１章

２－１　数列の極限

A 問題

35

⑴　正の無限大に発散（∞）

⑵　負の無限大に発散（－∞）

⑶　正の無限大に発散（∞）

⑷　振動

⑸　振動

⑹　0 に収束

⑺　0 に収束

⑻　振動

⑼　0 に収束

36

⑴　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(2n^2-3n\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(2-\frac{3}{n}\right)=\infty$

⑵　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(-n^3+n\right)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(-1+\frac{1}{n^2}\right)=-\infty$

⑶　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(n-2\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-2\sqrt{\frac{1}{n}}\right)=\infty$

⑷　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+1}{n^2+5n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}}=1$

⑸　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+5n}{2n^2-4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n+\frac{5}{n}}{2-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}$

$=-\infty$

⑹　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n-2)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$

$=1$

⑺　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}=\infty$

⑻　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{3}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

⑼　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n}}}{1+\frac{2}{n}}=2$

37

⑴　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n-3}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n-1}}$

$\displaystyle =\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)-(n-1)}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n-1}}\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n-1}}=0$

⑵　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}\right)}$

$\displaystyle =\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{(n+3)-(n+1)}\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{2}=\infty$

38

⑴　初項 2,　公比 -2　より

$a_n = 2\cdot(-2)^{n-1} = -(-2)\cdot(-2)^{n-1}$

$= -(-2)^n$　∴　$\lim_{n\to\infty}\{-(-2)^n\}$ は振動する

⑵　初項1,　公比 $-\frac{1}{3}$　より　$a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

∴　$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$

⑶　初項 6,　公比 $\frac{2}{3}$　より　$a_n = 6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

∴　$\lim_{n\to\infty} 6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$

⑷　初項 6,　公比 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$　より　$a_n = 6\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$

∴　$\lim_{n\to\infty} 6\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} = 0$

39

⑴　$\lim_{n\to\infty}(3^n - 2^{2n}) = \lim_{n\to\infty}(3^n - 4^n)$

$= \lim_{n\to\infty} 4^n\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right\} = -\infty$

⑵　$\lim_{n\to\infty}\frac{1-(0.2)^n}{(0.5)^n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{0.5}\right)^n - \left(\frac{0.2}{0.5}\right)^n\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{2^n - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right\} = \infty$

⑶　$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1} - 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$

$= \frac{\frac{1}{2}\times 0 - 3}{0+1} = -3$

⑷　$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n - (\sqrt{2})^n}{(\sqrt{3})^n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^n\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{(\sqrt{3})^n - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n\right\} = \infty$

⑸　$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1-2^n}{1+2^n} = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

よって，振動する

⑹　$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{(-2)^n + 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

よって，振動する

40

⑴　与えられた数列が収束するための必要十分条件は　$-1 < 1-3x \leqq 1$ である。

$-2 < -3x \leqq 0$

$\frac{2}{3} > x \geqq 0$　∴　$0 \leqq x < \frac{2}{3}$

⑵　与えられた数列が収束するための必要十分条件は　$-1 < x^2 - 4x \leqq 1$ である。

$-1 < x^2 - 4x$ から　$x^2 - 4x + 1 > 0$ を解いて

$x < 2-\sqrt{3}$,　$2+\sqrt{3} < x$　…①

$x^2 - 4x \leqq 1$ から　$x^2 - 4x - 1 \leqq 0$ を解いて

$2-\sqrt{5} \leqq x \leqq 2+\sqrt{5}$　…②

①，②の共通範囲を求めて　$2-\sqrt{5} \leqq x < 2-\sqrt{3}$,　$2+\sqrt{3} < x \leqq 2+\sqrt{5}$

41

(1) $|r|<1$のとき $\lim_{n\to\infty} r^n=0$, $\lim_{n\to\infty} r^{n+1}=0$

だから $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{2+r^n}=\frac{0}{2+0}=0$

(2) $r=1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{2+r^n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

(3) $r=-1$ のとき 数列は

1, $-\frac{1}{3}$，1, $-\frac{1}{3}$， ……となり振動する。

(4) $|r|>1$ のとき $0<\left|\frac{1}{r}\right|<1$ だから

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{2+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{2\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{r}{2\times 0+1}=r$

B 問題

42

(1) $-1\leqq\cos n\theta\leqq 1$ だから $-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\cos n\theta\leqq\frac{1}{n}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos n\theta=0$

(2) $0\leqq 1+\sin n\theta\leqq 2$ だから $\frac{0}{n}\leqq\frac{1+\sin n\theta}{n}\leqq\frac{2}{n}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\frac{0}{n}=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+\sin\theta}{n}=0$

(3) $0\leqq\sin^2 n\theta\leqq 1$ だから $\frac{0}{n^2+1}\leqq\frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1}\leqq\frac{1}{n^2+1}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\frac{0}{n^2+1}=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1}=0$

43

⑴ $n < a_n < n+1$ だから $2n < a_{2n} < 2n+1$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{n}$ より $\frac{2n}{n+1} < \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{2n+1}{n}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}} = 2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n} = 2$

⑵ $\log_2 n < a_n < \log_2 2n$ より $\log_2 2n < a_{2n} < \log_2 4n$

$n \geqq 2$ のとき $\frac{1}{\log_2 2n} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\log_2 n}$ だから

$$\frac{\log_2 2n}{\log_2 2n} < \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{\log_2 4n}{\log_2 n}$$

$$1 < \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{\log_2 4 + \log_2 n}{\log_2 n}$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 4 + \log_2 n}{\log_2 n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\log_2 n}+1\right) = 1$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n} = 1$

44

⑴ $\log_2(n-1) - \log_2 2n = \log_2\frac{n-1}{2n} = \log_2\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ より

$\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \log_2\frac{1}{2} = -1$

⑵ $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)}{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}$$

$$= \frac{\{(n+1)-(n-1)\}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)}{\{(n+2)-(n-2)\}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)}{4\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}$$

より

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

45

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}$

$\displaystyle =\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\cdot1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)$

$\displaystyle =\frac{1}{6}\times1\times1\times2=\frac{1}{3}$

(2) $\displaystyle (\text{分子})=1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$\displaystyle =\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$

$\displaystyle =\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

$\displaystyle (\text{分母})=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ より

$\displaystyle (\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+2)}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{2+\frac{1}{n}}=1$

46

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}+7^{n+1}}{3^n+5^n+7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\frac{3}{7}\right)^n+5\left(\frac{5}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}=7$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}{3\cdot6\cdot9\cdots\cdots3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot1)\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot3)\cdots\cdots(2\cdot n)}{(3\cdot1)\cdot(3\cdot2)\cdot(3\cdot3)\cdots\cdots(3\cdot n)}$

$\displaystyle =\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n}{3^n\cdot1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

発展問題

47

⑴ (ⅰ) $|r|<1$のとき $0<r^2<1$ より

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0,\quad \lim_{n\to\infty} r^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(r^2\right)^n = 0 \quad \text{だから} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+r^n+r^{2n}}{2-r^{2n}} = \frac{1+0+0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

(ⅱ) $|r|>1$のとき $\left|\frac{1}{r}\right|<1,\quad 0<\frac{1}{r^2}<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^n+r^{2n}}{2-r^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{r^2}\right)^n+\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}{2\left(\frac{1}{r^2}\right)^n-1} = \frac{0+0+1}{2\times 0-1} = -1$$

(ⅲ) $r=1$ のとき $r^2=1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^n+r^{2n}}{2-r^{2n}} = \frac{1+1+1}{2-1} = 3$$

(ⅳ) $r=-1$ のとき $r^2=1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^n+r^{2n}}{2-r^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n+1}{2-1} = \lim_{n\to\infty}\left\{2+(-1)^n\right\}$$ となり振動する。

したがって
$$\begin{cases} |r|<1 \text{ のとき } \dfrac{1}{2} \\ |r|>1 \text{ のとき } -1 \\ r=1 \text{ のとき } 3 \\ r=-1 \text{ のとき 振動する} \end{cases}$$

⑵ $0\leqq\theta<2\pi$ より $-1\leqq\sin\theta\leqq 1$

(ⅰ) $|\sin\theta|<1$のとき,

すなわち $0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-\sin^n\theta}{2+\sin^n\theta} = \frac{2-0}{2+0} = 1$$

(ⅱ) $\sin\theta=1$ のとき, すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-\sin^n\theta}{2+\sin^n\theta} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

(ⅲ) $\sin\theta=-1$ のとき, すなわち $\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-\sin^n\theta}{2+\sin^n\theta} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n}$$ となり振動する。

したがって
$$\begin{cases} 0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2},\quad \dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi,\quad \dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi \text{ のとき } 1 \\ \theta=\dfrac{\pi}{2} \text{ のとき } \dfrac{1}{3} \\ \theta=\dfrac{3}{2}\pi \text{ のとき 振動する} \end{cases}$$

48

(1)

$3a_{n+1}=a_n+6$ より $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+2$ $a_{n+1}-3=\dfrac{1}{3}\left(a_n-3\right)$ と変形できる。

数列 $\left\{a_n-3\right\}$ は，初項 $a_1-3=-2$, 公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列だから

$a_n-3=\left(-2\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ $a_n=-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+3$ よって $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$

(2) $3a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$ より $a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(a_{n+1}-a_n\right)$ と変形できる。

ここで $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと

$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$ となり $b_1=a_2-a_1=2-1=1$ だから

$\left\{b_n\right\}$ は初項1, 公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。

$\therefore$ $b_n=1\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ また, $\left\{b_n\right\}$ は $\left\{a_n\right\}$ の階差数列だから

$n\geqq 2$ のとき $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$

$=1+\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ （これは $n=1$ のときも成り立つ）

よって $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$

２－２　無限級数

A 問題

49

(1) $\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4n-3}-\dfrac{1}{4n+1}\right)$ だから

$$S_n=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}$（収束）

(2) $$\frac{1}{\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1}}=\frac{\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1}}{\left(\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1}\right)\left(\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1}\right)}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1}\right)$$ だから

$$S_n=-\frac{1}{3}\left\{\left(1-\sqrt{4}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{7}\right)+\left(\sqrt{7}-\sqrt{10}\right)+\cdots\cdots+\left(\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1}\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{3n+1}\right)$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{3n+1}\right)\right\}=\infty$ （発散）

50

(1) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots\cdots$ は，初項 $a=1$，公比 $r=-\dfrac{1}{3}$ で，$|r|<1$ だから収束し

和は $\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\dfrac{3}{4}$ に収束。

(2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{8}-\dfrac{27}{16}+\cdots\cdots$ は，初項 $a=\dfrac{1}{2}$，公比 $r=-\dfrac{3}{2}$ で，$|r|>1$ だから発散する。

(3) $1+0.2+0.04+0.008+\cdots\cdots$ は，初項 $a=1$，公比 $r=0.2$ で，$|r|<1$ だから収束し

和は $\dfrac{1}{1-0.2}=\dfrac{5}{4}$ に収束。

(4) $\left(\sqrt{2}-1\right)+1+\left(\sqrt{2}+1\right)+\cdots\cdots$ は，初項 $a=\sqrt{2}-1$，公比 $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ で，

$|r|>1$ だから発散する。

51

⑴ $1-2x+4x^2-8x^3+\cdots\cdots$ は，初項$1(\neq 0)$，公比$-2x$ だから，

収束するためには $-1<-2x<1$ であればよい。

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$

⑵ $x+x\left(x^2-x+1\right)+x\left(x^2-x+1\right)^2+x\left(x^2-x+1\right)^3+\cdots\cdots$ は，初項x，公比x^2-x+1 だから，

(ⅰ) $x=0$のとき $0+0+0+\cdots\cdots$ となり収束する。

(ⅱ) $x\neq 0$のとき 収束するためには $-1<x^2-x+1<1$ であればよい。

まず $-1<x^2-x+1$ より $x^2-x+2>0$

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ となり，すべてのxについて成り立つ …①

次に $x^2-x+1<1$ より $x(x-1)<0$ $\therefore$ $0<x<1$ …② $(x\neq 0$をみたす$)$

①，②から $0<x<1$

よって，(ⅰ)または(ⅱ)より $0\leqq x<1$

52

⑴ $0.\dot{7}=0.7+0.07+0.007+\cdots\cdots$となり

初項 0.7，公比$\dfrac{1}{10}$の無限等比級数である。

$$\therefore\quad \frac{0.7}{1-\frac{1}{10}}=\frac{7}{9}$$

⑵ $0.\dot{2}\dot{4}=0.24+0.0024+0.000024+\cdots\cdots$となり

初項 0.24，公比$\dfrac{1}{100}$の無限等比級数である。

$$\therefore\quad \frac{0.24}{1-\frac{1}{100}}=\frac{24}{99}=\frac{8}{33}$$

⑶ $0.1\dot{5}1\dot{3}=0.1+0.0513+0.000513+0.0000000513+\cdots\cdots$となり

第 2 項からは，初項 0.513，公比$\dfrac{1}{1000}$の無限等比級数である。

$$\therefore\quad 0.1+\frac{0.0513}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{1}{10}+\frac{513}{10000-10}=\frac{1}{10}+\frac{513}{9990}$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{19}{370}=\frac{28}{185}$$

B 問題

53

⑴　第 n 項 a_n は　$a_n=\dfrac{1}{(2n)^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ だから

$$
\begin{aligned}
S_n&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

よって，この無限級数は収束し，和は $\dfrac{1}{2}$ に収束

⑵　第 n 項 a_n は　$a_n=\dfrac{1}{n^2+2n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$ だから

$$
\begin{aligned}
S_n&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

よって，この無限級数は収束し，和は $\dfrac{3}{4}$ に収束

⑶　第 n 項 a_n は　$a_n=\log_{10}\dfrac{n+1}{n}$　だから

$$
\begin{aligned}
S_n&=\log_{10}\frac{2}{1}+\log_{10}\frac{3}{2}+\log_{10}\frac{4}{3}+\cdots\cdots+\log_{10}\frac{n+1}{n}\\
&=\log_{10}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\cdots\frac{n+1}{n}\right)=\log_{10}(n+1)
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_{10}(n+1)=\infty$$

よって，この無限級数は発散する。

（別解）　$a_n=\log_{10}\dfrac{n+1}{n}=\log_{10}(n+1)-\log_{10}n$

$$
\begin{aligned}
S_n&=(\log_{10}2-\log_{10}1)+(\log_{10}3-\log_{10}2)+\cdots\cdots+\{\log_{10}(n+1)-\log_{10}n\}\\
&=\log_{10}(n+1)
\end{aligned}
$$

として求めてもよい。

⑴ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ より

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ は公比 $\dfrac{1}{3}\left(\left|\dfrac{1}{3}\right|<1\right)$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ は公比 $\dfrac{1}{5}\left(\left|\dfrac{1}{5}\right|<1\right)$ の無限等比級数だから収束し，

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{2}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

⑵ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n-1}{3^n}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ より

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ は公比 $\dfrac{2}{3}\left(\left|\dfrac{2}{3}\right|<1\right)$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ は公比 $\dfrac{1}{3}\left(\left|\dfrac{1}{3}\right|<1\right)$ の無限等比級数だから収束し，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=-\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2,\quad\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cdot 2^n-1}{3^n}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

⑶ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ より，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ は公比 $\dfrac{2}{3}$，$\left(\left|\dfrac{2}{3}\right|<1\right)$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ は公比 $-\dfrac{1}{3}$，$\left(\left|-\dfrac{1}{3}\right|<1\right)$ の無限等比級数だから収束し，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{1}{4}$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}=2-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}$

55

⑴ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\cos n\ \pi=\frac{1}{3}\cos\pi+\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\cos 2\pi+\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\cos 3\pi+\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\cos 4\pi+\cdots$

$$=-\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{4}-\cdots\cdots$$

これは，初項$-\dfrac{1}{3}$，公比$-\dfrac{1}{3}\left(\left|-\dfrac{1}{3}\right|<1\right)$の無限等比級数だから収束する。

$$\therefore\quad =\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{1}{4}$$

⑵ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1+\frac{1}{2^{2}}\times 0+\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}\times(-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\times 0$

$$+\left(-\frac{1}{2}\right)^{5}\times 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{6}\times 0+\left(-\frac{1}{2}\right)^{7}\times(-1)+\cdots$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{3}}-\frac{1}{2^{5}}+\frac{1}{2^{7}}-\cdots$$

これは，初項 $-\dfrac{1}{2}$，公比$-\dfrac{1}{2^{2}}$ の無限等比級数だから収束する。

よって，与式$=\dfrac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=-\dfrac{2}{5}$

56 第 n 項までの部分和を S_n とすると

⑴ （ｉ） $S_{2n}=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

（ⅱ） $S_{2n}=S_{2n}-\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$

よって，（ｉ）（ⅱ）より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$ だから

与式は 1 に収束する。

⑵　（ｉ）　$S_{2n}=\left(\frac{2}{3}-\cancel{\frac{4}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{4}{5}}-\cancel{\frac{6}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{6}{7}}-\cancel{\frac{8}{9}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{2n}{2n+1}}-\frac{2n+2}{2n+3}\right)$

$$=\frac{2}{3}-\frac{2n+2}{2n+3}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}-\frac{2n+2}{2n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}-\frac{2+\frac{2}{n}}{2+\frac{3}{n}}\right)=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$$

（ⅱ）$S_{2n-1}=S_{2n}-\frac{2n+2}{2n+3}=\frac{2}{3}$

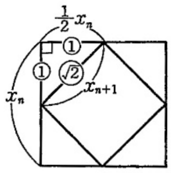
よって，（ｉ）（ⅱ）より　$\lim_{n\to\infty}S_{2n}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}$　だから

与式に発散する。

57

⑴　正方形 S_1，S_2，S_3 …… の 1 辺の長さをそれぞれ x_1，x_2，x_3, …… とする。

$x_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}x_n$　より正方形の相似比は$\frac{\sqrt{2}}{2}$ だから，



面積比は$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ である。よって　$\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は，

初項 $S_1=\frac{1}{2}a^2$，公比$\frac{1}{2}$ の無限等比級数である。

公比は$\left|\frac{1}{2}\right|<1$　より収束して，和は　$\frac{\frac{1}{2}a^2}{1-\frac{1}{2}}=a^2$

⑵　S_n の周を　l_n　とすると，$l_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}l_n$，$l_1=2\sqrt{2}a$　であるから

$l_n=2\sqrt{2}a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ である。

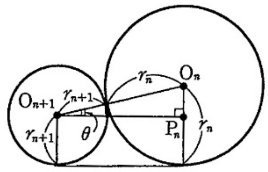
これらの周の総和は初項$2\sqrt{2}a$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$　の無限等比級数であり

公比は　$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|<1$　より収束して，$\frac{2\sqrt{2}a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4\sqrt{2}a}{2-\sqrt{2}}=4\left(\sqrt{2}+1\right)a$

※ 巻末解答に誤植あり。

58

右図のようにP_nをとると



$$\sin\theta=\frac{O_nP_n}{O_nO_{n+1}}=\frac{r_n-r_{n+1}}{r_n-r_{n+1}}$$ より

$$(r_n+r_{n+1})\sin\theta=r_n-r_{n+1}$$

$$(1+\sin\theta)r_{n+1}=(1-\sin\theta)r_n$$

$$r_{n+1}=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_n$$

となり，円の相似比は$\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ だから，面積比は $\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2$ である。

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\pi r_n^2$ は，初項πr_1^2， 公比$\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2$ の無限等比級数である。

$0<\sin\theta<1$ より $0<\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2<1$ だから収束し，

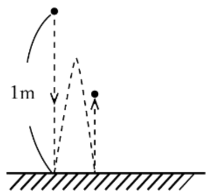
和は $$\frac{\pi r_1^2}{1-\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2}=\frac{(1+\sin\theta)^2\pi r_1^2}{(1+\sin\theta)^2-(1-\sin\theta)^2}=\frac{(1+\sin\theta)^2\pi r_1^2}{4\sin\theta}$$

発展問題

59

n回目にボールがはね返る高さをa_nとすると

$a_1=\dfrac{3}{4}$，$a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n$ である。



静止するまでの移動距離をdとすると

$$d=1+2\left\{\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots\right\}$$

であり，{ }の部分は初項$\dfrac{3}{4}$，公比$\dfrac{3}{4}\left(\left|\dfrac{3}{4}\right|<1\right)$の無限等比級数である。

よって，$d=1+2\cdot\dfrac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=7\,\mathrm{m}$

1 章の問題

1　初項 10，末項 20，項数 $k+2$ の等差数列になるから

$$\frac{(k+2)(10+20)}{2}=300$$

$$15(k+2)=200 \qquad \therefore \quad k=18$$

また，第 20 項は 20 だから公差を d とすると

$$a_{20}=10+19d=20 \qquad \therefore \quad d=\frac{10}{19}$$

2　50 以下の 5 を分母とする数の和は

$$\frac{1}{5}(1+2+3+\cdots\cdots+250)=6275$$

このうち既約分数でないものは

$$\frac{1}{5}(5+10+15+\cdots+250)=(1+2+3+\cdots+50)=1275$$

よって，$6275-1275=5000$

3

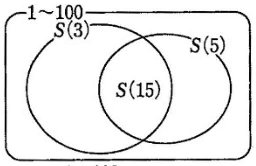
1 から 100 までの自然数のうち n の倍数の和を $S(n)$ とすると

$$S(3)=3+6+9+\cdots\cdots+99=\frac{33(3+99)}{2}=1683$$

$$S(5)=5+10+15+\cdots\cdots+100=\frac{20(5+100)}{2}=1050$$

$$S(15)=15+30+45+\cdots\cdots+90=\frac{6(15+90)}{2}=315$$

⑴　$S(3)-S(15)=1683-315=1368$



⑵　3 または 5 で割り切れる数の和は

$$S(3)+S(5)-S(15)=1683+1050-315=2418$$

1 から 100 までの総和は $\dfrac{100(1+100)}{2}=5050$

よって　$5050-2418=2632$

4　$a_n = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

⑴　$a_n{}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$　だから

$$与式 = \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

⑵　$\frac{1}{a_n} = 2^{n-1}$　だから

$$与式 = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \frac{1\cdot\left(2^k-1\right)}{2-1} = 2^n - 1$$

⑶　$\log_2 a_n = \log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(n-1\right)$　だから

$$与式 = \sum_{k=1}^{n}\log_2 a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(-k+1\right) = \frac{n\left(n+1\right)}{n} + n = -\frac{1}{2}n\left(n-1\right)$$

5　$S_n = \frac{1\cdot\left(2^n-1\right)}{2-1} = 2^n - 1$

$2^n - 1 > 10^6$　より　$2^n > 10^6 + 1 > 10^6$　として

両辺の常用対数をとると

$\log_{10} 2^n > \log_{10} 10^6$

$n\log_{10} 2 > 6$

$0.3010n > 6$，$n > 19.93$　∴　$n = 20$

このとき

$2^{20} = \left(2^{10}\right)^2 = \left(1024\right)^2 > \left(10^3\right)^2 = 10^6$　で成り立つ。

よって，最小の自然数 n は $n = 20$

6

(1) $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta\left(a_{n+1}-\alpha a_{n}\right)$

$a_{n+2}-\left(\alpha+\beta\right)a_{n+1}+\alpha\beta a_{n}=0 \Leftrightarrow a_{n+2}-a_{n+1}-2a_{n}=0$ から

$\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=-2$

α,βは $t^2-t-2=0$ の解だから

$\left(t-2\right)\left(t+1\right)=0$ より $t=2,\ -1$　よって $\left(\alpha,\beta\right)=\left(2,-1\right),\left(-1,2\right)$

(2) $\left(\alpha,\beta\right)=\left(2,-1\right)$のとき $a_{n+2}-2a_{n+1}=-\left(a_{n+1}-2a_{n}\right)$

数列$\left\{a_{n+1}-2a_{n}\right\}$は初項 $a_2-2a_1=1-2\cdot 1=-1,$

公比-1の等比数列だから $a_{n+1}-2a_{n}=-1\cdot\left(-1\right)^{n-1}=\left(-1\right)^{n}$ …①

$\left(\alpha,\beta\right)=\left(-1,2\right)$のとき $a_{n+2}+a_{n+1}=2\left(a_{n+1}+a_{n}\right)$

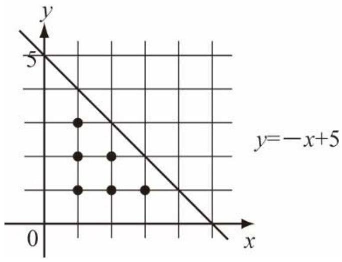
数列$\left\{a_{n+1}+a_{n}\right\}$は初項 $a_2+a_1=1+1=2,$

公比2の等比数列だから $a_{n+1}+a_{n}=2\cdot 2^{n-1}=2^{n}$ …②

②$-$①より $3a_n=2^n-\left(-1\right)^n$　よって $a_n=\dfrac{1}{3}\left\{2^n-\left(-1\right)^n\right\}$

7

(1)



$S_5=6$

(2) $\left\{S_n\right\}$は 0, 0, 1, 3, 6, 10, 21 ……であるので階差数列を$\left\{b_n\right\}$とすると,

0　0　1　3　6　10　21 …… $\{S_n\}$

0　1　2　3　4　5 …… $\{b_n\}$

$\left\{b_n\right\}$は 初項0, 公差1の等差数列より $b_n=0+\left(n-1\right)\cdot 1=n-1$

よって, $S_n=S_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=0+\sum_{k=1}^{n-1}\left(k-1\right)=\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$

$=\dfrac{1}{2}\left(n-1\right)n-\left(n-1\right)=\dfrac{1}{2}\left(n-1\right)\left(n-2\right)$

8

$b_n = \dfrac{a_n + 5}{3a_n - 2}$ とおくと $\lim_{n\to\infty} b_n = 1 \cdots$①

a_nについて解くと $(3a_n - 2)b_n = a_n + 5$

$(3b_n - 1)a_n = 2b_n + 5$

$b_n = \dfrac{1}{3}$とすると $0 \cdot a_n = 2 \times \dfrac{1}{3} + 5$ となり不適。

ゆえに $b_n \neq \dfrac{1}{3}$で $a_n = \dfrac{2b_n + 5}{3b_n - 1}$

ここで①を用いて $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2b_n + 5}{3b_n - 1} = \dfrac{2 \times 1 + 5}{3 \times 1 - 1} = \dfrac{7}{2}$

9　2 項定理を用いて

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n$

$x=1$ を代入して

$2^n = 1 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$

$\therefore\ 2^n > {}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$　逆数をとると

$\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{2}{n(n-1)}$　両辺に n を掛けて

$0 < \dfrac{n}{2^n} < \dfrac{2}{n-1}$　が成り立つ。

ここで，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{n-1} = 0$　よって，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$　が成り立つ。

10

$S_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{27} + \cdots\cdots + \dfrac{n}{3^n}$　$\cdots$① とおくと

$\dfrac{1}{3} S_n = \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{27} + \dfrac{3}{81} + \cdots\cdots + \dfrac{n-1}{3^n} + \dfrac{n}{3^{n+1}}$　$\cdots$②

①－②より

$$S_n - \frac{1}{3} S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots\cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3} S_n = \frac{\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\therefore\ S_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} - \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{3^n}$$

よって $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left\{\dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n}{3^n}\right\} = \dfrac{3}{4}$

11

⑴　数学的帰納法で証明する。

$a_n > \sqrt{3}$ ……①とする。

（Ⅰ）　$n = 1$ のとき

$a_1 = 3 > \sqrt{3}$ で①は成り立つ。

（Ⅱ）　$n = k$ のとき

$a_k > \sqrt{3}$ が成り立つと仮定すると

$n = k + 1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{3}{a_k}\right)$$

$a_k > 0$，$\dfrac{3}{a_k} > 0$ だから，相加平均と相乗平均の関係から

$$a_k + \frac{3}{a_k} \geqq 2\sqrt{a_k \cdot \frac{3}{a_k}} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{3}{a_k}\right) \geqq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

よって，$n = k + 1$ のときにも①は成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）によりすべての自然数で①は成り立つ。

$$\left(\begin{aligned} a_{k+1} - \sqrt{3} &= \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{3}{a_k}\right) - \sqrt{3} = \frac{a_k{}^2 - 2\sqrt{3}a_k + 3}{2a_k} \\ &= \frac{\left(a_k - \sqrt{3}\right)^2}{2a_k} > 0 \quad \text{としてもよい。} \end{aligned}\right)$$

⑵

$$a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) - \sqrt{3} = \frac{\left(a_n - \sqrt{3}\right)^2}{2a_n}$$

$$= \frac{a_n - \sqrt{3}}{a_n} \cdot \frac{a_n - \sqrt{3}}{2}$$

ここで，$a_n > \sqrt{3}$ だから $0 < \dfrac{a_n - \sqrt{3}}{a_n} < 1$

$\therefore\ a_{n+1}\sqrt{3} < \dfrac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{3}\right)$ が成り立つ。

⑶ $a_n-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}\left(a_{n-1}-\sqrt{3}\right)$，$a_{n-1}-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}\left(a_{n-2}-\sqrt{3}\right)\cdots\cdots$

$\cdots\cdots a_3-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}\left(a_2-\sqrt{3}\right)$，$a_2-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}\left(a_1-\sqrt{3}\right)$の関係が成り立つから，

順々に代入していくと

$$a_n-\sqrt{3}<\frac{1}{2}\left(a_{n-1}-\sqrt{3}\right)<\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(a_{n-2}-\sqrt{3}\right)<\cdots\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1-\sqrt{3}\right)$$

ここで，$a_n-\sqrt{3}>0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1-\sqrt{3}\right)=0$ だから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\sqrt{3}\right)=0$　よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$

12

⑴ $a_n=5$ となる始めの n は

$$\frac{4\cdot\left(4+1\right)}{2}+1=11$$

$a_n=5$ となる最後の n は　$11+5-1=15$

$\therefore\ 11\leqq n\leqq 15$

⑵ $a_n=k$ となる始めの n は

$$\frac{\left(k-1\right)\cdot k}{2}+1=\frac{k^2-k+2}{2}$$

$a_n=k$ となる最後の n は　$\dfrac{k^2-k+2}{2}+k-1=\dfrac{k^2+k}{2}$

$$\therefore\ \frac{k^2-k+2}{2}\leqq n\leqq\frac{k^2+k}{2}$$

(3)　(2)より $k=a_n$ として

$$\frac{a_n{}^2-a_n+2}{2} \leqq n \leqq \frac{a_n{}^2+a_n}{2}$$

各辺の逆数をとると

$$\frac{2}{a_n{}^2-a_n} \leqq \frac{1}{n} \leqq \frac{2}{a_n{}^2-a_n+2}$$

各辺の平方根をとり，a_n を掛けると

$$\frac{\sqrt{2}\,a_n}{\sqrt{a_n{}^2-a_n}} \leqq \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leqq \frac{\sqrt{2}\,a_n}{\sqrt{a_n{}^2-a_n}+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}\,a_n}{\sqrt{a_n{}^2-a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{a_n}}}=\sqrt{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}\,a_n}{\sqrt{a_n{}^2-a_n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{a_n}+\frac{2}{a_n{}^2}}}=\sqrt{2}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$

13　$\mathrm{P}\left(x,\ y\right)$ とおくと

$$x=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots$$

これらはどちらも公比 $\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}\left(\left|\dfrac{1}{4}\right|<1\right)$ で，収束し，その和は

$$x=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3},\quad y=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

よって，点 P は $\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ に近づく。