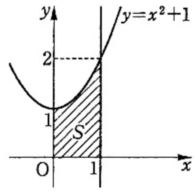
３章　積分法　解答

２節　積分法の応用

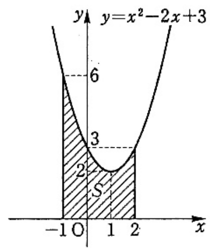
練習１

⑴　求める面積 S は



$$S=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

⑵　求める面積 S は

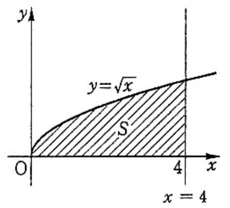


$$S=\int_{-1}^2\left(x^2-2x+3\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-1}^2$$

$$=\left(\frac{8}{3}-4+6\right)-\left(-\frac{1}{3}-1-3\right)=9$$

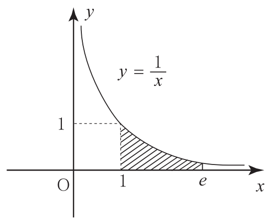
練習２

⑴　求める面積 S は



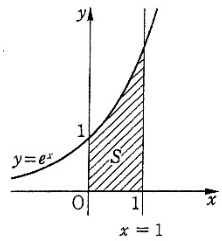
$$S=\int_0^4\sqrt{x}\ dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{16}{3}$$

⑵　求める面積 S は



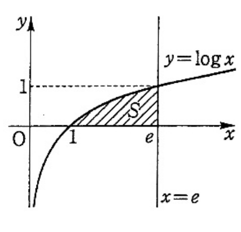
$$S=\int_1^e\frac{1}{x}\ dx=\left[\log x\right]_1^e=1$$

⑶　求める面積 S は



$$S=\int_0^1 e^x\ dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$$

⑷　求める面積 S は



$$S=\int_1^e x'\log x\,dx=\left[\ x\log x\ \right]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

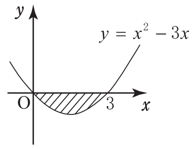
$$=e-\left[\ x\ \right]_1^e=e-\left(\ e-1\ \right)=1$$

練習３

⑴　放物線と直線の交点の x 座標は

$x^2-3x=0$　より　$x=0,\ 3$

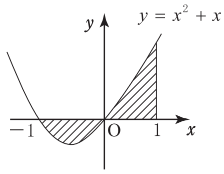
求める面積 S は



$$S=-\int_0^3\left(x^2-3x\right)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=-\left(9-\frac{27}{2}\right)=\frac{9}{2}$$

⑵　求める面積 S は



$$S=-\int_{-1}^0\left(x^2+x\right)dx+\int_0^1\left(x^2+x\right)dx$$

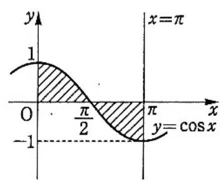
$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=1$$

⑶　求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\ dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^0$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)-\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)=2$$



練習４

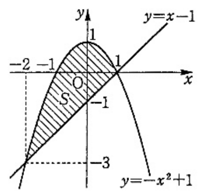
⑴　放物線と直線の交点の x 座標は

$-x^2+1=x-1$　より　$x=-2,\ 1$

また，区間 $-2\leqq x\leqq 1$ において $-x^2+1\geqq x-1$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^1\left\{\left(-x^2+1\right)-\left(x-1\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-2}^1\left(-x^2-x+2\right)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1=\frac{9}{2}$$



⑵　２つの放物線の交点の x 座標は

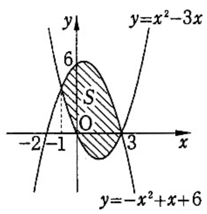
$x^2-3x=-x^2+x+6$　より　$x=-1,\ 3$

また，区間 $-1\leqq x\leqq 3$ において $x^2-3x\leqq -x^2+x+6$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^3\left\{\left(-x^2+x+6\right)-\left(x^2-3x\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^3\left(-2x^2+4x+6\right)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^3$$

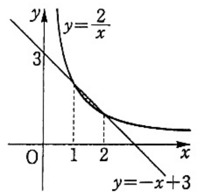
$$=\left(-18+18+18\right)-\left(\frac{2}{3}+2-6\right)=\frac{64}{3}$$



練習５

⑴　$\dfrac{2}{x} = -x + 3$　を解いて　$x = 1,\ 2$

よって，求める面積 S は右の図より



$$S = \int_1^2 \left(-x + 3 - \frac{2}{x} \right) dx$$

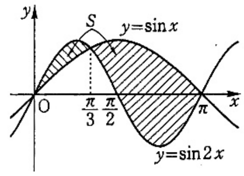
$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 3x - 2\log x \right]_1^2 = \left(-2 + 6 - 2\log 2 \right) - \left(-\frac{1}{2} + 3 \right)$$

$$= \frac{3}{2} - 2\log 2$$

⑵　$\sin x = \sin 2x$　を　$0 \leqq x \leqq \pi$　で解くと

$x = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi$

よって，求める面積 S は右の図より

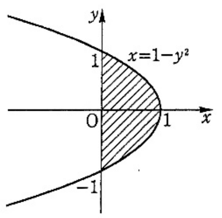


$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin 2x - \sin x \right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(\sin x - \sin 2x \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{5}{2}$$

練習６

⑴　求める面積 S は右の図より

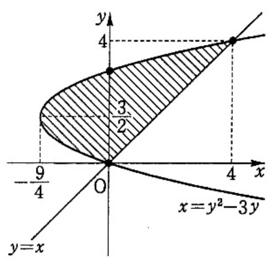


$$S = \int_{-1}^1 \left(1 - y^2 \right) dy = 2\int_0^1 \left(1 - y^2 \right) dy$$

$$= 2\left[y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

⑵　$x = y^2 - 3y,\ y = x$　を連立して y について解くと　$y = 0,\ 4$

よって，求める面積 S は右の図より

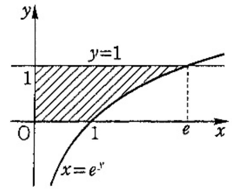


$$S = \int_0^4 \left\{ y - \left(y^2 - 3y \right) \right\} dy = \left[-\frac{y^3}{3} + 2y^2 \right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

練習７

$y = \log x$　を　$x = e^y$　と考えると求める面積 S は

右の図より　　$S = \displaystyle\int_0^1 e^y\, dy = \left[e^y \right]_0^1 = e - 1$



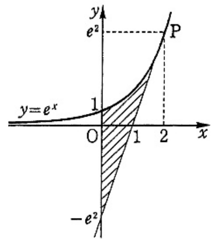
練習 8

$y' = e^x$ より，点P$\left(2,\ e^2\right)$における接線の方程式は

$$y - e^2 = e^2(x-2)$$

すなわち　　$y = e^2(x-1)$

よって，求める面積 S は



$$S = \int_0^2 \left\{ e^x - e^2(x-1) \right\} dx = \left[e^x - e^2 \cdot \frac{(x-1)^2}{2} \right]_0^2$$

$$= \left(e^2 - \frac{1}{2}e^2 \right) - \left(1 - \frac{1}{2}e^2 \right) = e^2 - 1$$

練習 9

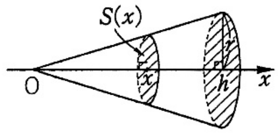
$y^2 = x(1-x)^2$　$(x \geqq 0)$ から $y = \pm(1-x)\sqrt{x}$

よって，求める面積 S は

$$S = 2\int_0^1 (1-x)\sqrt{x}\,dx = 2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{8}{15}$$

練習 10

右の図のように円錐をおいて考えると，x 軸上の点 x における断面積 $S(x)$ は



$S(x) : \pi r^2 = x^2 : h^2$ から $S(x) = \dfrac{\pi r^2}{h^2}x^2$

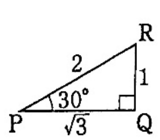
よって，求める体積 V は

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

練習 11

例題 4 と同様に考えると

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR} = \frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{PQ}$$



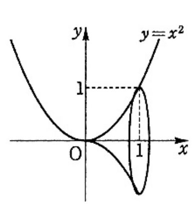
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{PQ}^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(a^2 - x^2\right)$$

よって，求める体積 V は

$$V = 2\int_0^a \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(a^2 - x^2\right)dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a = \frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$$

練習 12

求める体積を V とすると



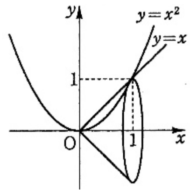
$$V = \pi\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^1 x^4\,dx = \pi\left[\frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

練習 13

放物線　$y = x^2$　と直線　$y = x$　の交点の　x　座標は　$x^2 = x$　より　$x = 0,\ 1$

$0 \leqq x \leqq 1$　のとき　$x^2 \leqq x$ であるから，求める体積を　V　とすると

$$V = \pi\int_0^1 x^2\,dx - \pi\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 - \pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{2}{15}\pi$$



練習 14

$x = 2y$　より

$$V = \pi\int_0^2 (2y)^2\,dy = \pi\left[\frac{4}{3}y^3\right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi$$

練習 15

⑴　$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 (1+x)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(1+x)^3\right]_0^1 = \frac{7}{3}$

⑵　$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^4}{n^4}+\frac{2^4}{n^4}+\frac{3^4}{n^4}+\cdots+\frac{n^4}{n^4}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4 = \int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

⑶　$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\log(1+x)\right]_0^1 = \log 2$$

練習 16

$0 \leqq x \leqq 1$ だから　$1 \leqq x+1 \leqq 2$　$\therefore$　$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{x+1}$　（等号は $x=1$ のとき）

$1-\frac{x}{2}-\frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)-x(x+1)-2}{2(x+1)} = \frac{x(1-x)}{2(x+1)} \geqq 0$　（等号は $x=0,\ 1$ のとき）

よって，　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき　　$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{x+1} \leqq 1-\frac{x}{2}$　が成り立つ。

これより

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx < \int_0^1 \left(1-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$\left[\frac{1}{2}x\right]_0^1 < \left[\log(x+1)\right]_0^1 < \left[x-\frac{1}{4}x^2\right]_0^1$$

したがって，$\frac{1}{2} < \log 2 < \frac{3}{4}$　である。（終）

練習 17

k が 2 以上の自然数のとき

$k \leqq x \leqq k+1$ ならば $\dfrac{1}{k+1} \leqq \dfrac{1}{x}$ であり

等号の成り立つのは $x=k+1$ のときだけだから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$$

すなわち $\dfrac{1}{k+1} < \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$

$k=1$，2，3，$\cdots$，$n-1$ （$n \geqq 2$）として辺々加えると

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} < \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x}\,dx$$

ここで，右辺 $= \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log x\Big]_1^n = \log n$

よって，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n} < \log n$ が成り立つ。（終）

節末問題

1.

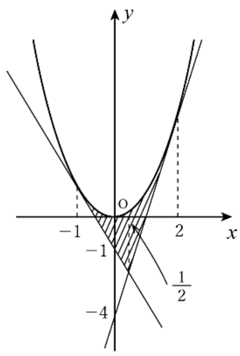
$y=x^2$ より $y'=2x$

点（-1, 1）における接線の方程式は

$y=-2(x+1)+1$ $\therefore$ $y=-2x-1$

点（2, 4）における接線の方程式は

$y=4(x-2)+4$ $\therefore$ $y=4x-4$



2 つの接線の交点の x 座標は

$-2x-1=4x-4$ より $x=\dfrac{1}{2}$

求める面積は右の図の斜線部分だから，面積を S とすると

$$S=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left\{x^2-(-2x-1)\right\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left\{x^2-(4x-4)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x+1)^2\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x-2)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}=\frac{9}{4}$$

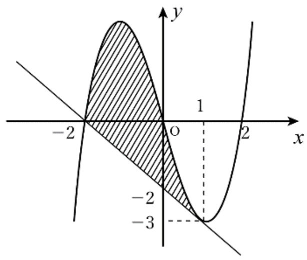
2.

$y=x^3-4x$ より $y'=3x^2-4$

点（1，−3）における接線の方程式は

$y=-\left(x-1\right)-3 \quad \therefore \quad y=-x-2$

曲線 $y=x^3-4x$ と接線 $y=-x-2$ の共有点の x 座標は



$x^3-4x=-x-2$ より

$x^3-3x+2=0$，$\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)=0$

$\therefore \; x=1, \; -2$

求める面積は右の図の斜線部分だから，面積を S とすると

$$S=\int_{-2}^{1}\left\{\left(x^3-4x\right)-\left(-x-3\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(x^3-3x+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$

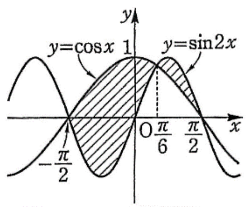
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-\left(4-6-4\right)$$

$$=\frac{27}{4}$$

3.

(1) $y=\cos x$ と $y=\sin 2x$ の共有点の x 座標は，

$\cos=\sin 2x$ より $\cos x\left(2\sin x-1\right)=0$



よって　$\cos x=0$ と $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ から $x=-\dfrac{\pi}{2}, \; \dfrac{\pi}{6}, \; \dfrac{\pi}{2}$

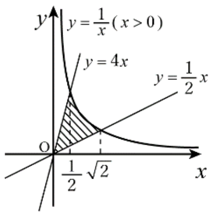
したがって，求める面積 S は下の図より

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\cos x-\sin 2x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin 2x-\cos x\right)$$

$$=\left[\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}+\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$$

⑵　$y=\dfrac{1}{x}$ と $y=\dfrac{1}{2}x$ の共有点の x 座標は



$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}x$ より　$x^2=2$，　$x>0$ であるから　$x=\sqrt{2}$

$y=\dfrac{1}{x}$ と $y=4x$ の共有点の x 座標は

$\dfrac{1}{x}=4x$ より $x^2=\dfrac{1}{4}$，　$x>0$ であるから　$x=\dfrac{1}{2}$

よって，求める面積 S は図より

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(4x-\frac{1}{2}x\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x\right)dx$$

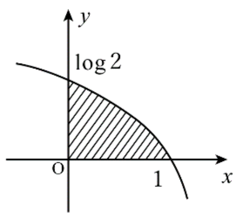
$$=\left[\frac{7}{4}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\log x-\frac{1}{4}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{7}{16}+\left(\log\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\log\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\right)=\frac{3}{2}\log 2$$

⑶　$y=\log(2-x)$ から $2-x=e^y$

ゆえに　$x=2-e^y$

よって，求める面積 S は



$$\int_0^1\log(2-x)\,dx=\int_0^1(x-2)'\log(2-x)\,dx$$

$$=\Big[(x-2)\log(2-x)\Big]_0^1-\int_0^1(x-2)\cdot\frac{-1}{2-x}\,dx$$

$$=2\log 2-\Big[x\Big]_0^1=2\log 2-1$$

4.

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より $\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$

ゆえに　$\left(1-\sqrt{x}\right)^2=1-2\sqrt{x}+x$

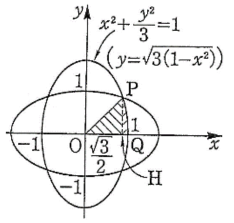
求める面積を S とおくと

$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_0^1\left(1-2\sqrt{x}+x\right)dx$$

$$=\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

5.　2 曲線

$x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$，$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ の第 1 象限内の共有点を P とすると



$$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。点 P から x 軸に垂線 PH を引き，

点（1，0）をＱとすると，△OPH の面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{8}$$

また，図形 PHＱの面積 S_2 は

$$S_2=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\sqrt{3\left(1-x^2\right)}\ dx=\sqrt{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\ dx$$

ここで，$x=\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

よって

x	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\to 1$
θ	$\dfrac{\pi}{3}\to\dfrac{\pi}{2}$

$$S_2=\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\cos\theta\ d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

したがって

$$S_1+S_2=\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

ゆえに，求める共通部分の面積 S は

$$S=8\times\left(S_1+S_2\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

6.

⑴　$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{2n}\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}$$

$$=\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\ dx=\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

⑵　$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2nk}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\,\dfrac{k}{n}}{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\ dx=\int_0^1\frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}\ dx=\left[\log\left(1+x^2\right)\right]_0^1$$

$$=\log 2$$

7.

k が自然数のとき

$k \leqq x \leqq k+1$ ならば $\sqrt{k} \leqq \sqrt{x} \leqq \sqrt{k+1}$ だから

$\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ である。

等号が成り立つのは $x=k$ のときだけだから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\,dx$$

すなわち

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leqq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$k=1$，2，3，$\cdots$，n として，辺々加えると

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{k}}\,dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ここで

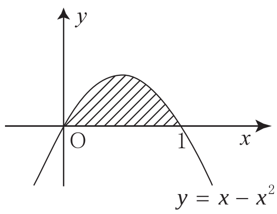
$$\text{左辺} = \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \Big[\, 2\sqrt{x}\,\Big]_1^{n+1} = 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$

よって，$\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$ が成り立つ。　　　（終）

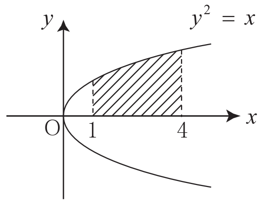
8.

⑴ $$V = \pi\int_0^1 \left(x - x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4\right) dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{30}$$

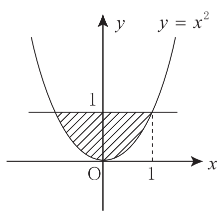


⑵ $$V = \pi\int_1^4 x\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^4 = \pi\left(8 - \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{2}\pi$$

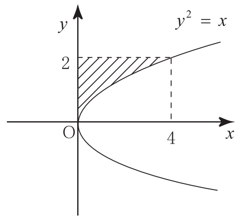


9.

⑴ $$V = \pi\int_0^1 y\,dy = \pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$



⑵ $V = \pi \int_0^2 \left(y^2 \right)^2 \, dy = \pi \left[\frac{1}{5} y^5 \right]_0^2 = \frac{32}{5} \pi$

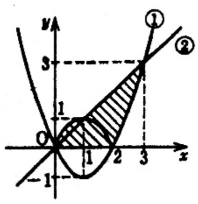


10. $y = x^2 - 2x$ ……①

$y = x$ ……②

①の x 軸の下の部分を x 軸に関して対称移動すると，

①，②で囲まれた部分は，右の図の斜線部分になる。



x 軸のまわりに回転させればよいから

$$V = \pi \int_0^1 \left(-x^2 + 2x \right)^2 dx + \pi \int_1^3 x^2 \, dx - \pi \int_2^3 \left(x^2 - 2x \right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2 \right) dx + \pi \int_1^3 x^2 \, dx - \pi \int_2^3 \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2 \right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 - x^3 + \frac{4}{3} x^2 \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 - \pi \left[\frac{1}{5} x^5 - x^4 + \frac{4}{3} x^3 \right]_2^3$$

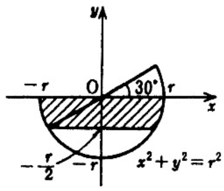
$$= \pi \left(\frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} \right) + \pi \left(9 - \frac{1}{3} \right) - \pi \cdot 3^3 \left(\frac{9}{5} - 3 + \frac{4}{3} \right) + \pi \cdot 2^3 \left(\frac{4}{5} - 2 + \frac{4}{3} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{46}{5} - 27 \times \frac{2}{15} + 8 \times \frac{2}{15} \right) = \frac{100}{15} \pi = \frac{20}{3} \pi$$

11.

流出した水の量は右の図の斜線部分を y 軸のまわりに回転した体積に等しいから

$$\int_{-\frac{r}{2}}^0 \pi x^2 \, dy = \pi \int_{-\frac{r}{2}}^0 \left(r^2 - y^2 \right) dy = \left[r^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{-\frac{r}{2}}^0 = \frac{11}{24} \pi r^3$$

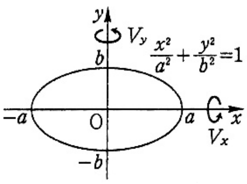


12.

対称性を利用して

$$V_x = 2\pi \int_0^a y^2 \, dx = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 - x^2 \right) dx$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2$$



$$V_y = 2\pi \int_0^b x^2 \, dy = 2\pi b \int_0^b \frac{a^2}{b^2} \left(b^2 - y^2 \right) dy$$

$$= \frac{2\pi a^2}{b^2} \left[b^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^b = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

よって　$V_x : V_y = \frac{4}{3} \pi a b^2 : \frac{4}{3} \pi a^2 b = b : a$

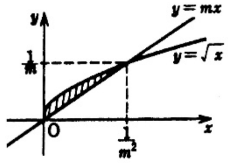
13.

$y = \sqrt{x}$ ……①

$y = mx$ ……② とすると

①, ② の交点は $(0,\ 0)$ および $\left(\dfrac{1}{m^2},\ \dfrac{1}{m}\right)$

x 軸のまわりに回転した体積は,



$$\pi\int_0^{\frac{1}{m^2}} \left\{\left(\sqrt{x}\right)^2 - (mx)^2\right\}dx = \frac{\pi}{6m^4}$$

y 軸のまわりに回転した体積は

$$\pi\int_0^{\frac{1}{m}} \left\{\left(\frac{y}{m}\right)^2 - \left(y^2\right)^2\right\}dy = \pi\left[\frac{y^3}{3m^2} - \frac{1}{5}y^5\right]_0^{\frac{1}{m}} = \frac{2\pi}{15m^5}$$

$\dfrac{\pi}{6m^4} = \dfrac{2\pi}{15m^5}$ より $m = \dfrac{4}{5}$