2 章　2 次関数とグラフ，方程式・不等式

1 節　2 次方程式

62　⑴　$x = \pm 3$　⑵　$x = \pm\sqrt{5}i$　⑶　$x = 3 \pm \sqrt{2}$

63　⑴　$x = 0,\ -\frac{3}{2}$　⑵　$x = -2,\ -5$　⑶　$x = -\frac{5}{3},\ \frac{5}{3}$　⑷　$x = \frac{5}{2}$　⑸　$x = -\frac{2}{3},\ 5$

⑹　$x = -\frac{1}{2},\ \frac{8}{9}$

64　⑴　$x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　⑵　$x = \frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$　⑶　$x = \sqrt{3}$　⑷　$x = \frac{-2\pm\sqrt{10}}{3}$　⑸　$x = \frac{3\pm\sqrt{21}}{4}$

⑹　$x = \frac{5\pm\sqrt{2}i}{3}$

65　⑴　異なる2つの虚数解をもつ。

⑵　重解をもつ。

⑶　異なる2つの虚数解をもつ。

⑷　異なる2つの実数解をもつ。

66　⑴　$k = 2$ のとき　重解は $x = -1$

⑵　$k = 2$ のとき　重解は $x = 1$

$k = -6$ のとき　重解は $x = -3$

67　⑴　1　⑵　-1　⑶　$\frac{3}{2}$　⑷　-2　⑸　4

（$\alpha + \beta = 2$，$\alpha\beta = \frac{3}{2}$ として代入する。）

68　2つの解をα，3αとし，解と係数の関係より

$\alpha + 3\alpha = k$　……①，$\alpha \cdot 3\alpha = k - 1$　……②

①，②を解いて

$k = 4$，$\alpha = 1$，

$k = \frac{4}{3}$，$\alpha = \frac{1}{3}$

よって，$k = 4$のとき，2つの解は1，3

$k = \frac{4}{3}$のとき，2つの解は$\frac{1}{3}$，1

69　⑴　$\left(x + 1 + \sqrt{2}i\right)\left(x + 1 - \sqrt{2}i\right)$

⑵　$(2x - 3 - i)(2x - 3 + i)$

⑶　$-\frac{1}{3}\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{4}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{4}\right)$

⑷　$3\left(x - \frac{5+\sqrt{2}i}{3}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{2}i}{3}\right)$

70　⑴　$x^2 + 3x - 18 = 0$

⑵　$x^2 - 4x + 2 = 0$

⑶　$x^2 - 6x + 13 = 0$

71　⑴　$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=5$

$(\alpha-1)+(\beta-1)=1$，$(\alpha-1)(\beta-1)=3$ より

$x^2-x+3=0$

⑵　$2\alpha+2\beta=6$，$2\alpha\cdot 2\beta=20$ より

$x^2-6x+20=0$

⑶　$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=8$，$(\alpha+\beta)\alpha\beta=15$ より

$x^2-8x+15=0$

72　係数が実数だから $1-2i$ が解のとき $1+2i$ も解である。

解と係数の関係から

$(1-2i)+(1+2i)=2$，$(1-2i)(1+2i)=5$

$\therefore\quad x^2-2x+5=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+mx+n=0$

よって，$m=-2$，$n=5$

$\boxed{\text{別解}}$　$1-2i$ を方程式に代入して

$(1-2i)^2+m(1-2i)+n=0$

$(m+n-3)-(2m+4)i=0$

m，nは実数だから

$m+n-3=0$，$2m+4=0$ より $m=-2$，$n=5$

73　$x=-4$ を与式に代入して

$16+4a-12+1-a^2=0$

$(a-5)(a+1)=0 \quad\therefore\quad a=5,\ -1$

$a=5$ のとき，$x^2-2x-24=0$，$(x-6)(x+4)=0$

$\therefore\quad x=6,\ -4$

$a=-1$ のとき $x^2+4x=0$，$x(x+4)=0$

$\therefore\quad x=0,\ -4$

よって，$a=5$ のとき，他の解は6

$a=-1$ のとき，他の解は0

74　2つの解をα，$\alpha+2$とすると解と係数の関係から

$\alpha+(\alpha+2)=p$　……①　，$\alpha(\alpha+2)=24$　……②

②より　$\alpha=4,\ -6$，①に代入して

$\alpha=4$ のとき，$p=10$，2つの解は$4,\ 6$

$\alpha=-6$ のとき，$p=-10$，2つの解は$-6,\ -4$

75　2つの解をα，α^2とすると解と係数の関係から

$\alpha+\alpha^2=6$　……①，$\alpha\cdot\alpha^2=k$　……②

①より　$\alpha=2,\ -3$

$\alpha=2$ のとき，$k=8$，2つの解は$2,\ 4$

$\alpha=-3$ のとき，$k=-27$，2つの解は$-3,\ 9$

76　共通解をαとすると

$\alpha^2+k\alpha+12=0$　……①，$\alpha^2+2\alpha+6k=0$　……②

①－②より　$(k-2)(\alpha-6)=0$

$k=2$ のとき，どちらの方程式も $x^2+2x+12=0$ となり不適。

$\alpha=6$ のとき，$k=-8$，このとき条件を満たす。

よって，$k=-8$ のとき，共通解は 6

77　たれ下がる部分をxとすると

縦 $2x+1.5$（m），横 $2x+5$（m）

面積を考えて

$(2x+1.5)(2x+5)=1.5\times5\times2$

$(2x-1)(4x+15)=0$，$x>0$ より $x=\frac{1}{2}$

よって，縦の長さは 2.5（m）　横の長さは 6（m）

78　⑴　異なる2つの解をα，βとする。

$D>0$ より $k<7$　……①

解と係数の関係から

$\alpha+\beta=4>0$（これは満たす。）

$\alpha\beta=k-3>0$ より $k>3$　……②

①，②より　$3<k<7$

⑵　$\alpha\beta=k-3<0$ ならばよいから　$k<3$

79　⑴　$(a-1)x=(a+1)(a-1)$

$a\neq1$ のとき，$x=a+1$

$a=1$ のとき，$0x=0$　よりxはすべての実数

⑵　$ax^2+1=x(a+1)$

$(ax-1)(x-1)=0$

$a\neq0$ のとき，$x=\frac{1}{a}$，1

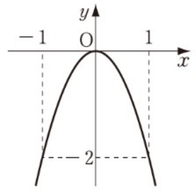
$a=0$ のとき，$x=1$

2 節　2 次関数とグラフ

80　⑴　-2　⑵　4　⑶　-11　⑷　$3a-2$　⑸　$3a+1$　⑹　3　⑺　12　⑻　8

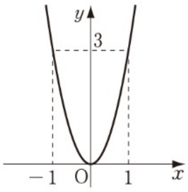
⑼　$8a^2+6a+3$　⑽　$2a^2-7a+8$

81　⑴　$y=-2x^2$



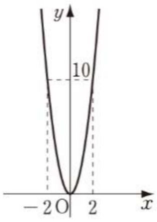
放物線は上に凸

⑵　$y = 3x^2$



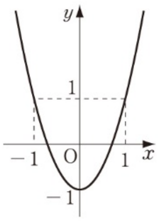
放物線は下に凸

⑶　$y = \frac{5}{2}x^2$



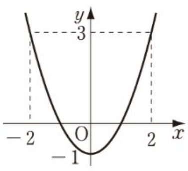
放物線は下に凸

82　⑴　$y = 2x^2 - 1$



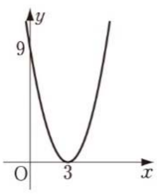
軸 $x = 0$，頂点$(0，1)$

⑵　$y = x^2 - 1$



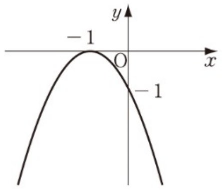
軸 $x = 0$，頂点$(0，-1)$

⑶　$y = (x - 3)^2$



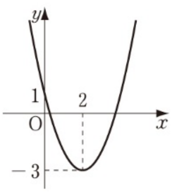
軸 $x = 3$，頂点$(3，0)$

⑷　$y=-(x+1)^2$



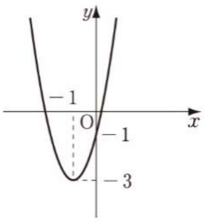
軸 $x=-1$，頂点$(-1,\ 0)$

83　⑴　$y=(x-2)^2-3$



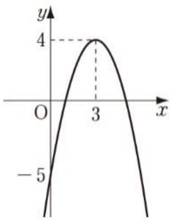
軸 $x=2$，頂点$(2,\ -3)$

⑵　$y=2(x+1)^2-3$



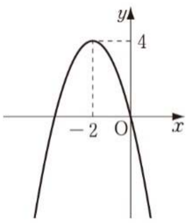
軸 $x=-1$，頂点$(-1,\ -3)$

⑶　$y=-(x-3)^2+4$



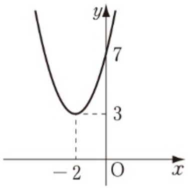
軸 $x=3$，頂点$(3,\ 4)$

⑷　$y=-(x+2)^2+4$



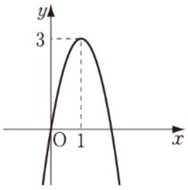
軸 $x=-2$，頂点$(-2,\ 4)$

84 ⑴ $y=(x+2)^2+3$



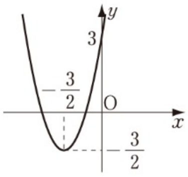
軸 $x=-2$，頂点$(-2,\ 3)$

⑵ $y=-3(x-1)^2+3$



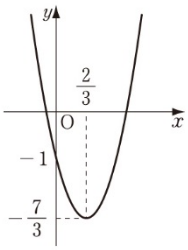
軸 $x=1$，頂点$(1,\ 3)$

⑶ $y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$



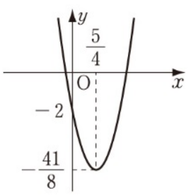
軸 $x=-\frac{3}{2}$，頂点$\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$

⑷ $y=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}$



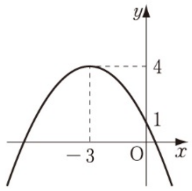
軸 $x=\frac{2}{3}$，頂点$\left(\frac{2}{3},\ -\frac{7}{3}\right)$

⑸ $y=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{41}{8}$



軸 $x=\frac{5}{4}$，頂点$\left(\frac{5}{4},\ -\frac{41}{8}\right)$

⑹ $y=-\frac{1}{3}(x+3)^2+4$



軸 $x=-3$，頂点$(-3,\ 4)$

85 ⑴ $y=3(x+2)^2+4$

⑵ $y=3(x-2)^2-3$

86 $y=-(x+1)^2+7$ 　（$y=-x^2-2x+6$）

87 ⑴ $y=2(x-1)^2-5$

⑵ $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$

⑶ $y=(x+2)^2-1$

⑷ $y=-2(x+1)^2+8$

⑸ $y=-2x^2+3x-1$

88 ⑴ 最小値なし，$x=1$ のとき最大値 -2

⑵ $x=\frac{5}{2}$ のとき最小値 $-\frac{9}{2}$, 　最大値なし

⑶ 最小値なし，$x=4$ のとき最大値 1

⑷ $x=1$ のとき最小値 -3,

$x=-1$ のとき最大値 1

⑸ $x=-2$ のとき最小値 -9,

$x=\frac{1}{4}$ のとき最大値 $\frac{9}{8}$

⑹ $x=-3$ のとき最小値 $\frac{5}{4}$,

$x=-4$ のとき最大値 2

89 $y=\frac{3}{2}(x+2)^2+2$

90 ⑴ $y=-x^2-2x+4$

⑵ $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+4$

⑶ $y=-\frac{1}{9}x^2$ と $y=-(x-4)^2$

91 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+a^2$

最小値をとるから $a>0$ で

$x=-\frac{b}{2a}=1$，すなわち　$b=-2a$ 　……①

$x=3$ のとき，$9a+3b+a^2=10$ 　……②

①，②を解いて　$a=2,\ -3$ 　$a>0$ だから

$a=2$，$b=-4$，最小値 2

92　$y=a(x+2)^2-4a+b$

$-3\leqq x\leqq 1$ で軸が $x=-2$ だから

$a>0$ のとき $x=1$ で最大値 $5a+b=5$

$x=-2$ で最小値 $-4a+b=-13$

これより，$a=2$，$b=-5$

$a<0$ のとき $x=-2$ で最大値 $-4a+b=5$

$x=1$ で最小値 $5a+b=-13$

これより，$a=-2$，$b=-3$

$a=-2$，$b=-3$ と $a=2$，$b=-5$

93　(1)　$y=3-x$ を代入して

与式 $=x^2+(3-x)^2=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$ より

$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{3}{2}$ のとき最小値 $\frac{9}{2}$，最大値なし

(2)　$y=1-x^2$ を代入して

与式 $=x+1-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{3}{4}$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$，最小値なし

(3)　$y=2-2x\geqq 0$ より $0\leqq x\leqq 1$

与式 $=P=x^2+(2-2x)^2=5\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$

$x=\frac{4}{5}$，$y=\frac{2}{5}$ のとき最小値 $\frac{4}{5}$，$x=0$，$y=2$ のとき最大値 4

94　$y=-(x-2)^2+3$

$0<a<2$ のとき

$x=a$ で最大値 $-a^2+4a-1$

$2\leqq a$ のとき

$x=2$ で最大値 3

95　$y=(x-a)^2+2$

(1)　$a<0$ のとき

$x=0$ で最小値 a^2+2,

$0\leqq a\leqq 2$ のとき

$x=a$ で最小値 2,

$2<a$ のとき

$x=2$ で最小値 a^2-4a+6

⑵　$a<1$ のとき

$x=2$ で最大値 a^2-4a+6,

$a=1$ のとき

$x=0$，2 で最大値 2,

$1<a$ のとき

$x=0$ で最大値 a^2+2

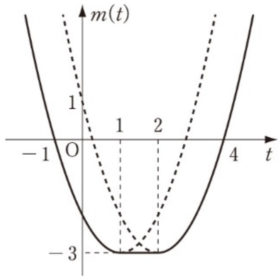
96　$f(x)=(x-2)^2-3$

⑴　$t<1$ のとき　$m(t)=t^2-2t-2$

$1\leqq t<2$ のとき　$m(t)=-3$

$t\geqq 2$ のとき　$m(t)=t^2-4t+1$

⑵



97　与式 $=x^2-(2y-4)x+2y^2-6y+7$

$=(x-y+2)^2-(y-2)^2+2y^2-6y+7$

$=(x-y+2)^2+(y-1)^2+2$

$x-y+2=0$，$y-1=0$ のとき

すなわち，$x=-1$，$y=1$ のとき最小値 2

98　⑴　$x=2+\sqrt{3}$，$2-\sqrt{3}$　　⑵　$x=1$，$-\frac{1}{3}$　　⑶　$x=\frac{1}{3}$　　⑷　共有点なし

99　⑴　$k<4$ のとき2個

$k=4$ のとき1個

$k>4$ のとき0個

⑵　$k>-\frac{3}{2}$ のとき2個

$k=-\frac{3}{2}$ のとき1個

$k<-\frac{3}{2}$ のとき0個

100　⑴　$x\geqq 3$　　⑵　$x>-3$　　⑶　$x>2$　　⑷　$x\geqq 1$　　⑸　$x<\frac{7}{2}$　　⑹　$x>4$

⑺　$x\geqq\frac{8}{3}$　　⑻　$x<-2$　　⑼　$x>3$　　⑽　$x<-\frac{7}{3}$　　⑾　$x<2$　　⑿　$x>-20$

101　⑴　$-2<x<4$

⑵　$x\leqq -6$，$3\leqq x$

⑶　$x\leqq 0$，$\frac{4}{3}\leqq x$

⑷　$-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$

⑸　$x < \frac{1-\sqrt{6}}{5}$，$\frac{1+\sqrt{6}}{5} < x$

⑹　$\frac{3-\sqrt{17}}{4} \leqq x \leqq \frac{3+\sqrt{17}}{4}$

102　⑴　$x = 3$ 以外のすべての実数　⑵　解なし　⑶　$x = \frac{5}{2}$　⑷　すべての実数

103　⑴　すべての実数　⑵　$x = \frac{3}{2}$　⑶　$x = 1$ 以外のすべての実数　⑷　解なし

104　⑴　$-3 < x < 4$　⑵　$x \leqq -\frac{19}{5}$　⑶　$-5 \leqq x < 2$　⑷　$x < 2$

105　⑴　$-2 \leqq x \leqq 1$　⑵　$-3 < x \leqq \frac{11}{3}$　⑶　$-2 \leqq x \leqq 3$　⑷　$-\frac{3}{5} < x \leqq \frac{4}{3}$

106　⑴　$\frac{1}{2} \leqq x < 2$

⑵　$-5 < x \leqq -3$，$1 \leqq x$

⑶　$-3 < x < -2$，$1 < x < 4$

⑷　$x \leqq 1$，$4 < x$

107　$-2 < k \leqq 0$，$4 \leqq k < 6$

108　⑴　$x = 4$，-6　⑵　$x = 5$，-1　⑶　$x = 0$，-1

109　⑴　$-6 < x < 4$　⑵　$x \leqq -1$，$5 \leqq x$　⑶　$-1 < x < 0$

110　⑴　$x \geqq 1$ のとき

$x - 1 = 7 - x$　より　$x = 4$（$x \geqq 1$ を満たす。）

$x < 1$ のとき

$-x + 1 = 7 - x$，$1 = 7$ となり解なし

よって，$x = 4$

⑵　$x \geqq 5$ のとき

$x + x - 5 = 3x - 4$　より　$x = -1$（$x \geqq 5$ を満たさない。）

$0 \leqq x < 5$ のとき

$x - (x - 5) = 3x - 4$　より　$x = 3$（$0 \leqq x < 5$ を満たす。）

$x < 0$ のとき

$-x - (x - 5) = 3x - 4$　より　$x = \frac{9}{5}$（$x < 0$ を満たさない。）

よって $x = 3$

⑶　$x \geqq \frac{1}{2}$ のとき

$2x - 1 \leqq x + 1$　より　$x \leqq 2$

$x \geqq \frac{1}{2}$　だから　$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2$　……（ⅰ）

$x < \frac{1}{2}$ のとき

$-(2x - 1) \leqq x + 1$　より　$x \geqq 0$

$x < \frac{1}{2}$　だから　$0 \leqq x < \frac{1}{2}$　……（ⅱ）

（ⅰ），（ⅱ）より　$0 \leqq x \leqq 2$

⑷　$x \geqq -1$ のとき

$x+2+x+1>5$　より　$x>1$（$x \geqq -1$ を満たす。）　……（ⅰ）

$-2 \geqq x < -1$ のとき

$x+2-(x+1)>5$　より　$1>5$ となり解なし。

$x<-2$ のとき

$-(x+2)-(x+1)>5$　より　$x<-4$（$x<-2$ を満たす。）　……（ⅱ）

（ⅰ），（ⅱ）より　$x<-4$，$1<x$

111　$1-x^2=x+k$より$x^2+x+k-1=0$

判別式は $D=1-4(k-1)=-4k+5$　だから

$D>0$　すなわち　$k<\frac{5}{4}$ のとき2個

$D=0$　すなわち　$k=\frac{5}{4}$ のとき1個

$D<0$　すなわち　$k>\frac{5}{4}$ のとき0個

112　点$(1,\ 1)$ を通るから

$1=1+a+b$　∴　$a+b=0$　……①

$x^2+ax+b=x-1$　より　$x^2+(a-1)x+b-1=0$

接するから　$D=(a-1)^2-4(b-1)=0$　……②

①，②を解いて　$a=1$，$b=-1$，または　$a=-3$，$b=3$

113　$x+1>\sqrt{2}x-1$

$\left(1-\sqrt{2}\right)x>-2$，$x<\frac{2}{\sqrt{2}-1}$

∴　$x<2+2\sqrt{2}$

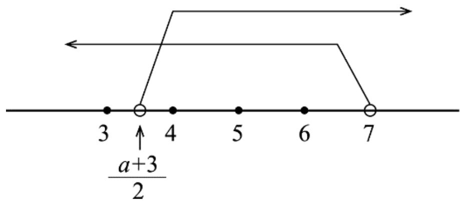
また，$4<2+2\sqrt{2}<5$　だから自然数xは

1，2，3，4

114　⑴　$4<x<7$ より　$x=5$，6

⑵　$4x-3>2x+a$，$x>\frac{a+3}{2}$

$3 \leqq \frac{a+3}{2}<4$　だから　$3 \leqq a<5$



115 ⑴ $1 < x < 2$ を解にもつ不等式は

$(x-1)(x-2) < 0$,

$x^2 - 3x + 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + bx + c < 0$

$\therefore \quad b = -3$, $c = 2$

⑵ $x < -2$, $3 < x$ を解にもつ不等式は

$(x+2)(x-3) > 0$, $x^2 - x - 6 > 0$

$ax^2 + x + c < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + x + 6 < 0$

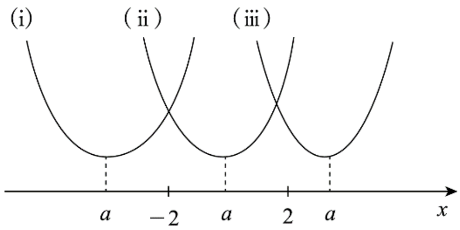
$\therefore \quad a = -1$, $c = 6$

116 ⑴ $y = (x-a)^2 - a^2 + 3a$

$-a^2 + 3a > 0$ より $a(a-3) < 0$

$\therefore \quad 0 < a < 3$

⑵ 最小値は（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）次の場合で考える。



（ⅰ） $a < -2$ のとき $x = -2$ で $7a + 4 > 0$

$\therefore \quad a > -\frac{4}{7}$（$a < -2$ を満たさないから不適）

（ⅱ） $-2 \leqq a \leqq 2$ のとき $x = a$ で $-a^2 + 3a > 0$

$\therefore \quad 0 < a < 3$, $-2 \leqq a \leqq 2$ だから $0 < a \leqq 2$

（ⅲ） $a > 2$ のとき $x = 2$ で $-a + 4 > 0$

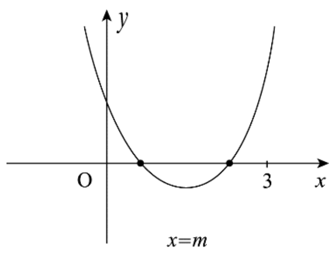
$\therefore \quad a < 4$, $a > 2$ だから $2 < a < 4$

（ⅱ），（ⅲ）より $0 < a < 4$

117 $y = x^2 - 2mx + 3m - 2$ のグラフで考える。

$y = (x-m)^2 - m^2 + 3m - 2$

右図のグラフのようになればよいから



$-m^2 + 3m - 2 < 0$ ……①（$D > 0$ でもよい）

軸について $0 < m < 3$ ……②

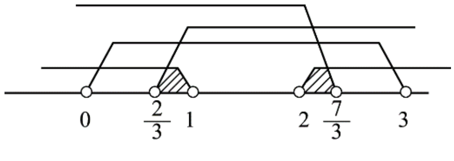
$x = 0$ のとき $y = 3m - 2 > 0$ ……③

$x = 3$ のとき $y = -3m + 7 > 0$ ……④

①より $m < 1$, $2 < m$

③より $m > \frac{2}{3}$

④より $m < \frac{7}{3}$



①，②，③の共通範囲だから

$\frac{2}{3} < m < 1$, $2 < m < \frac{7}{3}$

2 章の問題

1　⑴　点$(-2,\ 5)$ を通るから

$4-2a+b=5$　……①

$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$

頂点が直線 $y=-x+3$ 上にあるから

$-\frac{a^2}{4}+b=-\left(-\frac{a}{2}\right)+3$　……②

①，②を解いて $a=2,\ b=5$　または　$a=4,\ b=9$

⑵　点$(1,\ 4)$ を通るから

$1+a+b=4$　……①

x軸に接するから

$D=a^2-4b=0$　……②

①，②を解いて　$a=2,\ b=1$　または　$a=-6,\ b=9$

⑶　点$(3,\ 2)$ を通るから

$2=9+3a+b$　……①

$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$ より

$-\frac{a^2}{4}+b=-2$　……②

①，②を解いて　$a=-2,\ b=-1$，または　$a=-10,\ b=23$

2　原点を通るから　$c=0$

$y=ax^2+bx-8$ が点$(4,\ -8)$ を通るから

$16a+4b-8=-8$　　$\therefore$　$b=-4a$　……①

x軸と接するから　$D=b^2+32a=0$　……②

①，②を解いて　$a=-2,\ b=8,\ c=0$

3　⑴　$a<0$　　⑵　軸 $x=-\frac{b}{2a}>0$　だから　$b>0$

⑶　$x=0$ のとき $y=c>0$　　⑷　$b^2-4ac>0$（x軸と交わっている。）

⑸　$x=1$ のとき $y=a+b+c>0$

⑹　$-4ac>0$ だから $b<\sqrt{b^2-4ac}$　$\therefore$　$-b+\sqrt{b^2-4ac}>0$

4　$y=(x-2k)^2-2k^2+6k$

⑴　最小値は $x=2k$ のとき $-2k^2+6k$

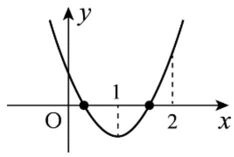
⑵　$g(k)=-2k^2+6k=-2\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$

よって，$k=\frac{3}{2}$ のとき最大値 $\frac{9}{2}$

5　⑴　$y=f(x)$ とすると $x=1$ のとき $y<0$ ならばよいから

$f(1)=3-2k+k-1<0$　∴　$k>2$

⑵　右のグラフのようになればよい。



$f(0)=k-1>0$ より　$k>1$

$f(1)<0$ より　$k>1$

$f(2)=12-4k+k-1>0$ より　$k<\frac{11}{3}$

よって，$2<k<\frac{11}{3}$

6　解と係数の関係から $\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=1$

⑴　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-1$，$\alpha^2\beta^2=1$

∴　$x^2+x+1=0$

⑵　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-1$，$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=1$

∴　$x^2+x+1=0$

⑶　$\frac{1+\alpha}{1+\beta}+\frac{1+\beta}{1+\alpha}=\frac{(1+\alpha)^2+(1+\beta)^2}{(1+\alpha)(1+\beta)}=\frac{2+2(\alpha+\beta)+\alpha^2+\beta^2}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}=-1$

$\frac{1+\alpha}{1+\beta}\cdot\frac{1+\beta}{1+\alpha}=1$

∴　$x^2+x+1=0$

7　2つの自然数の解をm，nとすると解と係数の関係から

$m+n=a$，$mn=2a+1$

$mn-2(m+n)-1=0$

$(m-2)(n-2)=5$

$(m-2，n-2)=(1，5)，(5，1)$

よって，$m=3$，$n=7$ または $m=7$，$n=3$

このとき　$a=10$

8　⑴　$y=(x-3)^2-4$

$0<a<3$ のとき

最大値は $x=0$ で 5

最小値は $x=a$ で $a^2-6a+5=-3$

$(a-2)(a-4)=0$　より　$a=2$（$0<a<3$）

$a\geqq 3$ のとき，最小値は-4となる。

よって，$a=2$

⑵　最小値が-4になるのは $a\geqq 3$ のとき

このとき，最大値が $a^2-6a+5\leqq 12$

$(a-7)(a+1)\leqq 0$　∴　$-1\leqq a\leqq 7$

$a\geqq 3$ だから　$3\leqq a\leqq 7$

9　2点$(-1,\ 0)$，$(3,\ 8)$を通るから

$a-b+c=0$　……①

$9a+3b+c=8$　……②

①，②より　$b=-2a+2$，$c=-3a+2$

$y=ax^2+(-2a+2)x-3a+2$ と $y=2x+6$ を連立させて

$ax^2+(-2a+2)x-3a+2=2x+6$

$ax^2-2ax-3a-4=0$

接するから　$\frac{D}{4}=a^2+3a^2+4a=4a^2+4a=0$

$4a(a+1)=0$，$a\neq 0$ だから $a=-1$

よって，$a=-1$，$b=4$，$c=5$

10　$t=x^2-2x$　とおくと　$y=t^2-8t$　と表せる。

ここで，$t=(x-1)^2-1$（$1\leqq x\leqq 4$）より　$-1\leqq t\leqq 8$

$y=(t-4)^2-16$（$-1\leqq t\leqq 8$）で考えると

yの最大値は $t=-1$ のとき9，最小値は $t=4$ のとき-16である。

11　⑴　$y=\left(x+\frac{k-2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2+k-1$　より

$-\frac{k-2}{2}>0$，$\frac{3}{4}k^2+k-1>0$

これより，$k<-2$，$\frac{2}{3}<k<2$

⑵　直線 $y=2x-5$ と接するから　$x^2+(k-2)x+k^2=2x-5$　より

$x^2+(k-4)x+k^2+5=0$

$D=(k-4)^2-4(k^2+5)=0$　……①

x軸と接するから

$\frac{3}{4}k^2+k-1=0$　……②

①，②の共通解だから $k=-2$

⑶　$-\frac{4}{3}\leqq k\leqq 0$

12　$(x-a)(x^2-a^2+2)<0$

$a<a^2-2$　すなわち　$a<-1$，$2<a$　のとき　$a<x<a^2-2$

$a>a^2-2$　すなわち　$-1<a<2$　のとき　$a^2-2<x<a$

$a=a^2-2$　すなわち　$a=-1$，2　のとき

$(x+1)^2<0$，$(x-2)^2<0$ となり，解なし。

13　$(x-1)(x-a^2+2a)<0$

$1<x<a^2-2a$　または　$a^2-2a<x<1$

整数xが存在しないのは

$0\leqq a^2-2a\leqq 2$　のとき

これを解いて

$1-\sqrt{3}\leqq a\leqq 0$，$2\leqq a\leqq 1+\sqrt{3}$

14 ⑴ （ｉ） $x \geqq 3$ のとき

$x-3+x+1=-x+5$ より $x=\frac{7}{3}$（$x \geqq 3$ を満たさない。）

（ⅱ） $-1 \geqq x < 3$ のとき

$-(x-3)+x+1=-x+5$ より $x=1$（$-1 \leqq x < 3$ を満たす。）

（ⅲ） $x < -1$ のとき

$-(x-3)-(x+1)=-x+5$ より $x=-3$（$x < -1$ を満たす。）

（ｉ），（ⅲ）より $x=1,\ -3$

⑵ （ｉ） $x \geqq 3$ のとき $x > \frac{7}{3}$ $\therefore$ $x \geqq 3$

（ⅱ） $-1 \leqq x < 3$ のとき $x > 1$ $\therefore$ $1 < x < 3$

（ⅲ） $x < -1$ のとき $x < -3$ $\therefore$ $x < -3$

（ｉ），（ⅱ），（ⅲ）より $x < -3,\ 1 < x$

⑶ （ｉ） $x \geqq 1$ のとき

$x^2+2x-2-6=0$，$(x+4)(x-2)=0$

$x=-4, 2$ $x \geqq 1$ だから $x=2$

（ⅱ） $x < 1$ のとき

$x^2-2(x-1)-6=0$，$x^2-2x-4=0$

$x=1 \pm \sqrt{5}$ $x < 1$だから$x=1-\sqrt{5}$

（ｉ），（ⅱ）より $x=2,\ 1-\sqrt{5}$

⑷ （ｉ） $x \geqq 1$ のとき

$x^2+2x-8<0$ より $-4 < x < 2$ $\therefore$ $1 \leqq x < 2$

（ⅱ） $x < 1$ のとき

$x^2+2x-4<0$ より $1-\sqrt{5} < x < 1+\sqrt{5}$ $\therefore$ $1-\sqrt{5} < x < 1$

（ｉ），（ⅱ）より $1-\sqrt{5} < x < 2$

15 $y=|x^2-3x|$ と $y=x+k$ のグラフで考える。

$-x^2+3x=x+k$ より

$x^2-2x+k=0$

接するのは

$\frac{D}{4}=1-k=0$ $\therefore$ $k=1$

右のグラフから $0 < k < 1$ のとき

4 つの交点をもつ。

よって，$0 < k < 1$