１章　数列　解答

１節　数列とその和

練習１

⑴　初項 1，第 5 項 9

⑵　初項 1，第 5 項 25

練習２

⑴　1

⑵　$\dfrac{10}{16}$

練習３

⑴　$a_1 = 4\cdot 1+1 = 5,\ \ a_2 = 4\cdot 2+1 = 9,\ \ a_3 = 4\cdot 3+1 = 13,$

$a_4 = 4\cdot 4+1 = 17,\ \ a_5 = 4\cdot 5+1 = 21$

⑵　$a_1 = 1^3 = 1,\ \ a_2 = 2^8 = 8,\ \ a_3 = 3^3 = 27,$

$a_4 = 4^3 = 64,\ \ a_5 = 5^3 = 125$

⑶　$a_1 = (-1)^1 = -1,\ \ a_2 = (-1)^2 = 1,\ \ a_3 = (-1)^3 = -1,$

$a_4 = (-1)^4 = 1,\ \ a_5 = (-1)^5 = -1$

練習４

⑴　2,　4,　8,　……　を数列 $\{a_n\}$ とすると

$a_1 = 2^1$，$a_2 = 2^2$，$a_3 = 2^3$，……　よって　一般項　$a_n = 2^n$

⑵　$\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{9}$，……を数列 $\{a_n\}$ とすると

$a_1 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^0$，$a_2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^1$，$a_3 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$，……　よって　一般項　$a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

練習５

⑴　公差 d は　$d = 5-1 = 4$

□の中は順に 13，17

⑵　公差 d は　$2d = 9-13 = -4$

よって　$d = -2$　□の中は順に　11，7，5

練習６

⑴　$a_n = 5+(n-1)\cdot 2 = 2n+3$

$a_{10} = 2\cdot 10+3 = 23$

⑵　$a_n = 30+(n-1)\cdot(-6) = -6n+36$

$a_{10} = -6\cdot 10+36 = -24$

⑶　初項 -1，公差 3　だから

$a_n = -1+(n-1)\cdot 3 = 3n-4$

$a_{10} = 3\cdot 10-4 = 26$

⑷　初項20，公差 -7　だから

$a_n = 20+(n-1)\cdot(-7) = -7n+27$

$a_{10} = -7\cdot 10+27 = -43$

練習 7

⑴　第 n 項は　$a_n = 29 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 32$

よって，$-3n + 32 = -13$　より　$n = 15$

したがって，-13 は　第 15 項

⑵　$a_n = -3n + 32 < 0$　より　$n > \dfrac{32}{3} = 10.6\cdots$　　よって，第11項

⑶　$a_n = -3n + 32 = 4$　より　$n = \dfrac{28}{3} = 9.3\cdots$

$a_n = 4$ を満たす自然数がないから 4 はこの数列の項になっていない。

練習 8

初項を a，公差を d とすると

⑴　$\begin{cases} a_3 = a + 2d = -1 & \cdots① \\ a_6 = a + 5d = 5 & \cdots② \end{cases}$

①，②を解いて，$a = -5$，$d = 2$

よって　$a_n = -5 + (n-1)\cdot 2 = 2n - 7$

⑵　$\begin{cases} a_2 = a + d = 5 & \cdots① \\ a_7 = a + 6d = -10 & \cdots② \end{cases}$

①，②を解いて，$a = 8$，$d = -3$

$a_n = 8 + (n-1)(-3) = -3n + 11$

練習 9

（ $\Longrightarrow$ について）

a，b，c がこの順で等差数列のとき

$b - a = c - b$　ゆえに　$2b = a + c$

（ $\Longleftarrow$ について）

逆に，$2b = a + c$　のとき

$b - a = c - b$　となり，$b - a$　と　$c - b$　の差が等しいから等差数列となる。

練習 10

$2(a + 6) = a^2 + 4$　より

$a^2 - 2a - 8 = 0$

$(a - 4)(a + 2) = 0$

$\therefore\ a = 4,\ -2$

練習 11

⑴　初項 1，末項 29，項数 10 だから　$S_{10} = \dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot(1 + 29) = 150$

⑵　初項 3，公差 4，項数 15 だから　$S_{15} = \dfrac{1}{2}\cdot 15\cdot\{2\cdot 3 + (15 - 1)\cdot 4\}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 15\cdot 62 = 465$

練習 12

初項 16，公差 -4 だから，第 n 項までの和は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 16+(n-1)\cdot(-4)\}=-20$$

ゆえに　$n^2-9n-10=0$

$$(n-10)(n+1)=0$$

$$\therefore\quad n=10,\ -1$$

n は自然数だから　$n=10$　よって，初項から第 10 項までの和

練習 13

2，4，6，…，$2n$ は初項 2，公差 2，項数 n の等差数列である。

よって，その和は　$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 2+(n-1)\cdot 2\}$

$$=\frac{1}{2}n(2n+2)=n(n+1)$$

（別解）

$$2+4+6+\cdots+2n=2(1+2+3+\cdots+n)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$$

練習 14

(1)　初項 1，公比 -5

(2)　初項 96，公比 $\frac{1}{2}$

練習 15

(1)　$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$a_7=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{3}{64}$

(2)　初項 1，公比 -3 だから

$a_n=1\cdot(-3)^{n-1}=(-3)^{n-1}$，$a_7=(-3)^6=729$

(3)　初項 2，公比 $-\frac{3}{2}$ だから

$a_n=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，$a_7=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^6=\frac{729}{32}$

(4)　初項 $0.1=\frac{1}{10}$，公比 $0.1=\frac{1}{10}$ だから

$a_n=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\frac{1}{10^n}$，$a_7=\frac{1}{10^7}$

練習 16

(1)　一般項は　$a_n=2\cdot 3^{n-1}$ だから

$2\cdot 3^{n-1}=54$ より $3^{n-1}=27=3^3$

$n-1=3$　$\therefore\ n=4$

よって，54 は第 4 項

(2)　$a_n=2\cdot 3^{n-1}>400$ より $3^{n-1}>200$

$3^4=81$，$3^5=243$ であるから　$n-1=5$　$\therefore\ n=6$

よって，第 6 項

練習 17

初項を a ，公比を r とすると

$a_3 = ar^2 = 27$ …①

$a_6 = ar^5 = 1$ …②

②÷①より $\dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{1}{27}$ ∴ $r^3 = \dfrac{1}{27}$ より $r = \dfrac{1}{3}$

①に代入して，$a \cdot \dfrac{1}{9} = 27$ より $a = 243$ よって，$a_n = 243 \cdot \left(\dfrac{1}{3} \right)^{n-1}$

練習 18

（ $\Longrightarrow$ について）

a, b, c がこの順に等比数列のとき，この等比数列の公比を r とすると

$b = ar,\ c = br = ar^2$ と表すことができる。これを用いると

$b^2 = (ar)^2 = a^2r^2 = a \cdot (ar^2) = ac$

（ $\Longleftarrow$ について）

逆に，$b^2 = ac$ のとき $b \cdot b = ac$ より $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$

b と a，c と b の比が等しいことから a, b, c はこの順に等比数列である。

練習 19

$(b+2)^2 = 9b$ より

$b^2 - 5b + 4 = 0$

$(b-1)(b-4) = 0$

∴ $b = 1,\ 4$

練習 20

⑴ $S_n = \dfrac{1 \cdot (4^n - 1)}{4-1} = \dfrac{1}{3}(4^n - 1)$

⑵ $S_n = \dfrac{3 \cdot \{1 - (-2)^n\}}{1+2} = 1 - (-2)^n$

⑶ 初項を a ，公比を r とすると

$ar^2 = 18$ …①

$ar^5 = 486$ …②

②÷①より $\dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{486}{18}$ ゆえに $r^3 = 27$ より $r = 3$

①に代入して，$a = 2$ よって，$S_n = \dfrac{2(3^n - 1)}{3-1} = 3^n - 1$

⑷　4, 8, 16, ……

初項4,　公比2　だから

$$S_n=\frac{4\left(2^n-1\right)}{2-1}=4\left(2^n-1\right)$$

⑸　$S_n=\dfrac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

⑹　$S_n=\dfrac{3\left\{1-\left(-2\right)^n\right\}}{1-\left(-2\right)}=1-\left(-2\right)^n$

練習 21

⑴　$1^2+2^2+3^2+\cdots+50^2$

$=\dfrac{1}{6}\cdot 50\cdot\left(50+1\right)\cdot\left(2\cdot 50+1\right)$

$=\dfrac{1}{6}\cdot 50\cdot 51\cdot 101$

$=42925$

⑵　$1^2+2^2+3^2+\cdots+\left(n-1\right)^2$

$=\dfrac{1}{6}\cdot\left(n-1\right)\cdot\left\{\left(n-1\right)+1\right\}\left\{2\left(n-1\right)+1\right\}$

$=\dfrac{1}{6}\left(n-1\right)n\left(2n-1\right)$

$=\dfrac{1}{6}n\left(n-1\right)\left(2n-1\right)$

練習 22

⑴　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3k=3+6+9+\cdots+3n$

⑵　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\left(7-2k\right)=5+3+1-1-3$

⑶　$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}2^k=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10}$

⑷　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot 5^{k-1}=2\cdot 5^0+2\cdot 5^1+2\cdot 5^2+\cdots+2\cdot 5^{n-1}$

$=2+2\cdot 5+2\cdot 5^2+\cdots+2\cdot 5^{n-1}$

⑸　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\left(k-1\right)^2=0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2$

⑹　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3\cdot 2^{k-1}=3\cdot 2^0+3\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+3\cdot 2^{n-2}$

練習 23

⑴　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\left(3k+1\right)=4+7+10+13+16$

$\displaystyle\sum_{i=2}^{6}\left(3i-2\right)=4+7+10+13+16$

よって, $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\left(3k+1\right)=\sum_{i=2}^{6}\left(3i-2\right)$

⑵　$\displaystyle\sum_{k=5}^{10}k^2=5^2+6^2+\cdots+10^2$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{4}k^2=\left(1^2+2^2+\cdots+10^2\right)-\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)$

$=5^2+6^2+\cdots+10^2$

よって　$\displaystyle\sum_{k=5}^{10}k^2=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{4}k^2$

練習 24

⑴ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k-3)$　　⑵ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}$

⑶ 一般項は $a_n=10^{n-1}$ で初項から第 100 項までの和だから

$$\sum_{k=1}^{100}10^{k-1}\quad\left(\sum_{k=0}^{99}10^{k},\ \sum_{i=1}^{100}10^{i-1}\quad \text{などもある}\right)$$

⑷ 一般項は $a_n=n(n+2)$

初項から 10 項までの和だから

$$\sum_{k=1}^{10}k(k+2)$$

練習 25

⑴ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=n(n+2)$

⑵ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-2k)=3\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)-2\}=\frac{1}{2}n(n+1)(2n-1)$$

⑶ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k^2-6)=\sum_{k=1}^{n}k^3-6\sum_{k=1}^{n}k=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)-12\}=\frac{1}{4}n(n+1)(n+4)(n-3)$$

⑷ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3^k-2^k)=\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{2(2^n-1)}{2-1}=\frac{3^{n+1}-3}{2}-(2^{n+1}-2)=\frac{1}{2}(3^{n+1}-2^{n+2}+1)$

⑸ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)=4\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1=4\cdot\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)$

$$=2n^2-n-1\quad(n\geqq 2)$$

⑹ $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}k^2=\frac{1}{6}2n(2n+1)(4n+1)$

練習 26

第 k 項は $a_n=k(3k+1)$ だから

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(3k+1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1+1)=n(n+1)^2$$

練習 27

第 k 項は　$a_k=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$　だから

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

練習 28

(1)
$a_1=2$
$a_2=2a_1=4$
$a_3=2a_2=8$
$a_4=2a_3=16$
$a_5=2a_4=32$

(2)
$a_1=1$
$a_2=a_1+1+1=3$
$a_3=a_2+2+1=6$
$a_4=a_3+3+1=10$
$a_5=a_4+4+1=15$

練習 29

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+n$　より
$a_2=a_1+1=2+1$
$a_3=a_2+2=2+1+2$
$a_4=a_3+3=2+1+2+3$
$\vdots$
$a_n=a_{n-1}+n-1=2+1+2+3+\cdots+(n-1)$
$=2+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+2$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+1$　より
$a_2=2a_1+1=2\cdot1+1=2+1$
$a_3=2a_2+1=2(2+1)+1=2^2+2+1$
$a_4=2a_3+1=2(2^2+2+1)+1=2^3+2^2+2+1$
$\vdots$
$a_n=2a_{n-1}+1=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1$
$=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$

練習 30

(1) 与えられた等式を①とおく。

（Ⅰ）　$n=1$　のとき
（左辺）$=2$,（右辺）$=1\cdot(1+1)=2$　よって，$n=1$ のとき①が成り立つ。

（Ⅱ）　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると
$2+4+6+\cdots+2k=k(k+1)$　…②
$n=k+1$ のとき，①の左辺を，②を用いて変形すると

$$2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)=k(k+1)+2(k+1)$$
$$=(k+1)(k+2)$$

したがって，$n=k+1$　のときも①が成り立つ。
（Ⅰ），（Ⅱ）により，すべての自然数 n について与えられた式は成り立つ。

⑵　与えられた等式を①とおく。

（Ⅰ）　$n=1$ のとき

$(\text{左辺})=1\cdot 1=1$, $(\text{右辺})=(1-1)\cdot 2^1+1=1$

よって，$n=1$ のとき①が成り立つ。

（Ⅱ）　$n=k$ のとき，①が成り立つとすると

$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\cdots+k\cdot 2^{k-1}=(k-1)\cdot 2^k+1$ ……②

$n=k+1$ のとき①の左辺を，②を用いて変形すると

$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\cdots+k\cdot 2^{k-1}+(k+1)\cdot 2^k$

$=(k-1)\cdot 2^k+1+(k+1)\cdot 2^k$

$=2k\cdot 2^{k+1}=k\cdot 2^{k+1}+1$

したがって，$n=k+1$ のときにも成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）により，すべての自然数 n について与えられた等式は成り立つ。

練習 31

⑴　与えられた不等式を①とおく。

（Ⅰ）　$n=3$ のとき　　$(\text{左辺})=2^3=8$

$(\text{右辺})=2\cdot 3+1=7$

よって，$n=3$ のとき①が成り立つ。

（Ⅱ）　$n=k$（$k \geqq 4$）のとき，①が成り立つと仮定すると

$2^k>2k+1$ ……②

$n=k+1$ のとき，①の左辺を②を用いて変形すると

$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2(2k+1)$

$=4k+2=2k+2+2k$

$>2(k+1)+1$

よって，$2^{k+1}>2(k+1)+1$

したがって，$n=k+1$ のときも①が成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）により，3 以上のすべての自然数 n について与えられた不等式は成り立つ。

⑵　与えられた不等式を①とおく

（Ⅰ）　$n=3$ のとき

$(\text{左辺})=3^2=9$,（右辺）$=1+2+3=6$

よって，$n=3$ のとき①が成り立つ。

（Ⅱ）　$n=k$（$k \geqq 4$）のとき，①が成り立つと仮定すると

$k^2>1+2+3+\cdots+k$ ……②

$n=k+1$ のとき，①の左辺を②を用いて変形すると

$$\begin{aligned}(k+1)^2=k^2+2k+1&>(1+2+3+\cdots+k)+2k+1\\&=1+2+3+\cdots+k+(k+1)+k\\&>1+2+3+\cdots+(k+1)\end{aligned}$$

よって，$(k+1)^2>1+2+3+\cdots+(k+1)$

したがって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）により，3 以上のすべての自然数 n について与式は成り立つ。

⑶　与えられた不等式を①とおく。

（Ⅰ）　$n=3$ のとき

$(\text{左辺})=3^3=27$,（右辺）$=1^2+2^2+3^2=14$

よって，$n=3$ のとき①が成り立つ。

（Ⅱ）　$n=k$（$k \geqq 4$）のとき，①が成り立つとすると

$k^3>1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2$ ……②

$n=k+1$ のとき，①の左辺を②を用いて変形すると

$$\begin{aligned}(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1&>(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)+3k^2+3k+1\\&=1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2+2k^2+k\\&>1^2+2^2+3^2+\cdots+(k+1)^2\end{aligned}$$

よって，$(k+1)^3>1^2+2^2+3^2+\cdots+(k+1)^2$

したがって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）により，3 以上の自然数 n について与式は成り立つ。

節末問題

1.

⑴　初項を a，公差を d とすると

$$\frac{10}{2}(2a+9d)=140 \quad \therefore \quad 2a+9d=28 \qquad \cdots①$$

$$\frac{20}{2}(2a+19d)=140+540 \quad \therefore \quad 2a+19d=68 \quad \cdots②$$

①，②を解いて　初項 -4，公差 4

⑵　$\frac{30}{2}\{2\cdot(-4)+29\cdot4\}-(140+540)=15\cdot108-680=940$

2.　$a_n=50+(n-1)\cdot(-4)=-4n+54$

$a_n \geqq 0$　となる n の値を求める。

$a_n=-4n+54>0$　より　$n<13.5$

よって，第 13 項までの和が最大になる。

また，このときの和は

$$\frac{13}{2}\{2\cdot50+12\cdot(-4)\}=\frac{13}{2}\cdot52=338$$

（別解）

$a_1=50,\ a_{13}=-4\cdot13+54=2$　だから

$$\frac{1}{2}\cdot13\cdot(50+2)=338$$

3.

⑴　初項を a とすると　$S_6=\frac{a(3^6-1)}{3-1}=364$　より　$364a=364$　$\therefore$　$a=1$

また　$S_n=\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}=\frac{3^n-1}{2}$

⑵　初項を a，公比を r とすると

$a+ar+ar^2=14\cdots①$

$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5=-364\cdots②$

$(a+ar+ar^2)+r^3(a+ar+ar^2)=-364$

として，①を代入すると　$14+14r^3=-364$

$14r^3=-378$　$\therefore$　$r^3=-27$

r　は実数より　$r=-3$

①に代入して　$a=2$　　よって，初項 2，公比 -3

4.　等比数列をなす 3 つの数を a，ar，ar^2 とすると

$$a + ar + ar^2 = 13 \quad \cdots ①$$

$$a \cdot ar \cdot ar^2 = 27 \quad \cdots ②$$

②より　$a^3 r^3 = 27$　だから　$(ar)^3 = 3^3$　$\therefore$　$ar = 3$

$a = \dfrac{3}{r}$　として①に代入　$\dfrac{3}{r} + 3 + 3r = 13$

$$3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$(3r - 1)(r - 3) = 0 \quad \therefore \quad r = \frac{1}{3},\ 3$$

$r = \dfrac{1}{3}$ のとき，$a = 9$　で3つの数は　9，3，1

$r = 3$ のとき，$a = 1$　で3つの数は　1，3，9

よって，求める3数は　1，3，9

5.　$\dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \dfrac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} = \dfrac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{k - (k+1)} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

$$\sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{80} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \right)$$

$$= \left(\sqrt{2} - 1 \right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2} \right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3} \right) + \cdots + \left(\sqrt{81} - \sqrt{80} \right)$$

$$= -1 + \sqrt{81} = 9 - 1 = 8$$

6.

⑴　2，6，10，14，……，190　$\cdots ①$

　8，14，20，　……，200　　$\cdots ②$

とすると　①の公差は 4，②の公差は 6

共通項の初項は 14 で，公差は 4 と 6 の最小公倍数の 12 だから，共通項を a_n とすると

一般項は　$a_n = 14 + (n-1) \cdot 12 = 12n + 2$

$$12n + 2 \leqq 190 \text{　より　} n \leqq 15.6\cdots$$

よって，末項は　$a_{15} = 12 \cdot 15 + 2 = 182$

⑵　初項 14，末項 182，項数 15 だから　$\dfrac{15(14 + 182)}{2} = 1470$

7.　10 から 99 までの自然数だから

⑴　3 の倍数は 12，15，18，…，99 である。

初項 12，公差 3 だから項数は

$a_n = 12 + (n - 1) \cdot 3 = 99$　より　$3n = 90$　$\therefore n = 30$

よって　$S = \dfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot (12 + 99) = 1665$

⑵　7で割ると2余る数は　16，23，30，…　となる。

これは，初項16，公差7の等差数列だから一般項は

$a_n = 16 + (n-1)\cdot 7 = 7n + 9$

$7n + 9 < 100$　より　$n < 13$

これを満たす最大の自然数 n は12

よって　$S = \frac{1}{2}\cdot 12\{2\cdot 16 + (12-1)\cdot 7\} = 654$

（別解）

7で割ると2余る数は $7k+2$ と表せる。

$9 < 7\mathrm{k} + 2 < 100$　より　$1 < \mathrm{k} < 14$

これより　$2 \leqq k \leqq 13$　だから

初項は　$k = 2$　のとき　16

末項は　$k = 13$　のとき　93

項数は　$13 - 1 = 12$

よって　$S = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot(16 + 93) = 654$

8.

⑴　第 k 項　a_k　は　$a_k = k(k+1)(k+2)$　だから，求める和を S_n とすると

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n}(k^3 + 3k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1) + 2(2n+1) + 4\} = \frac{1}{4}n(n+1)(n^2 + 5n + 6)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

⑵　第 k 項　a_k　は　$a_k = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1} = \frac{1\cdot(2^k - 1)}{2-1} = 2^k - 1$

だから，求める和を S_n とすると

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2^k - 1) = \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{2(2^n - 1)}{2-1} - n = 2^{n+1} - n - 2$$

9.

⑴　第 k 項　a_k　は　$a_k=k\{n-(k-1)\}=k(n-k+1)$ と表せるから，和を S とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{3(n+1)-(2n+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

⑵　第 k 項　a_k　は　$a_k=\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\dfrac{1}{\dfrac{k(k+1)}{2}}=\dfrac{2}{k(k+1)}$

求める和を S とすると

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$$

10.

⑴　与えられた等式を①とおく。

（Ⅰ）$n=1$ のとき

（左辺）$=1$,　（右辺）$=\left(\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2\right)^2=1$　　よって，$n=1$ のとき①が成り立つ。

（Ⅱ）$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2\cdots②$$

$n=k+1$ のとき，①の左辺を②を用いて変形すると

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2=\left\{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right\}^2$$

したがって，$n=k+1$ のときにも成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）により，①はすべての自然数 n について成り立つ。

⑵　与えられた不等式を①とする。

（Ⅰ）$n=4$ のとき

（左辺）$=2^4=16$，（右辺）$=4^2=16$　　よって，$n=4$ のとき①が成り立つ。

（Ⅱ）$n=k\left(k \geqq 5\right)$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$2^k \geqq k^2$　…②　　この両辺に 2 を掛けると　　$2^{k+1} \geqq 2k^2$

ここで，$2k^2-\left(k+1\right)^2=k^2-2k-1$

$=\left(k-1\right)^2-2>0$　　（$\because$ $k \geqq 4$）

だから　　　　$2k^2>\left(k+1\right)^2$

よって，$n=k+1$ のときも①が成り立つ。

したがって　　$2^{k+1}>\left(k+1\right)^2$

（Ⅰ），（Ⅱ）より，4 以上のすべての自然数 n について①が成り立つ。

11.

⑴　$a_1=s_1=3-4+5=4$

⑵　$n \geqq 2$ のとき

$a_n=s_n-s_{n-1}$

$=3n^2-4n+5-\left\{3\left(n-1\right)^2-4\left(n-1\right)+5\right\}$

$=3n^2-4n+5-\left(3n^2-6n+3-4n+4+5\right)$

$=6n-7$

これは $n=1$ のとき $6-7=-1$

よって，$\begin{cases} a_1=4 \\ a_n=6n-7 \quad (n \geqq 2) \end{cases}$

12.

⑴　$a_{n+1}-\alpha=3\left(a_n-\alpha\right)$ より　$a_{n+1}=3a_n-2\alpha$

$-2\alpha=-2$ だから $\alpha=1$

⑵　$a_{n+1}-1=3\left(a_n-1\right)$ より　$b_n=a_n-1$ とおくと

$b_{n+1}=3b_n$, $b_1=a_1-1=2-1=1$

数列 $\left\{b_n\right\}$ は初項 1 ，公比 3 の等比数列だから

$b_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$

⑶　$b_n=a_n-1$ より　$a_n-1=3^{n-1}$

$\therefore$　$a_n=3^{n-1}+1$

13.

⑴　漸化式に $n=1,\ 2,\ 3$ を代入すると

$n=1$ のとき　$1\cdot a_2=2a_1+1=3$　$\therefore\ a_2=3$

$n=2$ のとき　$2\cdot a_3=3a_2+1=3\cdot3+1=10$　$\therefore\ a_3=5$

$n=3$ のとき　$3\cdot a_4=4a_3+1=4\cdot5+1=21$　$\therefore\ a_4=7$

これより，一般項は　$a_n=2n-1$　…①　と推定できる。

⑵　（Ⅰ）$n=1$ のとき，①は $a_1=2\cdot1-1=1$ となり成り立つ。

（Ⅱ）$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると　$a_k=2k-1$　…②

$n=k+1$ のとき，漸化式と②を用いて

$ka_{k+1}=(k+1)a_k+1=(k+1)(2k-1)+1=2k^2+k$

$\therefore\ a_{k+1}=2k+1=2(k+1)-1$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）より，すべての自然数 n について　$a_n=2n-1$ が成り立つ。