$$2a^2-16a-40=0$$

$$a^2-8a-20=0$$

$$(a+2)(a-10)=0$$

$$\therefore a=-2, 10$$

$$a=-2 \text{ のとき } c=10$$

$$a=10 \text{ のとき } c=-2$$

よって, 3つの数は-2, 4, 10

別解

3数を $a-d, a, a+d$ とおくと

$$(1) \begin{cases} (a-d)+a+(a+d)=15 & \dots\dots① \\ (a-d)a+(a+d)=80 & \dots\dots② \end{cases}$$

$$\text{①, ②を解いて } a=5, d=\pm 3$$

よって, 3つの数は 2, 5, 8

$$(2) \begin{cases} (a-d)+a+(a+d)=12 & \dots\dots① \\ (a-d)^2+a^2+(a+d)^2=120 & \dots\dots② \end{cases}$$

$$\text{①, ②を解いて } a=4, d=\pm 6$$

よって, 3つの数は-2, 4, 10

9

$$(1) a_n = 2 \cdot 3^{n-1}, a_6 = 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$$

$$(2) a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}, a_6 = 3 \cdot (-2)^5 = 3 \cdot (-32) = -96$$

(3) 初項が 10, 公比が $20 \div 10 = 2$ だから

$$a_n = 10 \cdot 2^{n-1}, a_6 = 10 \cdot 2^5 = 10 \cdot 32 = 320$$

(4) 初項が 81, 公比が $(-27) \div 81 = -\frac{1}{3}$ だから

$$a_n = 81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, a_6 = 81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^5 = 3^4 \cdot \left(-\frac{1}{3^5}\right) = -\frac{1}{3}$$

10

初項を a , 公比を r とすると

(1) $a_3 = ar^2 = 6 \dots \textcircled{1}$

$a_6 = ar^5 = 48 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ より $\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{48}{6} = 8 \therefore r^3 = 8$ より $r = 2$

$\textcircled{1}$ に代入して, 初項 $\frac{3}{2}$, 公比 2, $a_n = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1}$

(2) $ar = -6 \dots \textcircled{1}$

$ar^5 = -486 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ より $\frac{ar^5}{ar} = \frac{-486}{-6} = 81 \therefore r^4 = 81$

$(r-3)(r+3)(r^2+9) = 0 \therefore r = 3, -3$ これを $\textcircled{1}$ に代入して

$$\begin{cases} \text{初項 } -2, \text{ 公比 } 3, a_n = -2 \cdot 3^{n-1} \\ \text{初項 } 2, \text{ 公比 } -3, a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1} \end{cases}$$

11

(1) 初項 5, 公比 2

(2) 初項 -3, 公比 -3

(3) $a_n = 2^{2n-1} = 2 \cdot 2^{2n-2}$
 $= 2 \cdot 4^{n-1}$ より

初項 2, 公比 4

12

(1) $a_n = 1 \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1}$

$S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3}$

(2) $a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$S_n = \frac{8 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 16 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

(3) $S_n = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$(4) S_n = \frac{3\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)} 1-(-2)^n$$

(5) 初項が 2, 公比が $\frac{4}{3} \div 2 = \frac{2}{3}$ だから

$$a_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_n = \frac{2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{2}{3}} = 6\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

(6) 初項が 1, 公比が -1 だから

$$a_n = 1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

$$S_n = \frac{1 \cdot \{1-(-1)^n\}}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)^n}{2} \left(= \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \right)$$

13

(1) 一般項は $a_n = a \cdot 3^{n-1}$ とおける。

$$a_4 = a \cdot 3^3 = 135, \quad 27a = 135 \quad \therefore \text{初項 } 5$$

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-1} > 2000 \quad \text{より } 3^{n-1} > 400$$

$$3^5 = 243, \quad 3^6 = 729 \quad \text{だから 第7項}$$

$$(2) S_n = \frac{3\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)} = 1-(-2)^n = 129$$

$$(-2)^n = -128 = (-2)^7 \quad \text{より 第7項}$$

$$(3) a + ar + ar^2 = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$ar^3 + ar^4 + ar^5 = -24 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{より } \frac{ar^3(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{-24}{3} = -8$$

$$\therefore r^3 = -8 \quad \text{より } r = -2$$

$$\textcircled{1} \text{に代入して } a - 2a + 4a = 3 \quad \text{より } a = 1$$

よって, その次の3項の和は

$$\begin{aligned} ar^6 + ar^7 + ar^8 &= (-2)^6 + (-2)^7 + (-2)^8 \\ &= (-2)^6 \cdot \{1 - 2 + (-2)^2\} = 192 \end{aligned}$$

14 等比数列をなす3つの数を a, b, c とおく。

$$(1) \begin{cases} a+b+c=26 & \dots\dots① \\ abc=216 & \dots\dots② \\ b^2=ac & \dots\dots③ \end{cases}$$

②, ③より

$$b^3=216=6^3 \quad \therefore b=6$$

$$①より \quad a+c=20$$

$$③より \quad ac=36$$

解と係数の関係から a, c は

$$t^2-20t+30=0 \text{ の解である。}$$

$$\therefore (t-2)(t-18)=0 \text{ より } t=2, 18$$

よって、求める3つの数は 2, 6, 18

$$(2) \begin{cases} a+b+c=39 & \dots\dots① \\ abc=1000 & \dots\dots② \\ b^2=ac & \dots\dots③ \end{cases}$$

②, ③より

$$b^3=1000=10^3 \quad \therefore b=10$$

$$①より \quad a+c=29$$

$$②より \quad ac=100$$

解と係数の関係から a, c は

$$t^2-29t+100=0 \text{ の2つの解である。}$$

$$\therefore (t-4)(t-25)=0 \text{ より } t=4, 25$$

よって、求める3つの数は 4, 10, 25

15

$$(1) \sum_{k=1}^n (3k+1) = 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n = \frac{1}{2} n(3n+5)$$

$$(2) \begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k) &= \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 2 \times \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1-6) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n-5) \end{aligned}$$

$$(3) \begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k-1)k(k+1) &= \sum_{k=1}^n (k^3 - k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 - \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{2} n(n+1) \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) - 1 \right\} = \frac{1}{4} n(n+1)(n^2+n-2) \end{aligned}$$

$$(4) \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3 \cdot (3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = \frac{3(3^{n-1} - 1)}{2}$$

$$(5) \sum_{k=1}^n 3^{k-1} = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

B 問題

16

$$(1) 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot 50 = \frac{50(2 + 100)}{2} = 2550$$

$$(2) 7 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + \cdots + 7 \cdot 14 = \frac{14(7 + 98)}{2} = 735$$

$$(3) 2 \text{ かつ } 7 \text{ の倍数は } 14 \text{ の倍数だから } 14 \cdot 1 + 14 \cdot 2 + \cdots + 14 \cdot 7 = \frac{7(14 + 98)}{2} = 392$$

$$(4) (2 \text{ の倍数}) + (7 \text{ の倍数}) - (14 \text{ の倍数}) \text{ より } 2550 + 735 - 392 = 2893$$

17

$$(1) \text{ 題意より } 4n + 2 = 6m + 2$$

$$n = \frac{3}{2}m \text{ で, } m, n \text{ が自然数だから } m = 2k \text{ (} k \text{ は自然数) と表せる。}$$

$$\text{求める数を } a_k \text{ とすると } a_k = 6 \cdot 2k + 2 = 12k + 2$$

$$\text{条件より } 100 \leq 12k + 2 \leq 999 \quad \therefore 9 \leq k \leq 83$$

よって、求める和は

$$\text{初項 } a_9 = 110, \text{ 末項 } a_{83} = 998, \text{ 項数 } 75 \text{ の等差数列の和だから } \frac{75(110 + 998)}{2} = 41550$$

$$(2) \text{ 題意より } 4n + 1 = 6m + 3$$

$$n = \frac{3m + 1}{2} \text{ で, } m, n \text{ が自然数だから } m = 2k - 1 \text{ (} k \text{ は自然数) と表せる。}$$

$$\text{求める数を } a_k \text{ とすると } a_k = 6 \cdot (2k - 1) + 3 = 12k - 3$$

$$\text{条件より } 100 \leq 12k - 3 \leq 999 \quad \therefore 9 \leq k \leq 83$$

よって、求める和は

$$\text{初項 } a_9 = 105, \text{ 末項 } a_{83} = 993, \text{ 項数 } 75 \text{ の等差数列の和だから } \frac{75(105 + 993)}{2} = 41175$$

初項 a , 公比を r とすると

$$\begin{cases} a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 = 4 \dots \textcircled{1} \\ a + ar + \dots + ar^9 = 132 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より } ar^5 + ar^6 + ar^7 + ar^8 + ar^9 = 128$$

$$r^5 (a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4) = 128$$

$$\textcircled{1} \text{ を代入して } r^5 = 32 \quad r \text{ は実数だから } \therefore r = 2$$

$$\begin{aligned} S_{15} &= a + ar + \dots + ar^{14} \\ &= 132 + (ar^{10} + ar^{11} + ar^{12} + ar^{13} + ar^{14}) \\ &= 132 + r^{10} (a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4) \\ &= 132 + 32^2 \times 4 = 4228 \end{aligned}$$

(別解)

$$S_5 = \frac{a(1-r^5)}{1-r} = 4 \dots \textcircled{1}$$

$$S_{10} = \frac{a(1-r^{10})}{1-r} = 132 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{ より } \frac{a(1-r^{10})}{1-r} \times \frac{1-r}{a(1-r^5)} = \frac{132}{4}$$

$$\frac{(1-r^5)(1+r^5)}{1-r^5} = 33$$

$$r^5 = 32 \text{ より } r = 2$$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } a = \frac{4}{31}$$

$$S_{15} = \frac{\frac{4}{31}(2^{15}-1)}{2-1} = \frac{4}{31} \times 32767 = 4228$$

$$1, a, b, \text{ が等差数列をなすから } 2a = b + 1 \dots \textcircled{1}$$

$$1, a^2, b^2 \text{ が等比数列をなすから } a^4 = b^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } b = \pm a^2$$

$$b = a^2 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ に代入して } a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$(a-1)^2 = 0 \quad \therefore a = 1, b = 1$$

$$b = -a^2 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ に代入して } a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$a = -1 \pm \sqrt{2}, b = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$(a, b) = (1, 1), (-1 \pm \sqrt{2}, -3 \pm 2\sqrt{2}) \text{ (複号同順)}$$

$$a_n = 1 + (n-1)d, b_n = a \cdot 2^{n-1} \text{ とおくと}$$

$$(1) \quad c_n = a_n + b_n = 1 + (n-1)d + a \cdot 2^{n-1}$$

$$c_2 = 1 + d + a \cdot 2 = 11 \quad \therefore 2a + d = 10 \dots \textcircled{1}$$

$$c_4 = 1 + 3d + a \cdot 2^3 = 37 \quad \therefore 8a + 3d = 36 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } a = 3, d = 4 \quad \therefore c_n = 1 + (n-1) \cdot 4 + 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\text{よって } c_n = -3 + 4n + 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$(2) \quad d_n = a_n b_n = \{1 + (n-1)d\} a \cdot 2^{n-1}$$

$$d_2 = a_2 b_2 = (1+d) \cdot 2a = 40 \quad \therefore a(1+d) = 20 \dots \textcircled{1}$$

$$d_3 = a_3 b_3 = (1+2d) \cdot 4a = 140 \quad \therefore a(1+2d) = 35 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } a = 5, d = 3$$

$$\therefore d_n = \{1 + (n-1) \cdot 3\} \cdot 5 \cdot 2^{n-1}$$

$$\text{よって } d_n = 5(3n-2) \cdot 2^{n-1}$$

(1) 第 n 項は $a_n = n(2n+1) = 2n^2 + n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k^2 + k) &= 2 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(4n+2+3) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(4n+5) \end{aligned}$$

(2) 第 n 項は $a_n = (2n)^2 = 4n^2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 4k^2 &= 4 \sum_{k=1}^n k^2 = 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

(3) 第 n 項は $a_n = (2n-1)(2n+1) = 4n^2 - 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (4k^2 - 1) &= 4 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - n \\ &= \frac{n}{3} \{2(n+1)(2n+1) - 3\} \\ &= \frac{n}{3} (4n^2 + 6n - 1) \end{aligned}$$

(4) 一般項は $a_n = n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 2k) &= \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 + 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{2} n(n+1) \cdot \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) + (2n+1) + 2 \right\} \\ &= \frac{1}{4} n(n+1)(n^2 + 5n + 6) \\ &= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

$$(1) \quad a_k = \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right) \quad \text{だから}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{n}{2(3n+2)} \end{aligned}$$

$$(2) \quad a_k = \frac{1}{2k(2k+2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \quad \text{だから}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{4(n+1)} \end{aligned}$$

$$(3) \quad a_k = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} = -\frac{1}{2} (\sqrt{k} - \sqrt{k+2}) \quad \text{だから}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k+2}) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ (\sqrt{1} - \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - \sqrt{4}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{n} - \sqrt{n+2}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - \sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

(4) 第 k 項は

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2 - 1} = \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \quad \text{だから}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$(1) \begin{array}{l} 1, 3, 7, 13, 21, 31, \dots \{a_n\} \\ 2, 4, 6, 8, 10, \dots \{b_n\} \end{array}$$

$b_n = 2$ だから

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) = n^2 - n + 1$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって, $a_n = n^2 - n + 1$

$$(2) \begin{array}{l} 1, 2, 5, 14, 41, 122, \dots \{a_n\} \\ 1, 3, 9, 27, 81, \dots \{b_n\} \end{array}$$

$b_n = 3^{n-1}$ だから

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} = 1 + \frac{1(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって, $a_n = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$

$$(3) a_n = \frac{10^n - 1}{9}$$

(1) 第 k 項は

$$\begin{aligned} a_n &= k \{n - (k-1)\}^2 = k \{n^2 - 2n(k-1) + (k-1)^2\} \\ &= k \{k^2 - 2(n+1)k + (n+1)^2\} \\ &= k^3 - 2(n+1)k^2 + (n+1)^2 k \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k^3 - 2(n+1) \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 - 2(n+1) \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{12} n(n+1)^2 \{3n - 4(2n+1) + 6(n+1)\} \\ &= \frac{1}{12} n(n+1)^2 (n+2) \end{aligned}$$

(2) 第 k 項は

$$a_n = (n+k)^2 = n^2 + 2nk + k^2$$

よって

$$\begin{aligned} S_n &= n^2 \sum_{k=1}^n 1 + 2n \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= n^3 + 2n \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6} n \{ 6n^2 + 6n(n+1) + (n+1)(2n+1) \} \\ &= \frac{1}{6} n (14n^2 + 9n + 1) \\ &= \frac{1}{6} n (2n+1)(7n+1) \end{aligned}$$

発展問題

$$\begin{aligned} 25 \quad S_n &= 1 + 3x + 5x^2 + \cdots + (2n-1)x^{n-1} \\ -xS_n &= x + 3x^2 + \cdots + (2n-3)x^{n-1} + (2n-1)x^n \\ (1-x)S_n &= 1 + 2x + 2x^2 + \cdots + 2x^{n-1} - (2n-1)x^n \end{aligned}$$

$x \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} (1-x)S_n &= 1 + \frac{2x(1-x^{n-1})}{1-x} - (2n-1)x^n \\ &= \frac{1-x + 2x(1-x^{n-1}) - (2n-1)x^n(1-x)}{1-x} \\ &= \frac{1+x - (2n+1)x^n + (2n-1)x^{n+1}}{1-x} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } S_n = \frac{1+x - (2n+1)x^n + (2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$x=1$ のとき

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

- (1) 第1群から第
- n
- 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \text{ (個)}$$

第1群から第9群までの項数は

$$\frac{9(9+1)}{2}=45 \text{ (個)}$$

よって、10群の最初の数は奇数の列 $a_N = 2N - 1$ の46番目だから

$$a_{46} = 2 \cdot 46 - 1 = 91$$

- (2)
- $2N - 1 = 999$
- より
- $N = 500$
- だから

999は500番目である。

500番が第 n 群に入っているとすると

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 \leq 500 \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

 $n^2 \div 1000$ としておよその n を求めると $n = 31$

$$n = 31 \text{ のとき } \frac{31(31+1)}{2} = 496$$

500 - 496 = 4 だから第32群の4番目である。

- (3) 第
- n
- 群の最初の数は

$$2 \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1 \right) - 1 = n^2 - n + 1$$

第 n 群の最後の数は

$$2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1$$

 n 群には n 個の項があるから、第 n 群の和は

$$\frac{n \left\{ (n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1) \right\}}{2} = n^3$$

1-2 漸化式と数学的帰納法

A 問題

27

$$(1) a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 7 + 3 = 10$$

$$a_5 = a_4 + 3 = 10 + 3 = 13$$

$$(2) a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$a_4 = 2a_3 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

$$a_5 = 2a_4 - 1 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$$

$$(3) a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$$

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4$$

$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 8$$

$$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 16$$

28

(1) $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2 \quad (n=1 \text{ のときも成り立つ})$$

$$\therefore a_n = 3n - 2$$

(2) $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) = n^2 - n + 1 \quad (n=1 \text{ のときも成り立つ})$$

$$\therefore a_n = n^2 - n + 1$$

(3) $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1 \quad (n=1 \text{ のときも成り立つ})$$

$$\therefore a_n = 2^n - 1$$

$$(1) \quad 2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2} \dots \textcircled{1} \text{ とする。}$$

(I) $n=1$ のとき

(左辺) = 2, (右辺) = 2 よって, $\textcircled{1}$ は成り立つ。

(II) $n=k$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると

$$2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1) = \frac{k(3k + 1)}{2} \dots \textcircled{2}$$

$n=k+1$ のとき, $\textcircled{1}$ の左辺を, $\textcircled{2}$ を用いて変形すると

$$\begin{aligned} & 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1) + (3k + 2) \\ &= \frac{k(3k + 1)}{2} + (3k + 2) = \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} = \frac{(k + 1)(3k + 4)}{2} \end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときも成り立つ。

(I), (II) より, $\textcircled{1}$ はすべての自然数 n について成り立つ。

$$(2) \quad 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \dots \textcircled{1} \text{ とする。}$$

(I) $n=1$ のとき

(左辺) = 1, (右辺) = $2^1 - 1 = 1$ よって, $\textcircled{1}$ は成り立つ。

(II) $n=k$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1 \dots \textcircled{2}$$

$n=k+1$ のとき, $\textcircled{1}$ の左辺を, $\textcircled{2}$ を用いて変形すると

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} + 2^k \\ &= 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときも成り立つ。

(I), (II) により, $\textcircled{1}$ はすべての自然数 n について成り立つ。

(1) $2+4+6+\dots+2n > n^2+1 \dots \textcircled{1}$ とする。

(I) $n=2$ のとき (左辺) $=2+4=6$, (右辺) $=2^2+1=5$

よって, (左辺) $<$ (右辺) となり $\textcircled{1}$ は成り立つ。

(II) $n=k$ ($k \geq 2$) のとき, $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると

$$2+4+6+\dots+2k > k^2+1 \dots \textcircled{2}$$

$n=k+1$ のとき, $\textcircled{1}$ の左辺を, $\textcircled{2}$ を用いて変形すると

$$2+4+6+\dots+2k+2(k+1) > k^2+1+2(k+1) = (k+1)^2+1$$

よって, $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

(I), (II) より, $\textcircled{1}$ は $n \geq 2$ の自然 n について成り立つ。

(2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1} \dots \textcircled{1}$ とする。

(I) $n=2$ のとき

$$(\text{左辺}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, (\text{右辺}) = \frac{2 \cdot 2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6} > 0$$

よって, (左辺) $>$ (右辺) となり $\textcircled{1}$ は成り立つ。

(II) $n=k$ ($k \geq 2$) のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1} \dots \textcircled{2}$$

$n=k+1$ のとき, $\textcircled{1}$ の左辺を, $\textcircled{2}$ を用いて変形すると

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{k+1} = \frac{2k+1}{k+1}$$

$$\text{ここで } \frac{2k+1}{k+1} - \frac{2(k+1)}{k+2} = \frac{(2k+1)(k+2) - 2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 0 \quad \text{より} \quad \frac{2k+1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$\text{したがって } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2k+1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$\text{ゆえに } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2} \text{ が成り立つ。}$$

よって, $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

(I), (II) により, $\textcircled{1}$ は $n \geq 2$ の自然数 n について成り立つ。

B 問題

31

(1) $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n) + 1 = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 - 5n + 6) \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって, $a_n = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 - 5n + 6)$

(2) $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって, $a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

32

(1) $a_{n+1} + 4 = 2(a_n + 4)$ と変形。

$\alpha = 2\alpha + 4$
$\alpha = -4$

数列 $\{a_n + 4\}$ は初項 $a_1 + 4 = 5$, 公比 2

の等比数列である。

よって, $a_n - 1 = 5 \cdot 2^{n-1}$ すなわち $a_n = 5 \cdot 2^{n-1} + 1$

(2) $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$ と変形。

$\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1$
$\alpha = 2$

数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = 1$, 公比 $\frac{1}{2}$

の等比数列である。

よって, $a_n - 2 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ すなわち $a_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3) $a_{n+1} - \frac{1}{4} = -3\left(a_n - \frac{1}{4}\right)$ と変形。

$\alpha + 3\alpha = 1$
$\alpha = \frac{1}{4}$

数列 $\left\{a_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$, 公比 -3

の等比数列である。

よって, $a_n - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4} \cdot (-3)^{n-1}$ すなわち $a_n = \frac{1}{4} \{ 1 - 5 \cdot (-3)^{n-1} \}$

(1) $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 + \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= 2 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって, $a_n = 2 - \frac{1}{n}$

(2) 両辺の逆数をとると ($a_n > 0$)

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 3}{a_n} - \frac{3}{a_n} + 1$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{ とおくと}$$

$$b_{n+1} = 3b_n + 1, \quad b_1 = \frac{1}{2}$$

$\begin{aligned} \alpha &= 3\alpha + 1 \\ \alpha &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$

$$b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3 \left(b_n + \frac{1}{2} \right) \text{ と変形。}$$

数列 $\left\{ b_n + \frac{1}{2} \right\}$ は初項 $b_1 + \frac{1}{2} = 1$, 公比 3

の等比数列

よって, $b_n + \frac{1}{2} = 1 \cdot 3^{n-1}$ すなわち $b_n = 3^{n-1} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 3^{n-1} - 1}{2}$

したがって, $a_n = \frac{2}{2 \cdot 3^{n-1} - 1}$

$$34 \quad a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{3a_1 - 2}{2a_1 - 1} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = \frac{3a_2 - 2}{2a_2 - 1} = \frac{3 \cdot \frac{4}{3} - 2}{2 \cdot \frac{4}{3} - 1} = \frac{6}{5}$$

$$a_4 = \frac{3a_3 - 2}{2a_3 - 1} = \frac{3 \cdot \frac{6}{5} - 2}{2 \cdot \frac{6}{5} - 1} = \frac{8}{7}$$

よって、 $a_1 = \frac{2}{1}$ と考えて $a_n = \frac{2n}{2n-1}$ と推定される。

(I) $n=1$ のとき、 $a_1 - \frac{2}{1} = 2$ で成り立つ。

(II) $n=k$ のとき、 $a_k = \frac{2k}{2k-1}$ ……①が成り立つと仮定すると

$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{2a_k - 2}{2a_k - 1} = \frac{2 \cdot \frac{2k}{2k-1} - 2}{2 \cdot \frac{2k}{2k-1} - 1} = \frac{2k+2}{2k+1} = \frac{2(k+1)}{2(k+1)-1}$$

となり成り立つ。

よって、(I), (II) より ①はすべての自然数 n について成り立つ。