１章　数列　解答

２節　数列の極限

練習１

⑴　0 に収束

⑵　負の無限大に発散（$-\infty$）

⑶　正の無限大に発散（∞）

⑷　発散（振動）

練習２

⑴　正の無限大に発散（∞）

⑵　負の無限大に発散（$-\infty$）

⑶　負の無限大に発散（$-\infty$）

⑷　発散（振動）

練習３

⑴　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}-1\right)\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=-1\times 2=-2$

⑵　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right\}=0+0=0$

練習４

⑴　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}=2$

⑵　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-1}{1-\frac{3}{n^2}}=-1$

⑶　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}=0$

練習５

⑴　与式 $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{2}{n^2}\right)=\infty$

⑵　与式 $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3+\frac{1}{n^2}}=\infty$

⑶　与式 $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$

⑷　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^3+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{3}{2}$

練習６

⑴　公比　$r=3$　より　$|r|>1$　だから∞に発散

⑵　公比　$r=-2$　だから発散（振動）

⑶　公比　$r=-\dfrac{2}{3}$　より　$|r|<1$　だから 0 に収束

⑷　公比　$r=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　より　$|r|<1$　だから 0 に収束

練習７

⑴　与式$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\infty$

⑵　与式$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=0$

⑶　与式$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{5+\frac{4}{5^n}}=\frac{1}{5}$

練習８

⑴　$-1<\frac{x}{2}\leqq 1$　より　$-2<x\leqq 2$

$\frac{x}{2}=1$ すなわち $x=2$ のとき極限値 1

$-1<\frac{x}{2}<1$ すなわち $-2<x<2$ のとき極限値 0

⑵　$-1<x^2-2\leqq 1$　より　$x^2\leqq 3$　かつ　$1<x^2$

$x^2\leqq 3$　から　$-\sqrt{3}\leqq x\leqq\sqrt{3}$

$x^2>1$　から　$x<-1,\ 1<x$

よって，$-\sqrt{3}\leqq x<-1,\ 1<x\leqq\sqrt{3}$

$x^2-2=1$　すなわち　$x=\pm\sqrt{3}$　のとき極限値 1

$-1<x^2-2<1$　すなわち　$-\sqrt{3}<x<-1,\ 1<x<\sqrt{3}$　のとき極限値 0

練習９　$a_n=\frac{2r^n}{1+r^n}$　とおく。

⑴　$r>1$　のとき　$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$　より　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{2}{0+1}=2$

⑵　$r=1$　のとき　$\lim_{n\to\infty}r^n=1$　より　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2\cdot 1}{1+1}=1$

⑶　$|r|<1$　のとき　$\lim_{n\to\infty}r^n=0$　より　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2\cdot 0}{1+0}=0$

⑷　$r<-1$　のとき　$|r|>1$　より　$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|r|^n=\infty$

よって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{2}{0+1}=2$

練習 10

⑴　部分和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}$$

したがって　$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$ から，収束し，その和は 1 である。

⑵　部分和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2n+1}-1\right)$$

したがって　$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{2n+1}-1\right)=\infty$　から，発散する。

練習 11

⑴　初項 1,　公比　$r=\frac{1}{2}$　より　$|r|<1$　であるから収束して，その和は　$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

⑵　初項 2,　公比　$r=-\frac{1}{\sqrt{2}}$　より　$|r|<1$　であるから収束して，その和は

$$\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=4-2\sqrt{2}$$

⑶　初項 4,　公比　$r=-\frac{3}{2}$　より　$|r|\geqq 1$　であるから発散する。

⑷　初項 1,　公比　$r=-1$　より　$|r|\geqq 1$　であるから発散する。

練習 12　初項 x，公比 $1-x$　より，

（i）初項　$x=0$　のとき，　収束して，　その和は 0

（ii）$|1-x|<1$　すなわち，$0<x<2$　のとき，収束して，その和は

$$\frac{x}{1-(1-x)}=\frac{x}{x}=1$$

練習 13

(1) $0.\dot{4}=0.4+0.04+0.004+\cdots\cdots$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{7}{10}}=\frac{4}{9}$$

(2) $0.\dot{6}\dot{3}=0.63+0.0063+0.000063+\cdots\cdots$

$$=\frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{63}{99}=\frac{7}{11}$$

(3) $0.4\dot{5}\dot{6}=0.4+0.056+0.00056+\cdots\cdots$

$$=0.4+\frac{\frac{56}{100}}{1-\frac{1}{100}}=0.4+\frac{56}{990}=\frac{2}{5}+\frac{28}{495}=\frac{226}{495}$$

練習 14

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ は初項1，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}}$ は初項1，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数で，$\left|\frac{1}{2}\right|<1$，$\left|\frac{1}{4}\right|<1$ だからともに収束する。

よって，$\displaystyle 与式=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n}}$ は初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9^{n}}$ は初項 $\frac{2}{9}$，公比 $\frac{1}{9}$ の無限等比級数で，$\left|\frac{1}{3}\right|<1$，$\left|\frac{1}{9}\right|<1$ だからともに収束する。

よって，$\displaystyle 与式=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9^{n}}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ は初項 $\frac{2}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の無限等比級数

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$ は初項 $-\frac{1}{2}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の無限等比級数で，$\left|\frac{2}{3}\right|<1$，$\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ だからともに収束する。

よって，$\displaystyle 与式=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}+\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

(4) $\displaystyle 与式=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3^{n}}{6^{n}}-\frac{(-2)^{n}}{6^{n}}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ は初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$ は初項 $-\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{3}$ の無限等比級数で，$\left|\frac{1}{2}\right|<1$，$\left|-\frac{1}{3}\right|<1$ だからともに収束する。

よって，$\displaystyle 与式=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

節末問題

1.

⑴ $-1 \leqq \cos\dfrac{n\pi}{3} \leqq 1$ より $-\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{3} \leqq \dfrac{1}{n}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ から

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3} = 0$$

⑵ 与式 $= \lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{5}{4}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 1} = -\infty$

⑶ 与式 $= \lim_{n\to\infty} 3^n\left\{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\} = \infty$

⑷ 与式 $= \lim_{n\to\infty}(-3)^n\left\{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n + 1\right\}$ より発散（振動)。

2.

⑴

$$a_n = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 1\ (n = 4k-3 \quad k \text{ は正の整数}) \\ 0\ (n = 4k-2 \quad\quad〃\quad) \\ -1\ (n = 4k-1 \quad\quad〃\quad) \\ 0\ (n = 4k \quad\quad〃\quad) \end{cases}$$

であるから，$n \to \infty$ のとき，数列 $\{a_n\}$ は発散（振動）する。

⑵ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\log_2\dfrac{4n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\log_2\dfrac{4+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} = \log_2 4 = 2$（収束）

⑶ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1) = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{2} = \dfrac{1}{2}$（収束）

⑷ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}}$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{2}$（収束）

3.

(1)　初項1，公比 $\frac{1}{5}$ より $|r|<1$ だから収束する。よって，$S=\dfrac{1}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{4}$

(2)　$S_n=1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{5^{n-1}}=\dfrac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{4}\left\{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right\}$

ここで　$S-S_n=\dfrac{5}{4}-\dfrac{5}{4}\left\{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right\}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$

したがって，条件から　$\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}<0.0001$　　　……①

ゆえに　$\left(\dfrac{2}{10}\right)^{n-1}<4\times10^{-4}$

両辺の常用対数をとって　$\log_{10}\left(\dfrac{2}{10}\right)^{n-1}<\log_{10}\left(4\times10^{-4}\right)$

$(n-1)(\log_{10}2-1)<2\log_{10}2-4$

$\log_{10}2=0.3010$ を代入して

$(n-1)\times(0.3010-1)<2\times0.3010-4$

$n-1>\dfrac{3.398}{0.699}=4.8\cdots$

$n>5.8\cdots$

n は自然数であるから　$n\geqq6$

（別解）

①より　$2500<5^{n-1}$

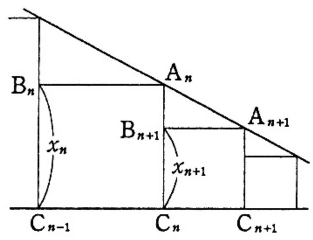
一方　$5^4=625,\quad 5^5=3125$

よって　$n-1\geqq5$

$n\geqq6$

4.　最初の正方形 $\mathrm{A_1\ B_1\ BC_1}$ を正方形 $\mathrm{A_1\ B_1\ C_0\ C_1}$ とし，n 番目につくられた正方形を正方形 $\mathrm{A}_n\ \mathrm{B}_n\ \mathrm{C}_{n\text{-}1}\ \mathrm{C}_n$，その一辺の長さを x_n とおくと

$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1}:\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}=1:2$　より　$(x_n-x_{n+1}):x_{n+1}=1:2$



よって　$x_{n+1}=\dfrac{2}{3}x_n$

$x_1=\dfrac{2}{3}$ であることから　$x_n=\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

したがって，求める面積の総和は

$S=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}^2+\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}^3+\cdots=\dfrac{4}{9}+\left(\dfrac{4}{9}\right)^2+\left(\dfrac{4}{9}\right)^3+\cdots$

$=\dfrac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\dfrac{4}{5}$

5.

⑴ $a_n=1+\dfrac{1}{n}$，$b_n=1-\dfrac{1}{n}$　とすると

$a_n>b_n$　であるが，$\lim_{n\to\infty}a_n=1$，$\lim_{n\to\infty}b_n=1$　だから

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$　となる。

⑵ $a_n=n+1$，$b_n=n$　とすると

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$，$\lim_{n\to\infty}b_n=60$　であるが

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-b_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n+1-n\right)=1\neq 0$　となる。

⑶ $a_n=2n$，$b_n=n$　とすると

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n}=2$　であるが

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-b_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2n-n\right)=\lim_{n\to\infty}n=\infty$　となり発散する。