２節　積分法の応用

A 問題

182

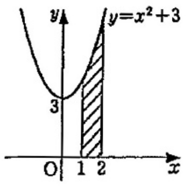
⑴　求める面積は右図の斜線部分だから

$$S=\int_1^2\left(x^2+3\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8}{3}+6\right)-\left(\frac{1}{3}+3\right)$$

$$=\frac{7}{3}+3=\frac{16}{3}$$

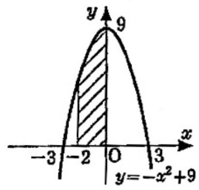


⑵　求める面積は右図の斜線部分だから

$$S=\int_{-2}^0\left(-x^2+9\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+9x\right]_{-2}^0$$

$$=0-\left(\frac{8}{3}-18\right)=\frac{46}{3}$$



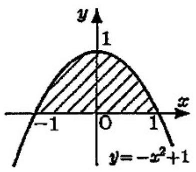
183

⑴　求める面積は右図の斜線部分だから

$$S=\int_{-1}^1\left(-x^2+1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^1$$

$$=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{4}{3}$$



⑵　$y=(x+1)(x-2)$ より

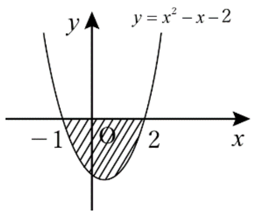
求める面積は右の斜線部分だから

$$S=-\int_{-1}^2\left(x^2-x-2\right)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^2$$

$$=-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)+\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)$$

$$=\frac{9}{2}$$



別解　教科書 p.135 練習 30 の積分計算を使うと

⑴

$$\int_{-1}^1\left(-x^2+1\right)dx=\int_{-1}^1(x+1)(x-1)dx$$

$$=\frac{(1+1)^3}{6}=\frac{4}{3}$$

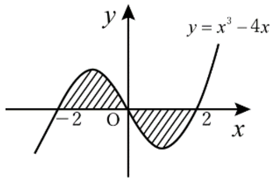
⑵

$$\int_{-1}^2\left(x^2-x-2\right)dx=-\int_{-1}^2(x+1)(x-2)dx$$

$$=\frac{(2+1)^3}{6}=\frac{9}{2}$$

(3)　$y=x^3-4x=x(x+2)(x-2)$ より

求める面積は右の斜線部分だから



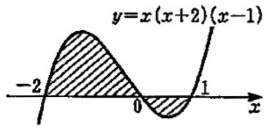
$$S=-2\int_0^2(x^3-4x)dx$$

$$=-2\left[\frac{1}{4}x^4-2x\right]_0^2$$

$$=-2(4-8)=8$$

(4)　$y=x(x+2)(x-1)$ より

求める面積は右の斜線部分だから



$$s=\int_{-2}^0(x^3+x^2-2x)dx$$

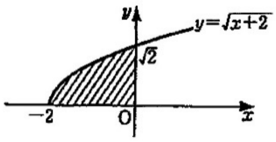
$$=-\int_0^0(x^3+x^2-2x)dx=\frac{37}{12}$$

184

(1)　求める面積は下の斜線部分だから

$$S=\int_{-2}^0\sqrt{x+2}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^0$$

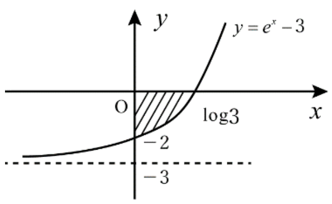
$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$



(2)　交点の x 座標は

$e^x-3=0$，　$e^x=3$ より $x=\log 3$

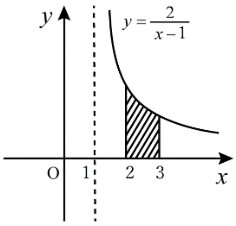
求める面積は下の斜線部分だから



$$S=-\int_0^{\log 3}(e^x-3)dx=-\left[e^x-3x\right]_0^{\log 3}$$

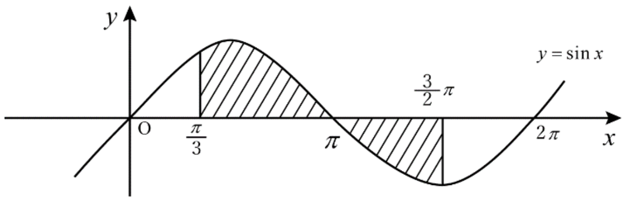
$$=(-e^{\log 3}+3\log 3)+1=3\log 3-2$$

⑶　求める面積は下の斜線部分だから



$$S=\int_{2}^{3}\frac{2}{x-1}\,dx=\Big[\,2\log\left(x-1\right)\Big]_{2}^{3}=2\log 2$$

⑷　求める面積は下の斜線部分だから



$$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin x\,dx$$

$$=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}-\Big[-\cos x\Big]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$=1-\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{5}{2}$$

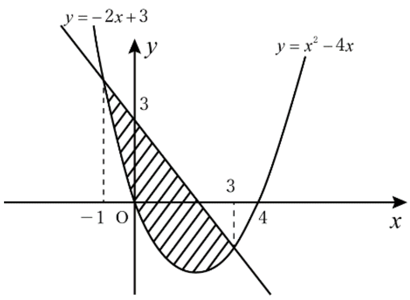
185

⑴　交点の x 座標は

$x^2-4x=-2x+3$ より $\left(x+1\right)\left(x-3\right)=0$

$\therefore\quad x=-1,\ 3$

求める面積は下の斜線部分だから



$$S=\int_{-1}^{3}\left\{\left(-2x+3\right)-\left(x^2-x\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}\left(-x^2+2x+3\right)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}$$

$$=\left(-9+9+9\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{32}{3}$$

別解

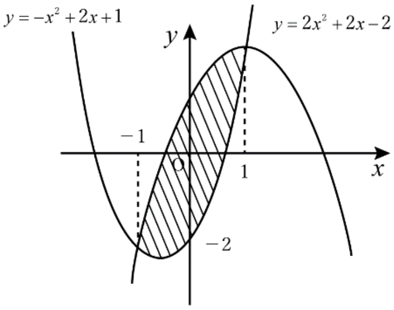
$$S=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)\,dx=\frac{(3+1)^4}{6}=\frac{32}{3}$$

⑵　交点の x 座標は

$2x^2+2x-2=-x^2+2x+1$ より $3x^2=3$

∴　$x=\pm 1$

求める面積は下の斜線部分だから



$$S=\int_{-1}^{1}\left\{\left(-x^2+2x+1\right)-\left(2x^2+2x-2\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(-3x^2+3\right)dx=\left[-x^3+3x\right]_{-1}^{1}$$

$$=(1+3)-(1-3)=4$$

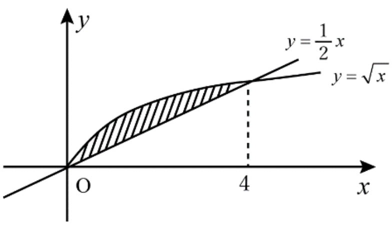
別解

$$S=-3\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx=\frac{3(1+1)^3}{6}=4$$

⑶　交点の x 座標は

$\sqrt{x}=\frac{1}{2}x$，　$4x=x^2$ より $x=0$，　4

求める面積は下の斜線部分だから



$$S=\int_{0}^{4}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^2\right]_0^4$$

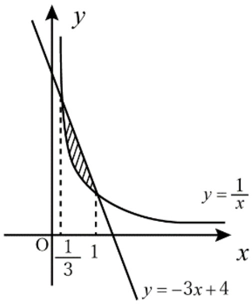
$$=\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}$$

⑷　交点の x 座標は

$\frac{1}{x}=-3x+4$ より $3x^2-4x+1=0$

$(3x-1)(x-1)=0$　　$\therefore$　$x=\frac{1}{3}$，　1

求める面積は下図の斜線部分だから



$$S=\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(-3x+4-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{3}{2}x^2+4x-\log x\right]_{\frac{1}{3}}^{1}$$

$$=\left(-\frac{3}{2}+4\right)-\left(-\frac{1}{6}+\frac{4}{3}-\log^{\frac{1}{3}}\right)$$

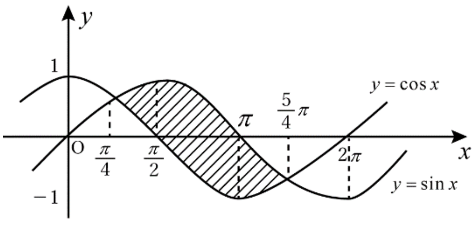
$$=\frac{4}{3}-\log 3$$

⑸　交点の x 座標は

$\sin x=\cos x$ より $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$x-\frac{\pi}{4}=0$，　π　　$\therefore$　$x=\frac{\pi}{4}$，　$\frac{5}{4}\pi$

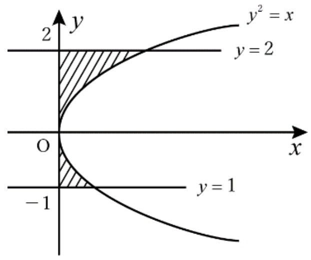
求める面積は下図の斜線部分だから



$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}$$

⑴　求める面積は下図の斜線部分だから



$$S = \int_0^2 y^2\,dy + \int_2^0 y^2\,dy$$

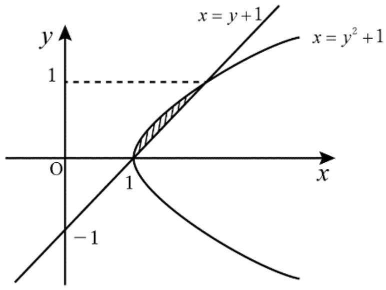
$$= \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^0$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$$

⑵　　交点の y 座標は

$y^2 + 1 = y + 1$ より $y(y-1) = 0$　∴　$y = 0$，1

求める面積は下図の斜線部分だから



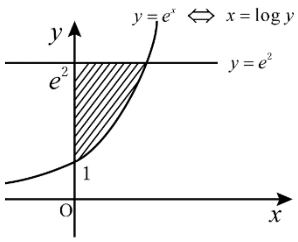
$$S = \int_0^1 \left\{(y+1) - (y^2+1)\right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$

⑶　$y = e^x$　は　$x = \log y$

求める面積は下図の斜線部分だから

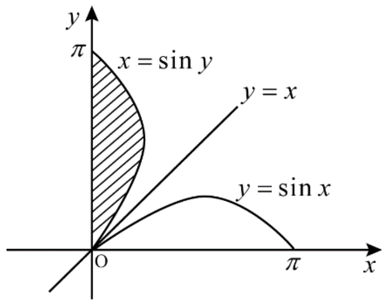


$$S = \int_1^{e^2} \log y\,dy$$

$$= \left[y\log y - y\right]_1^{e^2}$$

$$= (2e^2 - e^2) - (-1) = e^2 + 1$$

⑷　求める面積は下図の斜線部分だから



$$S = \int_0^{\pi} \sin y\,dy$$

$$= \left[-\cos y\right]_0^{\pi}$$

$$= 1 - (-1) = 2$$

187 $y'=3x^2$ より，接線の方程式は $y=3x+2$

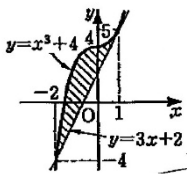
$x^3+4=3x+2$ より，共有点の x 座標は

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore\ x=1,\ -2$

よって $S=\int_{-2}^{1}\{(x^3+4)-(3x+2)\}dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$



188

(1) $y=e^x-e$ より $y'=e^x$

$x=1$ のとき $y'=e$ となるから

接線の方程式は $y=e(x-1)$

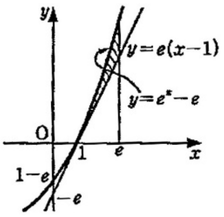
求める面積は下図の斜線部分だから

$S=\int_{1}^{e}\{(e^x-e)-e(x-1)\}dx$

$=\int_{1}^{e}(e^x-ex)dx=\left[e^x-\frac{1}{2}ex^2\right]_{1}^{e}$

$=\left(e^e-\frac{1}{2}e^3\right)-\left(e-\frac{1}{2}e\right)$

$=e^e-\frac{1}{2}e^3-\frac{1}{2}e$



(2) $y=\log x$ より $y'=\frac{1}{x}$

$x=1$ のとき $y'=1$ となるから

接線の方程式は $y=x-1$

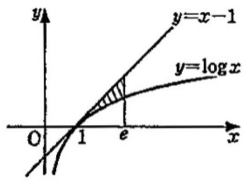
求める面積は下図の斜線部分だから

$S=\int_{1}^{e}\{(x-1)-\log x\}dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_{1}^{e}-\left[x\log x-x\right]_{1}^{e}$

$=\left(\frac{1}{2}e^2-e\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)-(e\log e-e+1)$

$=\frac{1}{2}e^2-e-\frac{1}{2}$



189

⑴ $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ より $y=\pm\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}$

$$S=4\int_0^3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\,dx=\frac{4}{3}\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$=\displaystyle\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$ は半径 3 の円の面積の $\dfrac{1}{4}$

を表すから

$$S=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 3^2\pi=3\pi$$

⑵ $y^2=x^2(1-x)$ より $y=\pm x\sqrt{1-x}$

$$S=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$

$1-x=t$ とおくと

$dx=-dt$ だから

x	$0\to 1$
t	$1\to 0$

$$S=2\int_0^1(1-t)\sqrt{t}\,dt=2\int_0^1\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$

$$=2\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=2\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)=\frac{8}{15}$$

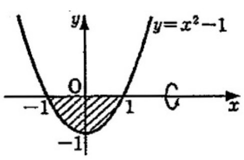
190

⑴ 求める体積は下図の斜線部分だから

$$V=\pi\int_{-1}^1\left(x^2-1\right)^2dx$$

$$=2\pi\int_0^1\left(x^4-2x^2+1\right)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{16}{15}\pi$$

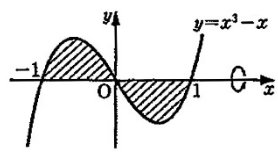


⑵ 求める体積は下図の斜線部分だから

$$V=\pi\int_{-1}^1\left(x^3-x\right)^2dx$$

$$=2\pi\int_0^1\left(x^6-2x^4+x^2\right)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^7}{7}-\frac{2}{5}x^5+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{16}{105}\pi$$

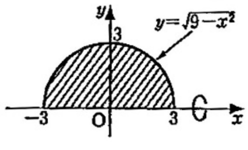


⑶ 求める体積は右図の斜線部分だから

$$V=\pi\int_{-3}^3\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2dx$$

$$=2\pi\int_0^3\left(9-x^2\right)dx$$

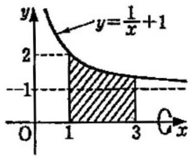
$$=2\pi\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=36\pi$$



191

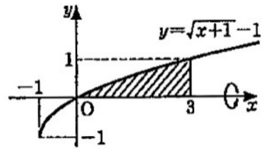
(1)　求める体積は下図の斜線部分だから

$$V=\pi\int_1^3\left(\frac{1}{x}+1\right)^2dx$$
$$=\pi\int_1^3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)dx$$
$$=\pi\left[-\frac{1}{x}+2\log x+x\right]_1^3=\frac{8+6\log 3}{3}\pi$$



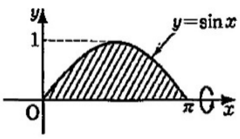
(2)　求める体積は下図の斜線部分だから

$$V=\pi\int_0^3\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2dx$$
$$=\pi\int_0^3\left(x+2-2\sqrt{x+1}\right)dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\frac{7}{6}\pi$$



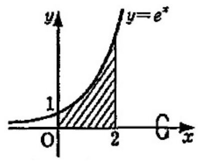
(3)　求める体積は下図の斜線部分だから

$$V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\pi^2$$



(4)　求める体積は下図の斜線部分だから

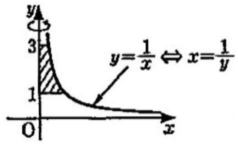
$$V=\pi\int_0^2 e^{2x}dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2$$
$$=\frac{e^4-1}{2}\pi$$



192

(1)　$y=\dfrac{1}{x}$ より $x=\dfrac{1}{y}$

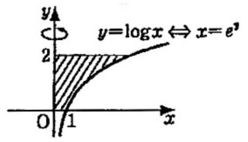
$$V=\pi\int_1^3 x^2dy=\pi\int_1^3\frac{1}{y^2}dy$$
$$=\pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^3=\frac{2}{3}\pi$$



(2)　$y=\log x$ より $x=e^{y}$

$$V=\pi\int_0^2 x^2 dy=\pi\int_0^2 e^{2y}dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^2=\frac{e^4-1}{2}\pi$$

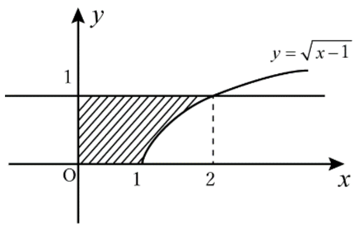


(3)　$y=\sqrt{x-1}$ より $x=y^2+1$

$$V=\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^1\left(y^2+1\right)^2 dy$$

$$=\pi\int_0^1\left(y^4+2y^2+1\right)dy=\pi\left[\frac{1}{5}y^4+\frac{2}{3}y^3+y\right]_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)=\frac{28}{15}\pi$$



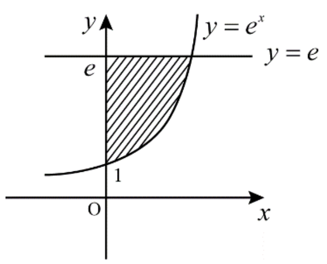
(4)　$y=e^{x}$ より $x=\log y$

$$V=\pi\int_1^e x^2\,dy=\pi\int_1^e\left(\log y\right)^2 dy$$

$$=\pi\int_1^e y'\left(\log y\right)^2 dy=\pi\left[\,y\left(\log y\right)^2\,\right]_1^e-\pi\int_1^e y\cdot 2\left(\log y\right)\cdot\frac{1}{y}\,dy$$

$$=\pi e-\pi\int_1^e 2\log y\,dy=\pi e-2\pi\left[\,y\log y-y\,\right]_1^e$$

$$=\pi e-2\pi\left(-1\right)=\left(e+2\right)\pi$$



193

⑴　与式$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

⑵　与式$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n}+\frac{n+3}{n}+\cdots+\frac{n+n}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)+\left(1+\frac{3}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(1+x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}(1+x)^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$

⑶　与式$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$

194

⑴　$0\leqq x\leqq 1$ のとき $x>x^3$ だから

$x+1\geqq x^3+1\geqq 1$

逆数をとると

$\frac{1}{x+1}\leqq\frac{1}{x^3+1}\leqq 1$

となる。よって，示された。

⑵　⑴の不等式の等号は $x=0$，1のときだけだから

$\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx<\int_0^1\frac{1}{x^3+1}\,dx<\int_0^1 dx$

が成り立つ。

$\left[\log(x+1)\right]_0^1<\int_0^1\frac{1}{x^3+1}\,dx<\left[x\right]_0^1$

よって，$\log 2<\int_0^1\frac{1}{x^3+1}\,dx<1$ が成り立つ。

195　自然数 k に対して　$k \leqq x \leqq k+1$ のとき

$$\frac{1}{k+1} \leqq \frac{1}{x} \text{ より } \frac{1}{\left(k+1\right)^2} < \frac{1}{x^2}$$

等号が成り立つのは $x = k+1$ のときだけだから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\left(k+1\right)^2}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

すなわち

$$\frac{1}{\left(k+1\right)^2} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$k=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ n-1$として，辺々加えると

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx$$

右辺 $= \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = -\frac{1}{n}+1$

よって，$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < 1-\frac{1}{n}$

が成り立つ。

B 問題

196　$y = x^2 \cdots$①　とすると　$y' = 2x$

①上の点$\left(t,\ t^2\right)$における接線の方程式は　$y - t^2 = 2t\left(x-t\right)$

$\therefore\ y = 2tx - t^2 \cdots$②

これが点$\left(1,\ -3\right)$を通るためには

$-3 = 2t - t^2$

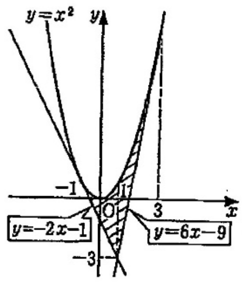
$t^2 - 2t - 3 = 0$

$\left(t+1\right)\left(t-3\right) = 0$

$\therefore\ t = -1,\ 3$

$t = -1$ のとき②から　$y = -2x - 1$

$t = 3$ のとき②から　$y = 6x - 9$



また求める面積は右図の斜線部分になるから

求める面積を S とすると　$S = \int_{-1}^{1}\left\{x^2 - \left(-2x-1\right)\right\}dx + \int_1^3 \left\{x^2 - \left(6x-9\right)\right\}dx$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x^2+2x+1\right)dx + \int_1^3\left(x^2-6x+9\right)dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x\right]_1^3$$

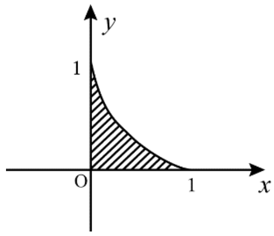
$$= 2\left\{\left(\frac{1}{3}+1\right)-0\right\} + \left(9-27+27\right) - \left(\frac{1}{3}-3+9\right)$$

$$= \frac{16}{3}$$

197　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より $\sqrt{y}=1-x$ として，両辺 2 乗する。

$y=1-2\sqrt{x}+x$

求める面積は，右図の斜線部分だから

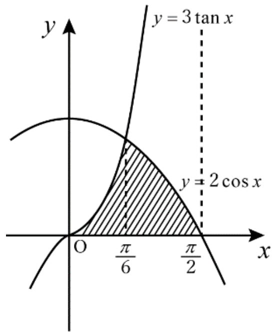


$S=\int_0^1\left(1-2\sqrt{x}+x\right)dx$

$=\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

198　交点の x 座標



$2\cos x=3\tan x$

$2\cos^2 x=3\sin x$

$2\sin^2 x+3\sin x-2=0$

$\left(2\sin x-1\right)\left(\sin x+2\right)=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より $x=\frac{\pi}{6}$

求める面積は右図の斜線部分だから

$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}3\tan x\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos x\,dx$

$=3\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\left(-\cos x\right)'}{\cos x}dx+2\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=3\left[\log\left(\cos x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+2\left(1-\frac{1}{2}\right)$

$=1-3\log\frac{\sqrt{3}}{2}$

199

(1) グラフはともに原点に関して対称であり，

交点の x 座標は

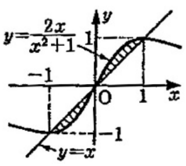
$\frac{2x}{x^2+1}=x$ より $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm1$

求める面積は下図の斜線部分

$S=2\int_0^1\left(\frac{2x}{x^2+1}-x\right)dx$

$=2\left[\log(x^2+1)-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=2\log 2-1$



(2) 交点の x 座標は

$xe^x=-\frac{1}{e}x^2$ より $x(e^{x+1}+x)=0$

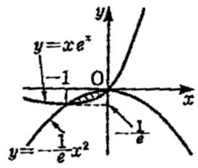
$\therefore\ x=0,\ -1$

求める面積は下図の斜線部分

$S=\int_{-1}^0\left(-\frac{1}{e}x^2-xe^x\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{3e}x^3\right]_{-1}^0-\left[xe^x\right]_{-1}^0+\int_{-1}^0 e^x dx$

$=-\frac{1}{3e}-\frac{1}{e}+\left[e^x\right]_{-1}^0=1-\frac{7}{3e}$



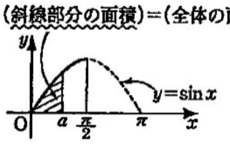
200 $2\int_0^a \sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$2\left[-\cos x\right]_0^a=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$-2\cos a+2=1\quad \cos a=\frac{1}{2}$

$0<a<\frac{\pi}{2}$ より $a=\frac{\pi}{3}$

2×(斜線部分の面積)=(全体の面積)



201

切り口の断面積を $S(x)$ とおくと

$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\sin x\cdot\sin x\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x$

よって $V=\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x\,dx$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$

202

(1) $y=x^2-4\cdots$①，$y=3x\cdots$② のグラフは下のようになり，①，②の $y<0$ の部分を x 軸に対称に折り返して考える。

①，②の交点は

$x^2-4=3x$ より $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1,\ 4$

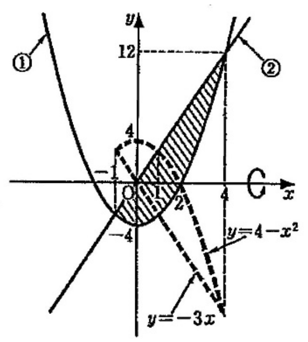
また，$y=x^2-4$ は y 軸に関して対称だから

$$V=2\pi\int_0^1(4-x^2)^2dx-\pi\int_{-1}^0(-3x)^2dx$$

$$+\pi\int_1^4(3x)^2dx-\pi\int_2^4(x^2-4)^2dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^1-\pi\left[3x^3\right]_{-1}^0$$

$$+\pi\left[3x^3\right]_1^4-\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_2^4=132\pi$$



⑵ $y=\sin x \cdots$①，$y=\sin 2x \cdots$② のグラフは

下のようになり，②の $y<0$ の部分を

x 軸に対称に折り返して考える。

①，②の交点は

$\sin x=\sin 2x$ より $\sin x(2\cos x-1)=0$

$\sin x=0,\ \cos x=\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi$ より

$x=\dfrac{\pi}{3}$，π

$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\sin^2 x\,dx+\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin^2 2x\,dx$$

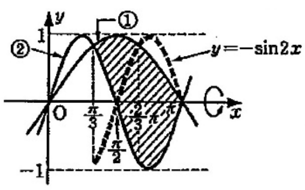
$$-\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}(1-\cos 2x)\,dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(1-\cos 4x)\,dx$$

$$-\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}+\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\right.$$

$$\left.-\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}=\frac{2\pi^2+3\sqrt{3}\pi}{8}$$



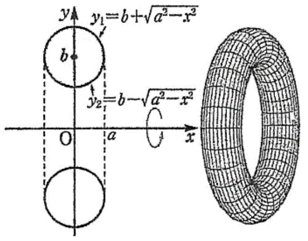
203

$x^2+\left(y-b\right)^2=a^2$ より

$y=b\pm\sqrt{a^2-x^2}$

$y_1=b+\sqrt{a^2-x^2}$， $y_2=b-\sqrt{a^2-x^2}$

とおくと



$$V=\pi\int_{-a}^{a}y_1^2\,dx-\pi\int_{-a}^{a}y_2^2\,dx$$

$$=2\pi\int_0^a\left(y_1^2-y_2^2\right)dx$$

$$=2\pi\int_0^a 4b\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=8\pi b\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

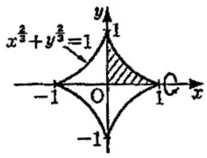
ここで， $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は原点を中心とし，

半径 a の円の $\frac{1}{4}$ の面積を表すから， $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi a^2$

よって， $V=8\pi x\times\frac{1}{4}\pi a^2=2\pi^2a^2b$

204 曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ は右図のようなアステロイド

と呼ばれる曲線である。



$y^{\frac{2}{3}}=1-x^{\frac{2}{3}}$ より $y^2=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3$

$$V=\pi\int_0^1 y^2\,dx=\pi\int_0^1\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=\pi\int_0^1\left(1-3x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx$$

$$=\pi\left[x-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{16}{105}\pi$$

発展問題

205

(1) $2\sin x = 1$ とすると $\sin x = \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より $x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

グラフは直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ に関して対称

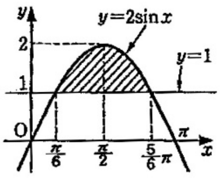
であるから，求める体積 V は

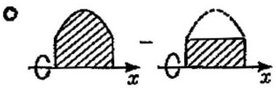
$$V = 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x)^2 dx - 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 1^2 dx$$

$$= 8\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx - 2\pi\Big[\ x\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 8\pi\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\pi^2$$

$$= \frac{\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)\pi}{3}$$





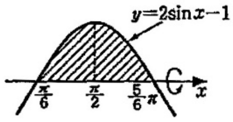
(2) $$V = 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x - 1)^2 dx$$

$$= 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4\sin^2 x - 4\sin x + 1\right)dx$$

$$= 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{2\left(1-\cos 2x\right) - 4\sin x + 1\right\}dx$$

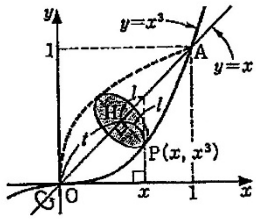
$$= 2\pi\Big[-\sin 2x + 4\cos x + 3x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\pi$$



関数 $y=x^3$ と直線 $y=x$ の交点は

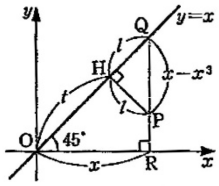
$A(1,\ 1)$，また $OA=\sqrt{2}$ である。



$0≦x≦1$ として，$y=x^2$ 上の点 $P(x,\ x^3)$ から

直線 $y=x$ に垂線 PH を下ろし $PH=l,\ OH=t$

とおくと、右図で△PHQ は二等辺三角形で



$$l=PH=\frac{PQ}{\sqrt{2}}=\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}$$

また，△ORQ で $\dfrac{x}{t+l}=\cos 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より

$$t=\sqrt{2}x-l=\sqrt{2}x-\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}=\frac{x+x^2}{\sqrt{2}}$$

したがって $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{2}}$

$$dt=\frac{1+2x^2}{\sqrt{2}}dt$$

t	$0\to\sqrt{2}$
x	$0\to\ 1$

断面積は πl^2

よって $V=\displaystyle\int_0^1 \pi l^2\,dt$

$$=\pi\int_0^1\left(\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1+2x^2}{\sqrt{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1\left(2x^5-3x^4+x^2\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}x^6-\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

３章の問題

1

(1) $\int \sqrt[3]{x}\log x\,dx = \int \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)' \log x dx$

$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\log x - \int \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}(\log x)'dx$

$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\log x - \int \frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}dx$

$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\log x - \frac{9}{16}x^{\frac{4}{3}} + C$

$= \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\left(\log x - \frac{3}{4}\right) + C$

(2) $\int x2^x dx = \int \left(\frac{2^x}{\log 2}\right)' \cdot x\,dx$

$= \frac{x \cdot 2^x}{\log 2} - \int \frac{2^x}{\log 2}(x)'dx$

$= \frac{x \cdot 2^x}{\log 2} - \frac{1}{\log 2}\int 2^x dx$

$= \frac{x \cdot 2^x}{\log 2} - \frac{2^x}{(\log 2)^2} + C$

(3) $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos x}\,dx = \int_0^{\pi}\sqrt{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}\,dx$

$= \int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}dx$

$= \sqrt{2}\left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} = 2\sqrt{2}$

(4) $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$　　$e^x+1=t$　とおくと

$e^x = t-1$

x	$0 \to 1$
t	$0 \to e+1$

$e^x dx = dt$

$\therefore\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t-1}$

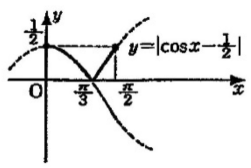
(与式) $= \int_2^{e+1}\frac{dt}{t(t-1)} = \int_2^{e+1}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$

$= \Big[\log|t-1| - \log|t|\Big]_2^{e+1}$

$= \log e - \log(e+1) + \log 2 = \log\frac{2e}{e+1}$

2

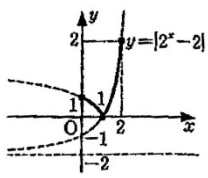
(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x - \frac{1}{2}\right|dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)dx$



$= \left[\sin x - \frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{1}{2}x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{4}-1\right) - \left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$

(2) $\int_0^2 |2^x - 2|\,dx = \int_0^1 (2-2^x)dx + \int_1^2 (2^x-2)dx$



$= \left[2x - \frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1 + \left[\frac{2^x}{\log 2} - 2x\right]_1^2$

$= \left(2-\frac{2}{\log 2}\right) + \frac{1}{\log 2} + \left(\frac{4}{\log 2}-4\right) - \left(\frac{2}{\log 2}-2\right) = \frac{1}{\log 2}$

3

(1) $$\int_0^1 x\cos\pi x\,dx=\int_0^1 x\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right)'dx$$
$$=\left[\,x\frac{1}{\pi}\sin\pi x\,\right]_0^1-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin\pi x\,dx$$
$$=0+\frac{1}{\pi^2}\left[\,\cos\pi x\,\right]_0^1=-\frac{2}{\pi^2}$$

(2) $$I=\int_0^1\left\{\cos^2\pi x-(ax+b)\right\}^2dx$$
$$=\int_0^1\left\{\cos^2\pi x-2(ax+b)\cos\pi x+(ax+b)^2\right\}dx$$

ここで $$\int_0^1\cos^2\pi x\,dx=\int_0^1\frac{1+\cos 2\pi x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\,x+\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\,\right]_0^1=\frac{1}{2}$$
$$\int_0^1 2(ax+b)\cos\pi x\,dx=2a\int_0^1 x\cos\pi x\,dx+2b\int_0^1\cos\pi x\,dx$$
$$=2a\cdot\left(-\frac{2}{\pi^2}\right)+2b\left[\,\frac{1}{\pi}\sin\pi x\,\right]_0^1=-\frac{4a}{\pi^2}$$

$$\int_0^1(ax+b)^2dx=\int_0^1\left(a^2x^2+2abx+b^2\right)dx$$
$$=\left[\,\frac{a^2}{3}x^3+abx^2+b^2x\,\right]_0^1=\frac{a^2}{3}+ab+b^2$$

よって $I=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4a}{\pi^2}+\dfrac{a^2}{3}+ab+b^2$

(3) $$I=\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{12}+\frac{4a}{\pi^2}+\frac{1}{2}$$
$$=\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\left(a+\frac{24}{\pi^2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{48}{\pi^4}$$

これより $b+\dfrac{a}{2}=0$ かつ $a+\dfrac{24}{\pi^2}=0$ のとき，最小値をとる。

したがって $a=-\dfrac{24}{\pi^2}$，$b=\dfrac{12}{\pi^2}$ のとき 最小値 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{48}{\pi^4}$

4

⑴ $f(x) = x^2 - \int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$

$= x^2 - x\int_0^x f'(t)\,dt + \int_0^x tf'(t)\,dt$

$f(0) = 0^2 - 0 + \int_0^0 tf'(t)\,dt = 0$

$f'(x) = 2x - \int_0^x f'(t)\,dt - xf'(x) + xf'(x)$

$= 2x - \Big[\, f(t) \,\Big]_0^x = 2x - f(x)$（証明終）

⑵ $\left(e^x f(x)\right)' = e^x f(x) + e^x f'(x)$

$= e^x f(x) + e^x\left(2x - f(x)\right)$

$= e^x f(x) + 2xe^x - e^x f(x) = 2xe^x$ （証明終）

⑶ $\left(e^x f(x)\right)' = 2xe^x$ の両辺を x で積分すると

$\int \left(e^x f(x)\right)' dx = \int 2xe^x\,dx$

$e^x f(x) = 2\int \left(e^x\right)' x\,dx$

$= 2e^x x - 2\int e^x \cdot 1 dx = 2xe^x - 2e^x + C$

$\therefore\ f(x) = 2x - 2 + Ce^{-x}$

$f(0) = 0$ より $f(0) = -2 + Ce^0 = 0$

$\therefore\ C = 2$

よって $f(x) = 2x - 2 + 2e^{-x}$

5

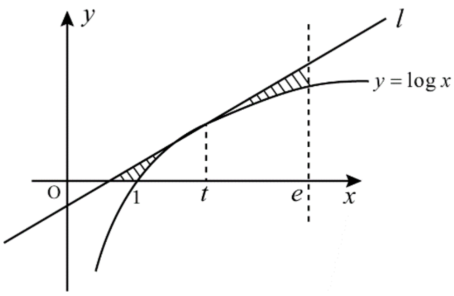
(1) $y=\log x$ より $y'=\dfrac{1}{x}$

l の方程式は

$y-\log t=\dfrac{1}{t}\left(x-t\right)$

$\therefore\quad y=\dfrac{1}{t}x+\log t-1$

(2) 求める面積は下図の斜線部分だから



$$S\left(t\right)=\int_1^e\left(\frac{1}{t}x+\log t-1-\log x\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2t}x^2+\left(\log t-t\right)x-\left(x\log x-x\right)\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2t}\left(e^2-1\right)+\left(\log t-t\right)\left(e-1\right)-1$$

$$=\frac{e^2-1}{2t}+\left(e-1\right)\log t-e$$

(3) $S'\left(t\right)=-\dfrac{e^2-1}{2t^2}+\dfrac{e-1}{t}=\dfrac{e-1}{2t^2}\left(2t-e-1\right)$

$S'\left(t\right)=0$ より $t=\dfrac{e+1}{2}$

増減表は次のようになる。

t	1	$\cdots$	$\frac{e+1}{2}$	$\cdots$	e
$S'\left(t\right)$		$-$	0	$+$	
$S\left(t\right)$		↘	極小	↗	

よって，$t=\dfrac{e+1}{2}$ のとき $S\left(t\right)$ は最小になる。

6

P$\left(t,\ \cos t \right)$とおくと，$y=\cos x$より$y'=-\sin x$

Pにおける接線の方程式は

$$y-\cos t=-\sin t\left(x-t \right)$$

$$y=-\left(\sin t \right)x+t\sin t+\cos t$$

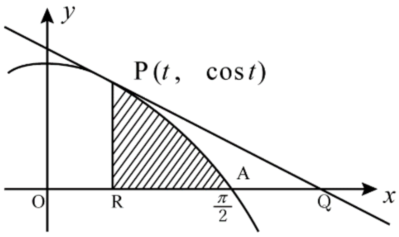
Qのx座標は　$y=0$として

$$x=t+\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\triangle \mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\mathrm{QR}\cdot \mathrm{PR}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot \frac{\cos t}{\sin t}\cdot \cos t$$

$$=\frac{\cos^2 t}{2\sin t}$$



右図の斜線部分の図形APRの面積は

$$\int_t^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dt=\left[\sin t \right]_t^{\frac{\pi}{2}}=1-\sin t$$

（図形APQ）：（図形APR）＝1：2だから

（図形APR）＝$\dfrac{2}{3}\triangle \mathrm{PQR}$

$$\therefore\quad 1-\sin t=\frac{2}{3}\cdot \frac{\cos^2 t}{2\sin t}$$

$$3\left(\sin t-\sin^2 t \right)=1-\sin^2 t$$

$$2\sin^2 t-3\sin t+1=0$$

$$\left(\sin t-1 \right)\left(2\sin t-1 \right)=0$$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$だから$\sin t=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\quad t=\dfrac{\pi}{6}$　よって，$P\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right)$

7

⑴　楕円を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1，円柱（半径 b，高さ $2a$）の体積を V_2 とすると

$$V_1 = \pi\int_{-2}^{2} y^2\,dx = 2\pi\int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$= 2\pi\left[x - \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = 2\pi\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}\pi$$

$$V_2 = \pi b^2 \cdot 2a = 2ab^2\pi$$

ここで，点 $(a,\ b)$ は $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$　上の点だから

$$\frac{a^2}{4} + b^2 = 1 \quad \therefore\ b^2 = 1 - \frac{a^2}{4}$$ より

$$V_2 = 2a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\pi = 2\left(a - \frac{a^3}{4}\right)\pi$$

よって　$V = V_1 - V_2 = \dfrac{8}{3}\pi - 2\left(a - \dfrac{a^3}{4}\right)\pi$

$$V = \left(\frac{8}{3} - 2a + \frac{a^3}{2}\right)\pi \quad (0 < a < 2)$$

⑵
$$V' = \left(-2 + \frac{3}{2}a^2\right)\pi$$

$$= \frac{3}{2}\left(a - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(a + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\pi$$

a	0	…	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	…	2
V'	／	−	0	+	／
V	／	↘	極小	↗	／

$a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　のとき

$$V = \left(\frac{8}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)\pi$$

$$= \frac{8\left(3 - \sqrt{3}\right)}{9}\pi$$

増減表より最小値は　$a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　のとき

$$\frac{8\left(3 - \sqrt{3}\right)}{9}\pi$$

8

⑴　2 曲線の交点の x 座標は

$e^x = ne^{-x}$　より

$e^{2x} = n \iff 2x = \log n$

$\therefore\ x = \dfrac{1}{2}\log n$

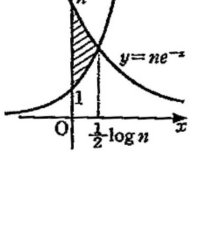
$$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}\log n}\left(ne^{-x} - e^x\right)dx$$

$$= \left[-ne^{-x} - e^x\right]_0^{\frac{1}{2}\log n}$$

$$= \left(-ne^{-\frac{1}{2}\log n} - e^{\frac{1}{2}\log n}\right) - (-n - 1)$$

$$= -n\cdot n^{-\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} + n + 1 = n - 2\sqrt{n} + 1$$

$\therefore\ S_n = \left(\sqrt{n} - 1\right)^2$



⑵
$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{n+1} - S_n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sqrt{n+1} - 1\right)^2 - \left(\sqrt{n} - 1\right)^2\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 2\right)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

$$\frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 2\right)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

と変形すると

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right) = 1$$

9

$1 \leqq 1+x^2 \leqq 2$　より　$\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{1}{1+x^2} \leqq 1$

各辺に x^n を掛けて

$\dfrac{1}{2}x^n \leqq \dfrac{x^n}{1+x^2} \leqq x^n$

等号は $x=0$，2 のときだけ成り立つから

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}x^n \leqq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx \leqq \int_0^1 x^n\,dx$

$\displaystyle\left[\frac{1}{2(n+1)}x^{n+1}\right]_0^1 \leqq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dt \leqq \left[\frac{1}{n+1}x^n\right]_0^1$

よって，$\displaystyle\frac{1}{2(n+1)} \leqq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx \leqq \frac{1}{n+1}$

が成り立つ。