２章　微分法　解答

３節　導関数の応用

練習１

⑴　$y'=2x$ より $x=2$ を代入して傾きは 4

$\therefore\ y-4=4(x-2)$

よって，$y=4x-4$

⑵　$y'=-3x^2$ より $x=-1$ を代入して傾きは -3

$\therefore\ y-1=-3(x+1)$

よって，$y=-3x-2$

⑶　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より $x=1$ を代入して傾きは $\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ y-1=\dfrac{1}{2}(x-1)$

よって，$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

⑷　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$ より $x=2$ を代入して傾きは $-\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}(x-2)$

よって，$y=-\dfrac{1}{4}x+1$

⑸　$y'=e^x$ より $x=0$ を代入して傾きは 1

$\therefore\ y-1=1\cdot(x-0)$

よって，$y=x+1$

⑹　$y'=\dfrac{1}{x}$ より $x=1$ を代入して傾きは 1

$\therefore\ y-0=1\cdot(x-1)$

よって，$y=x-1$

練習２

⑴　$f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2$ だから

$\dfrac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=f'(c)$，$-3<c<3$ より

$\dfrac{27+27}{6}=3c^2$

$c^2=3\quad\therefore\ c=\pm\sqrt{3}\quad(-3<c<3$ を満たす。)

⑵　$f(x)=\log x$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ だから

$\dfrac{f(e)-f(1)}{e-1}=f'(c)$，$1<c<e$ より

$\dfrac{\log e-\log 1}{e-1}=\dfrac{1}{c}$

$\therefore\ c=e-1\quad(1<c<e$ を満たす。)

練習３

$f(x)=e^x$ は $(-\infty,\ \infty)$で微分可能で連続であり，$f'(x)=e^x$ である。

区間［ a，b ］において，平均値の定理から

$\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=e^c$，$a<c<b$ 　となる c が存在する。

$a<c<b$ より $e^a<e^c<e^b$

よって，$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$

練習４

⑴ $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$ だから

$x=-3,\ 1$ で $f'(x)=0$ であり

$x<-3,\ 1<x$ のとき $f'(x)>0$

$-3<x<1$ 　のとき $f'(x)<0$

よって，関数 $f(x)$は

$x<-3,\ 1<x$ で増加

$-3<x<1$ 　で減少

⑵ $f'(x)=-3x^2-6x=-3x(x+2)$ だから

$x=0,\ -2$ で $f'(x)=0$ であり

$-2<x<0$ のとき $f'(x)>0$

$x<-2,\ 0<x$ のとき $f'(x)<0$

よって，関数 $f(x)$は

$-2<x<0$ で増加

$x<-2,\ 0<x$ で減少

⑶ $f(x)=3x^2-6x+5$

$\quad =3(x-1)^2+2>0$

よって，関数 $f(x)$ はすべての区間で増加する。

（ $f(x)$は常に増加するでもよい。）

(4) $f'(x)=4x^2-6x^3-4x=2x\left(2x^2-3x-2\right)=2x(x-2)(2x+1)$ だから

$x=0,\ 2,\ -\frac{1}{2}$ で $f'(x)=0$ であり

$-\frac{1}{2}<x<0,\ 2<x$ のとき $f'(x)>0$

$x<-\frac{1}{2},\ 0<x<2$ のとき $f'(x)<0$

よって，関数 $f(x)$ は

$-\frac{1}{2}<x<0,\ 2<x$ で増加

$x<-\frac{1}{2},\ 0<x<2$ で減少

練習５

(1) $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$ であるから

$x=-2,\ 0$ で，$f'(x)=0$ となり増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-1	↘	-5	↗

よって　$x=-2$ のとき極大となり　極大値は－1

$x=0$ のとき極小となり　極小値は－5

(2) $f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x-1)(x+1)$ であるから

$x=0,\ 1,\ -1$ で，$f'(x)=0$ となり増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↘	-1	↗	0	↘

よって　$x=-1,\ 1$ のとき極大となり　極大値は０

$x=0$ のとき極小となり　極小値は－1

練習６

⑴　$f'(x)=(1+x)e^x$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗

$x=-1$ のとき，極小値 $-\dfrac{1}{e}$

⑵　$f'(x)=\log x+1$

$x>0$　だから

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗

$x=\dfrac{1}{e}$ のとき，極小値 $-\dfrac{1}{e}$

練習７

⑴　$f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqq 0$

よって，$f(x)$ は極値をもたない。

⑵　$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0$

よって，$f(x)$ は極値をもたない。

⑶　$f'(x)=\cos x-1$，$-1\leqq\cos x\leqq 1$ より

$f'(x)\leqq 0$ であるから，$f(x)$ は極値をもたない。

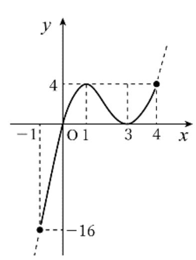
練習８

⑴　$f(x)=x^3-6x^2+9x\ (-1\leqq x\leqq 4)$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

したがって区間 $-1\leqq x\leqq 4$ における増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-16	↗	4	↘	0	↗	4



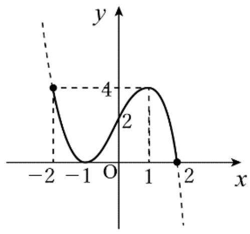
よって，$x=1,\ 4$ のとき最大値 4

$x=-1$ のとき最小値 -16

⑵　$f(x)=-x^3+3x+2\ \ (-2 \leqq x \leqq 2)$

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

したがって区間 $-2 \leqq x \leqq 2$ における増減表は次のようになる。



x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	0	↗	4	↘	0

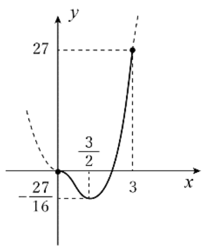
よって，$x=-2,\ 1$ のとき最大値 4

$x=-1,\ 2$ のとき最小値 0

⑶　$f(x)=x^4-2x^3\ \ (0 \leqq x \leqq 3)$

$f'(x)=4x^3-6x=2x^2(2x-3)$

したがって区間 $0 \leqq x \leqq 3$ における増減表は次のようになる。



x	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{27}{16}$	↗	27

よって，$x=3$ のとき最大値 27

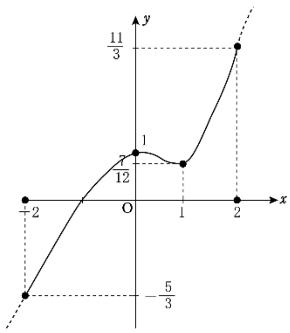
$x=\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{27}{16}$

⑷　$f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3-x^2+1\ \ (-2 \leqq x \leqq 2)$

$f'(x)=x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,\ 1,\ -2$

したがって区間 $-2 \leqq x \leqq 2$ における増減表は次のようになる。



x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{5}{3}$	↗	1	↘	$\frac{7}{12}$	↗	$\frac{11}{3}$

よって，$x=2$ のとき 最大値 $\dfrac{11}{3}$

$x=-2$ のとき 最小値 $-\dfrac{5}{3}$

練習 9

(1)　$f(x)=x-\sqrt{1-x^2}$

定義域は $1-x^2 \geqq 0$ から　$-1 \leqq x \leqq 1$

$f'(x)=1-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}}$

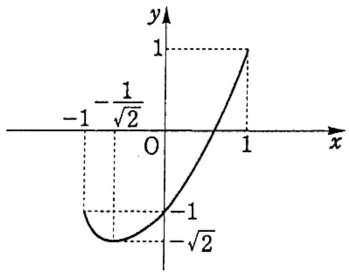
$f'(x)=0$ となるのは　$\sqrt{1-x^2}=-x$　……①

①の両辺を 2 乗して　$1-x^2=x^2$

$x^2=\dfrac{1}{2}$　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　①を満たす x は　$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	1



よって，$x=1$ のとき，最大値 1

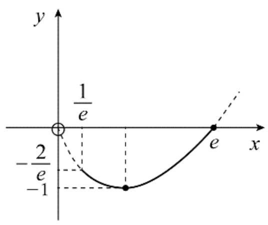
$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，最小値 $-\sqrt{2}$

(2)　$f(x)=x\log x-x\left(\dfrac{1}{e}\leqq x\leqq e\right)$

$f'(x)=\log x$

したがって区間 $\dfrac{1}{e}\leqq x\leqq e$ における増減表は次のようになる。

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2}{e}$	↘	-1	↗	0



よって，$x=e$ のとき 最大値 0

$x=1$ のとき 最小値 -1

(3)

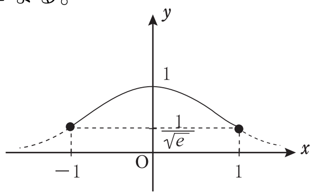
$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

$y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

$y' = 0$ とすると $x = 0$

したがって区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$

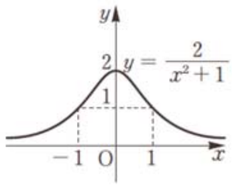


よって，$x = 0$ のとき 最大値 1　　$x = \pm 1$ のとき 最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

練習 10

(1) $y = \dfrac{2}{x^2+1}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	2	↘



$y' = -\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$x = 0$ のとき，極大値 2

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{x^2+1} = 0$ から x 軸が漸近線となる。

よって，グラフは右の図のようになる。

(2) $y = \dfrac{3-4x}{x^2+1}$

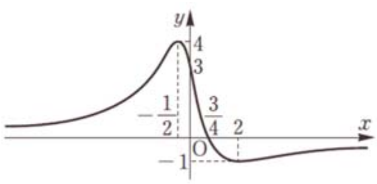
$y' = \dfrac{-4(x^2+1) - 2x(3-4x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(2x+1)(x-2)}{(x^2+1)^2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	4	↘	-1	↗

$x = -\dfrac{1}{2}$ のとき　極大値 4

$x = 2$ のとき　極小値 -1

また，$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3-4x}{x^2+1} = 0$　であるから，x 軸が漸近線である。



よって， グラフは右の図のようになる。

練習 11

⑴ $y=x+\dfrac{1}{x+1}$

定義域は　$x\neq-1$

$y'=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y	↗	-3	↘	／	↘	1	↗

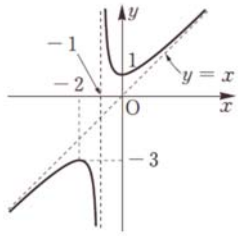
$x=-2$ のとき　極大値 -3

$x=0$ のとき　極小値 1

また $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x+1}=0$ より 直線 $y=x$が漸近線,

$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}y=\infty,\ \lim_{x\to-1-0}y=-\infty$ より $x=-1$が漸近線である。

よって，グラフは右の図のようになる。



⑵ $y=\dfrac{x^2-x-2}{x}$

定義域は　$x\neq0$

$y=x-1-\dfrac{2}{x}$　$y'=1+\dfrac{2}{x^2}$　極値はない。

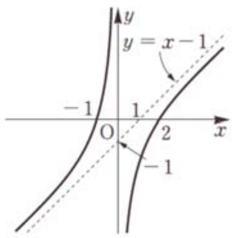
x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	／	$+$
y	↗	／	↗

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{y-(x-1)\}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{2}{x}\right)=0$

より，直線 $y=x-1$が漸近線

$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=-\infty,\ \lim_{x\to-0}y=\infty$ より，y 軸が漸近線である。

よって，グラフは右の図のようになる。



練習 12

⑴ $y=x^4-2x^3$

$y'=4x^3-6x^2$

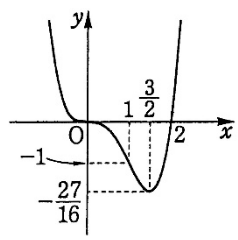
$y''=12x^2-12x=12x(x-1)$

より，曲線の凹凸は右の表のようになる。

よって，変曲点は　点 $(0,0)$, $(1,-1)$

である。

x	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下に凸	0	上に凸	-1	下に凸



⑵ $y=xe^x$

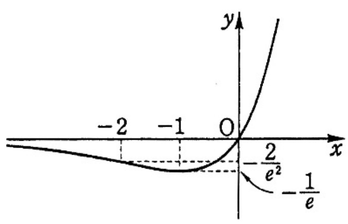
$y'=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(1+x)e^x$

$y''=1\cdot e^x+(1+x)\cdot e^x=(2+x)e^x$

より，曲線の凹凸は右の表のようになる。

よって，変曲点は　点 $\left(-2,-\dfrac{2}{e^2}\right)$

x	$x<-2$	-2	$-2<x$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	$-\dfrac{2}{e^2}$	下に凸



(3)　$y = \tan x\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$，$y'' = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$　より，曲線の凹凸は下の表のようになる。

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < x < 0$	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
y''		$-$	0	$+$	
y		上に凸	0	下に凸	

よって，変曲点は　点 $(0,\ 0)$　である。

練習 13

(1)　$y = x^4 - 2x^3$

$y' = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$

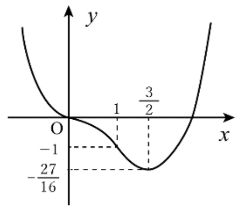
$y'' = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	0	↘	-1	↘	$-\frac{27}{16}$	↗

$x = \dfrac{3}{2}$　のとき，極小値　$-\dfrac{27}{16}$，極大値はない。

変曲点は　$(0,\ 0)$，$(1,\ -1)$

グラフは右の図のようになる。



(2)

$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

$y'' = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (x+1)(x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

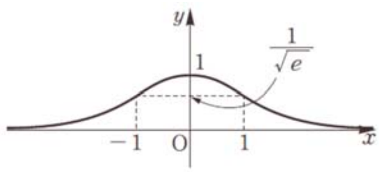
$x = 0$　のとき，極大値 1，極小値はない。

変曲点は　$\left(\pm 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$

$\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} y = 0$　より，x 軸が漸近線である。

偶関数よりグラフは y 軸に関して対称である。

以上より，グラフは右の図のようになる。



(3) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

定義域は　$x \neq \pm 1$

$$y' = \frac{1\cdot\left(x^2-1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = -\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$y'' = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	/	$-$	$-$	$-$	/	$-$
y''	$-$	/	$+$	0	$-$	/	$+$
y	↘	/	↘	0	↘	/	↘

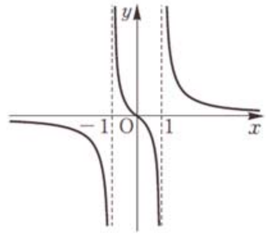
極値はない。変曲点は　$(0, 0)$

$\lim_{x\to\pm\infty} y = 0$　　$\lim_{x\to 1+0} y = \infty$　　$\lim_{x\to 1-0} y = -\infty$

$\lim_{x\to -1+0} y = \infty$　　$\lim_{x\to -1-0} y = -\infty$

より，x 軸，直線　$x = \pm 1$　が漸近線である。

以上より，グラフは上の図のようになる。



(4) $y = x - 2\sqrt{x}$

定義域は　$x \geqq 0$

$y' = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$　　　$y'' = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

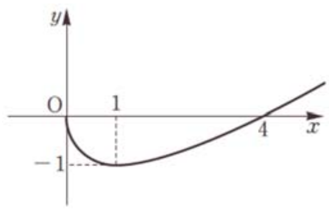
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	/	$-$	0	$+$
y''	/	$+$	$+$	$+$
y	0	↘	-1	↗

$x = 1$　のとき，極小値 -1

極大値，変曲点はない。

$\lim_{x\to +0} y' = -\infty$　より，$(0, 0)$ で y 軸と接している。

以上より，グラフは右の図のようになる。



練習 14

$y=\sqrt{1-x}$

$y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$ より $\left(t,\ \sqrt{1-t}\right)$ における接線の方程式は

$$y-\sqrt{1-t}=-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}(x-t)$$

この接線が x 軸および y 軸と交わる点を，それぞれ P，Q とすると

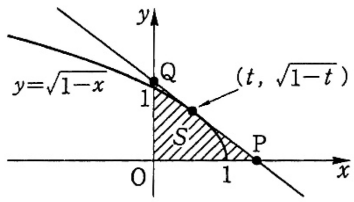
P$(2-t,\ 0)$，Q$\left(0,\ \dfrac{2-t}{2\sqrt{1-t}}\right)$ であるから，△OPQ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot(2-t)\cdot\frac{2-t}{2\sqrt{1-t}}=\frac{(2-t)^2}{4\sqrt{1-t}}$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{-2(2-t)\sqrt{1-t}-(2-t)^2\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}\right)}{4(1-t)}\quad=-\frac{(3t-2)(t-2)}{8(1-t)\sqrt{1-t}}$$

$0<t<1$ における増減表は次のとおり。

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$\frac{dS}{dt}$	/	$-$	0	$+$	/
S	/	↘	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↗	/



よって，$t=\dfrac{2}{3}$ のとき，最小値 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

練習 15

⑴ $f(x)=x-\log(1+x)$ とおくと $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{x+1}$

$x>0$ のとき $f'(x)>0$

したがって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

よって，$x>0$ のとき $f(x)>f(0)$

ここで $f(0)=0$ であるから $f(x)>0$

ゆえに $\log(1+x)<x$ （終）

⑵ $f(x)=x-\sin x$ とおくと $f'(x)=1-\cos x$

したがって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

よって，$x>0$ のとき $f(x)>f(0)$

ここで $f(0)=0$ であるから $f(x)>0$

よって $\sin x<x$ （終）

練習 16

$f(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$とおくと　$f'(x)=e^x-1-x$

例題10の結果から，$x>0$のとき　$e^x>1+x$であるから，$f'(x)>0$

したがって，$f(x)$は$x\geqq 0$で増加する。　よって，$x>0$のとき　$f(x)>f(0)$

ここで，$f(0)=0$であるから　$f(x)>0$　ゆえに　$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$　　（終）

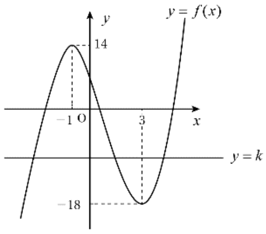
練習 17

⑴　方程式より　$x^3-3x^2-9x+9=k$

$f(x)=x^3-3x^2-9x+9$　とおくと

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	14	↘	-18	↗

$y=f(x)$と$y=k$　のグラフの共有点の個数を調べると，

求める異なる実数解の個数は

$-18<k<14$　のとき　3個

$k=14,\ -18$　のとき　2個

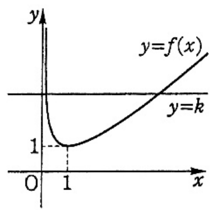
$k<-18,\ 14<k$　のとき 1個

⑵　方程式より$x-\log x=k$

$f(x)=x-\log x$とおくと　$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

よって，$f(x)$の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	1	↗



$\lim_{x\to+0} f(x)=\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-\log x)=\lim_{x\to\infty}\log\dfrac{e^x}{x}=\infty$

$y=f(x)$と$y=k$のグラフの共有点の個数を調べると，求める異なる実数解の個数は

$k>1$のとき 2個

$k=1$のとき 1個

$k<1$のとき 0個

(3)　$x=0$ は方程式の解ではないから $\dfrac{e^x}{x^2}=k$ と変形して調べる。

$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$

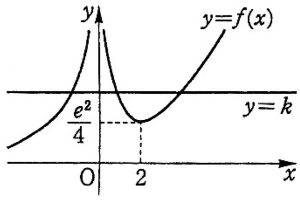
よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	/	↘	$\frac{e^2}{4}$	↗

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\infty$



$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフの共有点の個数を調べると, 求める異なる実数解の個数は

$k>\dfrac{e^2}{4}$ のとき　3 個

$k=\dfrac{e^2}{4}$ のとき　2 個

$0<k<\dfrac{e^2}{4}$ のとき　1 個

$k\leqq 0$ のとき　0 個

(4)　$x^2+1\neq 0$ だから方程式を $\dfrac{x}{x^2+1}=k$ と変形して調べる。

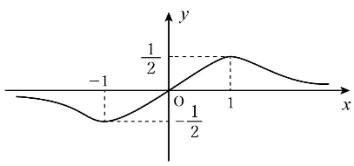
$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$



$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフの共有点の個数を調べると,

求める異なる実数解の個数は

$-\dfrac{1}{2}<k<0,\ 0<k<\dfrac{1}{2}$ のとき 2 個

$k=-\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}$ のとき 1 個

$k<-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}<k$ のとき 0 個

練習 18

$\left(\cos x\right)' = -\sin x$ であるから，h が 0 に近い値のとき

$\cos(a+h) \fallingdotseq \cos a + (-\sin a)h = \cos a - h\sin a$

これを用いて

$$\cos 31^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right) \fallingdotseq \cos\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{2} \fallingdotseq 0.8573$$

練習 19

⑴　$f(x) = \tan x$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

x が 0 に近い値のとき　$\tan x \fallingdotseq \tan 0 + \dfrac{1}{\cos^2 0}\cdot x = x$　よって　$\tan x \fallingdotseq x$

⑵　$f(x) = e^x$ とおくと　$f'(x) = e^x$

x が 0 に近い値のとき　$e^x \fallingdotseq e^0 + e^0\cdot x = 1 + x$　よって　$e^x \fallingdotseq 1 + x$

練習 20

⑴　$(1.0005)^{10} = (1+0.0005)^{10}$

$\fallingdotseq 1 + 10\times 0.0005 = 1.005$

⑵　$\sqrt[4]{10016} = \sqrt[4]{1.0016\times 10^4} = (1+0.0016)^{\frac{1}{4}}\times 10$

$\fallingdotseq \left(1+\dfrac{1}{4}\times 0.0016\right)\times 10 = 10.004$

練習 21

⑴　$v = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 - 3,\quad \alpha = \dfrac{dv}{dt} = 6t$

また，$t \geqq 0$　のとき

$v = 3t^2 - 3 < 0$　より　$0 < t < 1$

$v = 3t^2 - 3 > 0$　より　$t > 1$

よって，運動の向きが負から正に変わるのは　$t = 1$

⑵　$v = \dfrac{dx}{dt} = 6\cos 2t,\quad \alpha = \dfrac{dv}{dt} = -12\sin 2t$

また，$0 \leqq x \leqq \pi$　のとき

$v = 6\cos 2t < 0$　より　$\dfrac{\pi}{2} < 2t < \dfrac{3}{2}\pi$

$\therefore\quad \dfrac{\pi}{4} < t < \dfrac{3}{4}\pi$

$v = 6\cos 2t > 0$　より　$0 < 2t < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi < 2t < 2\pi$

$\therefore\quad 0 < t < \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi < t < \pi$

よって，運動が負から正に変わるのは　$t = \dfrac{3}{4}\pi$

練習 22

水を注ぎはじめてから t 秒後の水面の面積を S cm^2 とする。

$r:h=8:16$ より $r=\dfrac{1}{2}h$

よって $S=\pi r^2=\dfrac{1}{4}\pi h^2$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dt}\cdot\frac{dh}{dt}=\frac{1}{2}\pi h\cdot\frac{dh}{dt}$$

例題11より，$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{4}{9\pi}$ と $h=6$ を代入して $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{4}{3}$ (cm^2/秒)

（別解） $S=\dfrac{1}{4}\pi h^2$，$V=\dfrac{1}{12}\pi h^3$

$$\frac{dS}{dV}=\frac{\frac{dS}{dh}}{\frac{dV}{dh}}=\frac{\frac{1}{2}\pi h}{\frac{1}{4}\pi h^2}=\frac{2}{h}$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dV}\cdot\frac{dV}{dt}=\frac{2}{h}\cdot 4=\frac{8}{h}$$

$h=6$ を代入して $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{4}{3}$ (cm^2/秒)

節末問題

1.

(1) $y'=-\dfrac{8}{x^3}$ より $x=-2$ を代入して接線の傾きは 1

よって，接線の方程式は $y-1=x+2$ すなわち $y=x+3$

(2) $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ より $y'=2$ とすると $\cos x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ ゆえに $x=\dfrac{\pi}{4},\ -\dfrac{\pi}{4}$

よって，求める接線の方程式は接点が $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$ のとき $y-1=2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

すなわち $y=2x-\dfrac{\pi}{2}+1$

接点が $\left(-\dfrac{\pi}{4},\ -1\right)$ のとき $y+1=2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

すなわち $y=2x+\dfrac{\pi}{2}-1$

(3) $y=\dfrac{1}{x}$ より $y'=-\dfrac{1}{x^2}$

曲線上の点 $\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ における接線の方程式は $y-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{a^2}(x-a)$ ……①

①が点 $(4,\ -2)$ を通るとき $-2-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{a^2}(4-a)$

$a^2+a-2=0$ ゆえに $a=1,\ -2$

よって，求める接線の方程式は，①より

$a=1$ のとき $y=-x+2$ $a=-2$ のとき $y=-\dfrac{1}{4}x-1$

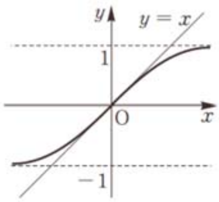
2.

⑴ $y' = \dfrac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \dfrac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} > 0$

よって，すべての実数 x において y は増加するから極値はなし。また

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$



であることから，

直線 $y = 1$, $y = -1$ が漸近線である。$f'(0) = 1$

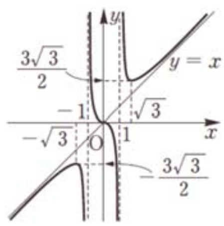
であることに注意してグラフをかくと右の図のようになる。

⑵ 定義域は　$x^2 - 1 \neq 0$　から　$x \neq \pm 1$

$y' = \dfrac{3x^2\left(x^2 - 1\right) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \dfrac{x^2\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$

よって，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y	↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	／	↘	0	↘	／	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗



$x = -\sqrt{3}$ のとき，極大値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$x = \sqrt{3}$ のとき，極小値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

また　$y = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$　より　$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(y - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$

したがって，直線 $y = x$ が漸近線である。　さらに

$\displaystyle\lim_{x\to1+0} y = \infty$,　$\displaystyle\lim_{x\to1-0} y = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-1+0} y = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-1-0} y = -\infty$

であり，$x = \pm 1$ も漸近線となることから，グラフは上の図のようになる。

3.

(1) $y = xe^{-x}$

$y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$y'' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$

よって，増減，凹凸は次の表のようになる。

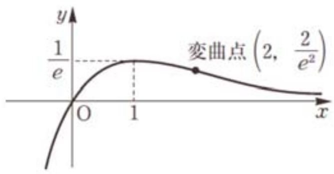
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$\frac{2}{e^2}$	$\searrow$

$x=1$ のとき　極大値 $\dfrac{1}{e}$

極小値はなし。 変曲点は $\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$

$\lim_{x\to\infty} y = 0$ より x 軸が漸近線である。また，$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

以上から，グラフは右の図のようになる。



(2) $y = (\log x)^2$

定義域は $x > 0$ 　 $y' = 2(\log x)\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}\log x$

$y'' = -\dfrac{2}{x^2}\log x + \dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{1}{x} = -\dfrac{2(\log x - 1)}{x^2}$

よって，増減，凹凸は次の表のようになる。

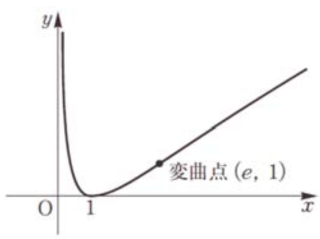
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	／	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	／	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$

$x=1$ のとき，極小値 0，極大値はなし。

変曲点は $(e,\ 1)$ 　$\lim_{x\to+0} y = \infty$ より y 軸が漸近線である。

また，$\lim_{x\to\infty} y = \infty$

以上から，グラフは右の図のようになる。



(3)　$y = x - 2\sin x$

$y' = 1 - 2\cos x$

$y' = 0$ となるのは　$\cos x = \dfrac{1}{2}$　$(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ から　$x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

$y'' = 2\sin x$

$y'' = 0$ となるのは　$x = 0, \pi, 2\pi$

よって，増減，凹凸の表は次のようになる。

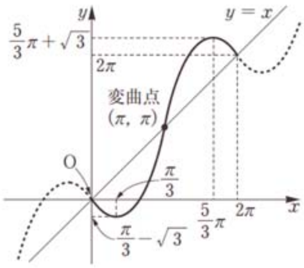
x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'	-1	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	-1
y''	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
y	0	↘	$\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	⤴	π	⤴	$\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$	↘	2π

表から　$x = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，極小値 $\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}$

$x = \dfrac{5}{3}\pi$ のとき，極大値 $\dfrac{5}{3}\pi + \sqrt{3}$

変曲点は $(\pi,\ \pi)$

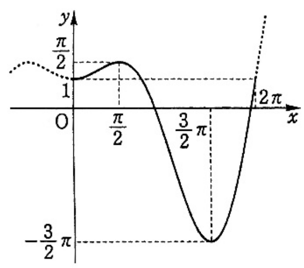
以上から，グラフは右の図のようになる。



4.　$y' = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$

$y' = 0$　となるのは　$x\cos x = 0$　$(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ より　$x = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
y	1	↗	$\dfrac{\pi}{2}$	↘	$-\dfrac{3}{2}\pi$	↗	1



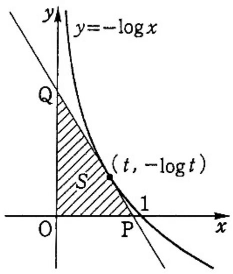
よって，増減表から

$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{\pi}{2}$

$x = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき，最小値 $-\dfrac{3}{2}\pi$

5.

$y' = -\dfrac{1}{x}$ より，点 $(t,\ -\log t)$ における接線の方程式は



$$y - (-\log t) = -\frac{1}{t}(x - t)$$

すなわち　$y = -\dfrac{1}{t}x + 1 - \log t$　……①

①と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ P，Q とすると

$\mathrm{P}(t(1-\log t),\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1-\log t)$

よって，△OPQ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\cdot t(1-\log t)\cdot(1-\log t) = \frac{1}{2}t(1-\log t)^2$$

これから　$\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}(1-\log t)^2 + \dfrac{1}{2}t\cdot 2(1-\log t)\cdot\left(-\dfrac{1}{t}\right)$

$$= \frac{1}{2}(1-\log t)^2 - (1-\log t) = \frac{1}{2}(\log t+1)(\log t-1)$$

$\dfrac{dS}{dt} = 0$ となるのは，$0 < t < 1$ より　$t = \dfrac{1}{e}$

よって，増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
S'	／	$+$	0	$-$	／
S	／	↗	$\frac{2}{e}$	↘	／

よって，$t = \dfrac{1}{e}$ のとき，最大値 $\dfrac{2}{e}$

6.

⑴　$f(x) = \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと　$f'(x) = -\sin x + x$　$f''(x) = 1 - \cos x$

ここで，$f''(x) \geqq 0$　（等号は $x = 2n\pi$，n は整数）

したがって，$f'(x)$ は $x \geqq 0$ で増加する。

$f'(0) = 0$ より　$x > 0$ のとき　$f'(x) > 0$

よって，$f(x)$ は $x \geqq 0$ で増加し，$f(0) = 0$ より　$f(x) > 0$

ゆえに　$1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x$　　（終）

⑵　$f(x) = \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)$ とおくと　$f'(x) = \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$

(1) の結果から $x > 0$ のとき　$f'(x) > 0$

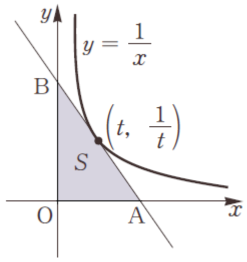
したがって，$f(x)$ は $x \geqq 0$ で増加する。

また，$f(0) = 0$ であるから　$f(x) > 0$　ゆえに　$x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x$　　（終）

7.

$y' = -\dfrac{1}{x^2}$ から，$y = \dfrac{1}{x}$ 上の任意の点 $\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ における接線の方程式は

$y - \dfrac{1}{t} = -\dfrac{1}{t^2}(x - t)$　すなわち　$y = -\dfrac{1}{t^2}x + \dfrac{2}{t}$



$x = 0$ とすると $y = \dfrac{1}{t}$，$y = 0$ とすると $x = 2t$ だから

$\mathrm{A}(2t, 0)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{2}{t}\right)$　$t > 0$ である。

よって，△OABの面積 S は

$S = \dfrac{1}{2}\cdot 2t \cdot \dfrac{2}{t} = 2$（一定）　　（終）

8.　$y = e^x$ より　$y' = e^x$　　$y = k\sqrt{x}$ より　$y' = \dfrac{k}{2\sqrt{x}}$

共有点の x 座標を $\alpha(\alpha > 0)$ とおくと

$e^{\alpha} = k\sqrt{\alpha}$ ……①

$e^{\alpha} = \dfrac{k}{2\sqrt{\alpha}}$ ……②　　① ÷ ② より　$1 = 2\alpha$

よって　$\alpha = \dfrac{1}{2}$　　これを①に代入して　　$\sqrt{e} = \dfrac{k}{\sqrt{2}}$　より　$k = \sqrt{2e}$

9.　$f(x) = \log(1 + x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと

$f'(x) = \dfrac{1}{1 + x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1 + x}$ から

$x > 0$ のとき　$f'(x) > 0$

したがって，$f(x)$ は $x \leqq 0$ で増加し，$f(0) = 0$ であるから，

$x > 0$ のとき　$f(x) > 0$

ゆえに　$x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1 + x)$　……①

次に，$g(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \log(1 + x)$ とおくと　$g'(x) = 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{1 + x} = \dfrac{x^3}{1 + x}$

したがって，$x > 0$ のとき　$g'(x) > 0$ となり，$g(x)$ は $x \geqq 0$ で増加する。

$g(0) = 0$ であるから　$x > 0$ のとき $g(x) > 0$

ゆえに　$\log(1 + x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$　……②

したがって，①，②より $x > 0$ のとき

$x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1 + x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$　　　（終）

10.

⑴ $f(x)=\sqrt{x}-\log x$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$

$f'(x)=0$ となるのは，$\sqrt{x}-2=0$ から　$x=4$

よって，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	$2-\log 4$	↗

ここで，$2-\log 4=\log\dfrac{e^2}{4}$ の値を調べると　$2<e<3$　から　$4<e^2<9$

よって　$1<\dfrac{e^2}{4}$　すなわち　$\log\dfrac{e^2}{4}>0$

したがって，$x>0$ のとき，$f(x)$ の最小値 $2-\log 4>0$ であるから　$f(x)>0$

ゆえに　$x>0$ のとき　$\log x<\sqrt{x}$

⑵ $x>1$ のとき，(1) の結果から　$0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$　より　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$

⑶ $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$y'=0$ となるのは，$1-\log x=0$ より　$x=e$

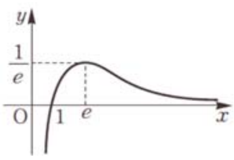
よって，増減表は右のようになる。

⑵の結果から x 軸が漸近線であり

$\lim\limits_{x\to+0}y=-\infty$ から y 軸も漸近線となる。

グラフは右の図のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
y'	／	$+$	0	$-$
y	／	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘



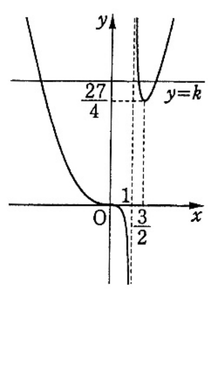
11.

⑴ $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$　より　$f'(x)=\dfrac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	／	↘	$\dfrac{27}{4}$	↗

また，$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\infty$　$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\infty$　$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=-\infty$

だから，直線 $x=1$　が漸近線で，グラフは右の図のようになる。



⑵　$x=1$ は $x^3=k(x-1)$ の解ではないから両辺を $x-1$ で割って $\dfrac{x^3}{x-1}=k$ として

$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフの共有点の個数から異なる実数解の個数は

$k>\dfrac{27}{4}$ のとき，3 個　$k=\dfrac{27}{4}$ のとき，2 個　$k<\dfrac{27}{4}$ のとき，1 個

12.　$x\fallingdotseq 0$ のとき，$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ だから

⑴　$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とすると　$f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$f(0)=1,\quad f'(0)=-1$

よって，$\dfrac{1}{1+x}\fallingdotseq 1-x$

⑵　$f(x)=\log(1+x)$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$　　$f(0)=0,\quad f'(0)=1$

$f(0)=0,\quad f'(0)=1$

よって，$\log(1+x)\fallingdotseq x$

13.　表面積を S，体積を V とすると $S=4\pi r^2$，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

これらを t で微分すると $\dfrac{ds}{dt}=8\pi r\dfrac{dr}{dt}$，$\dfrac{dv}{dt}=4\pi r^2\dfrac{dr}{dt}$

ここで，$\dfrac{dr}{dt}=0.1$　　$r=10$　であるから

$\dfrac{ds}{dt}=8\pi\times 10\times 0.1=$ 表面積 8π（cm^2 / sec）

$\dfrac{dv}{dt}=4\pi\times 10^2\times 0.1=$ 体積 40π（cm^3 / 秒）