3 章　高次方程式・式と証明

1 節　高次方程式

118　①，④

119　⑴　$a=3$，$b=-6$

⑵　$a=-1$，$b=2$，$c=-6$

⑶　$a=2$，$b=-3$，$c=-3$

⑷　$x=-2$，-1，0，1を代入すると

$-8=-a+b-c+d$　……①

$-1=d$　……②

$0=a+b+c+d$　……③

$1=8a+4b+2c+d$　……④

①～④を解くと　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

（このとき，与式は恒等式になる。）

別解　$x+1=t$ とおいて，$x=t-1$ を代入

$(t-1)^3=at^3+bt^2+ct+d$

$t^3-3t^2+3t-1=at^3+bt^2+ct+d$

これより　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

120　$x^3+ax^2+x-2=(x+b)(x^2-x+c)-8$　と表せるから

$x^3+ax^2+x-2=x^3+(b-1)x^2-(b-c)x+bc-8$

$a=b-1$…①，$-b+c=1$…②，$bc-8=-2$…③

①，②，③を解いて

$a=1$，$b=2$，$c=3$　または

$a=-4$，$b=-3$，$c=-2$

121　⑴　$a=1$，$b=1$

⑵　$a=-5$，$b=7$

122　⑴　9　⑵　11　⑶　0　⑷　5

123　⑴　-3　⑵　1　⑶　-1　⑷　-3

124　⑴　$a=2$　⑵　$a=1$

125　$a=2$，$b=-1$

126　$2x-3$

127　$x+2$

128　⑴　$(x-1)(x^2+x-1)$

⑵　$(x-2)(x^2-x+1)$

⑶　$(x-1)(x-2)(x-3)$

⑷　$(2x+1)(2x^2-x+1)$

129 ⑴ $x=3$, $\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

⑵ $x=1$ ⑶ $x=0$, ±2

⑷ $x=\pm3$, $\pm3i$

130 ⑴ $x=1$, 2, -3

⑵ $x=2$, $\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

⑶ $x=-1$, $\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$

⑷ $x=1$, 2, $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

131 ⑴ $x^3+ax^2-5x+b=(x-1)^2(x+b)$ と表せる。

$a=1$, $b=3$

⑵ $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ で割り切れるから

$x+3$, $x-1$ でも割り切れる。

$a=7$, $b=-15$

⑶ $3x^3+5x^2+ax+b=(x+1)^2(3x+b)$ と表せる。

$a=1$, $b=-1$

132 ⑴ $\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}$ とおく。

$2=a(x-1)+b(x+1)$ より $a=-1$, $b=1$

$\therefore$ $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

⑵ $\frac{3x+4}{x^2+3x+2}=\frac{3x-4}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$ とおく

$3x-4=a(x+2)+b(x+1)$ より $a=-7$, $b=10$

$\therefore$ $\frac{10}{x+2}-\frac{7}{x+1}$

⑶ $\frac{2x^2-3x-3}{x^3-x}=\frac{2x^2-3x-3}{x(x+1)(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}$ とおく

$2x^2-3x-3=a(x+1)(x-1)+bx(x-1)+cx(x+1)$ より

$a=3$, $b=1$, $c=-2$

$\therefore$ $\frac{3}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-1}$

133 ⑴ $x=-3$, 4, 5

⑵ $x=-\frac{1}{2}$

⑶ $x=\frac{1}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

⑷ $x=\pm\frac{1}{2}$, $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

134 ⑴ $x=\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{1}{2}$ ⑵ $x=1$ ⑶ $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ ⑷ $x=\pm1$, $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

135 $x=1-2i$ を与式に代入して

$(1-2i)^3+a(1-2i)+b=0$

$(a+b-11)-(2a-2)i=0$

$a+b-11$，$2a-2$ は実数だから

$a+b-11=0$，$2a-2=0$ これより $a=1$，$b=10$

このとき $(x+2)(x^2-2x+5)=0$

よって，他の解は $x=-2$，$1+2i$

136 ⑴ $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$，$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

⑵ $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると $\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ とすると $\omega^2=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

⑶ $\omega^2+w+1=0$ かつ $\omega^3=1$ だから

$\omega^8+\omega^4+1=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$

137 $P(x)$をx^2+x-6で割ったときの商を$Q(x)$，余りを$ax+b$とおくと

$P(x)=(x^2+x-6)Q(x)+ax+b$

$=(x+3)(x-2)Q(x)+ax+b$ ……①

$P(x)$を x^2+4x+3で 割ったときの商を$Q'(x)$とすると

$P(x)=(x^2+4x+3)Q'(x)-x-4$

$P(x)=(x+1)(x+3)Q'(x)-x-4$

ここで，$P(2)=9$，$P(-3)=-(-3)-4=-1$ だから

①に代入して

$P(2)=2a+b=9$ ……②，$P(-3)=-3a+b=-1$ ……③

②，③を解いて $a=2,b=5$

よって，余りは $2x+5$

138 ⑴ ①が恒等式ならば②は

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ と変形できるから

$x=\alpha$，β，γ が解となる。

⑵ $a=-(\alpha+\beta+\gamma)$，$b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$c=-\alpha\beta\gamma$

⑶ たとえば，α，βが実数解とすると，⑵より $\gamma=-(a+\alpha+\beta)$ だから，γも実数解である。

139 $P(x)$を$(x^2+1)(x-1)$で割ったときの商を$Q(x)$

余りをax^2+bx+cとおくと

$P(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

これをx^2+1で割った余りが$2x+1$だから

$ax^2+bx+c=a(x^2+1)+2x+1$

$\therefore\quad P(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+2x+1$

$P(1)=7$　だから　$P(1)=2a+3=7$　より　$a=2$

よって，余りは　$2x^2+2x+3$

2 節　式と証明

140 ⑴　［証明］

$(\text{左辺})=(a+2b)^2+(a-2b)^2$

$=(a^2+4ab+4b^2)+(a^2-4ab+4b^2)$

$=2(a^2+4b^2)=(\text{右辺})$　［証明終］

⑵　［証明］

$(\text{左辺})=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)+(3x^2y-3xy^2)$

$=x^3-y^3=(\text{右辺})$ ［証明終］

⑶　［証明］

$(\text{左辺})=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$=a^4+a^2b^2+b^4$

$=(\text{右辺})$ ［証明終］

141　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$　とおくと

$a=kb$，$c=kd$　である。

⑴　［証明］

$(\text{左辺})=\frac{b}{a+b}=\frac{b}{kb+b}=\frac{1}{k+1}$,

$(\text{右辺})=\frac{d}{c+d}=\frac{d}{kd+d}=\frac{1}{k+1}$

よって　$(\text{左辺})=(\text{右辺})$　［証明終］

⑵　［証明］

$(\text{左辺})=\frac{a-b}{b}=\frac{kb-b}{b}=k-1$,

$(\text{右辺})=\frac{c-d}{d}=\frac{kd-d}{d}=k-1$

よって　$(\text{左辺})=(\text{右辺})$　［証明終］

142 ⑴　［証明］

条件より$y=-x$だから

$(\text{右辺})=2xy+3y^2$

$=2x\cdot(-x)+3(-x)^2$

$=x^2=(\text{左辺})$　［証明終］

⑵　［証明］

条件より$x=1-y$だから

$\left(左辺\right)=x^2-x=x(x-1)$

$=(1-y)(1-y-1)=y^2-y=\left(右辺\right)$　［証明終］

⑶　［証明］

条件より $y=1-x$ だから

$\left(左辺\right)=x^2+y^2+1$

$=x^2+(1-x)^2+1$

$=x^2+1-2x+x^2+1=2(x^2-x+1)$

$\left(右辺\right)=2(x+y-xy)$

$=2\{x+1-x-x(1-x)\}$

$=2(x^2-x+1)$

よって　$\left(左辺\right)=\left(右辺\right)$　［証明終］

143　⑴　［証明］

$\left(左辺\right)-\left(右辺\right)=\frac{3x-y}{2}-\frac{4x-y}{3}$

$=\frac{9x-3y-8x+2y}{6}=\frac{x-y}{6}>0$

よって　$\left(左辺\right)>\left(右辺\right)$　［証明終］

⑵　［証明］

$\left(左辺\right)-\left(右辺\right)$

$=x^3-y^3-2xy(x-y)$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)-2xy(x-y)$

$=(x-y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x-y)\left\{\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right\}>0$

よって　$\left(左辺\right)>\left(右辺\right)$　［証明終］

144　⑴　［証明］

条件より　$a-1>0$，$b-1>0$

$\left(左辺\right)-\left(右辺\right)=ab-(a+b-1)$

$=a(b-1)-(b-1)$

$=(a-1)(b-1)>0$

よって　$\left(左辺\right)>\left(右辺\right)$　［証明終］

⑵　［証明］

$\left(中辺\right)-\left(左辺\right)=\frac{a+c}{b+c}-1$

$=\frac{a+c-(b+c)}{b+c}=\frac{a-b}{b+c}>0$

よって　$\left(中辺\right)>\left(左辺\right)$

$\left(右辺\right)-\left(中辺\right)=\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}$

$$= \frac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}$$

$$= \frac{(a-b)c}{(b+c)b} > 0$$

したがって　$(右辺) > (中辺)$

よって　$(左辺) < (中辺) < (右辺)$　［証明終］

145　⑴　［証明］

$(左辺) - (右辺)$

$= x^2 + 4 - 4x = (x-2)^2 \geqq 0$

よって　$(左辺) \geqq (右辺)$

等号成立条件は $x = 2$　［証明終］

⑵　［証明］

$(左辺) = x^2 + 2x + 3$

$= (x^2 + 2x + 1) + 2$

$= (x+1)^2 + 2 > 0$　［証明終］

⑶　［証明］

$(左辺) = 4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$

$\geqq 0$

等号成立条件は $2x = y$　［証明終］

146　⑴　［証明］

$(左辺) = x^2 - 6xy + 9y^2 = (x - 3y)^2$

$\geqq 0$

等号成立条件は　$x = 3y$　［証明終］

⑵　［証明］

$(左辺) = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$

$= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1)$

$= (x-2)^2 + (y+1)^2 \geqq 0$

等号成立条件は　$x = 2$ かつ $y = -1$　［証明終］

⑶　［証明］

$(左辺) - (右辺) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - xy$

$= \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) = \frac{1}{2}(x-y)^2 \geqq 0$

等号成立条件は　$x = y$　［証明終］

⑷　［証明］

$(左辺) = x^2 + 5y^2 - 4xy$

$= (x^2 - 4xy + 4y^2) + y^2$

$= (x - 2y)^2 + y^2 \geqq 0$

等号成立条件は　$x=y=0$　［証明終］

⑸　［証明］

$$\left(\text{左辺}\right)-\left(\text{右辺}\right)=x^4+y^4-x^3y-xy^3$$
$$=x^3(x-y)-y^3(x-y)$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x-y)$$
$$=(x-y)^2\left\{\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right\}\geqq 0$$

等号成立条件は　$x=y$　［証明終］

⑹　［証明］

$$\left(\text{左辺}\right)-\left(\text{右辺}\right)$$
$$=x^2+y^2-2(x-y-1)$$
$$=(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)$$
$$=(x-1)^2+(y+1)^2\geqq 0$$

等号成立条件は　$x=1$　かつ　$y=-1$　［証明終］

147　⑴　［証明］

$a>0$，$\frac{3}{a}>0$　だから，

相加平均と相乗平均の関係より

$$a+\frac{3}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{3}{a}}=2\sqrt{3}$$

等号成立条件は　$a=\frac{3}{a}$

すなわち　$a^2=3$　よって　$a=\sqrt{3}$　［証明終］

⑵　［証明］

$\frac{b}{3a}>0$，$\frac{12a}{b}>0$　だから，

相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{b}{3a}+\frac{12a}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{b}{3a}\cdot\frac{12a}{b}}=4$$

等号成立条件は　$\frac{b}{3a}=\frac{12a}{b}$

すなわち　$36a^2=b^2$

よって　$6a=b$　［証明終］

⑶　与式$=a+1+\frac{9}{a+1}-1$

$a+1>0$，$\frac{1}{a+1}>0$　だから相加平均と相乗平均の関係より

$$a+1+\frac{9}{a+1}-1\geqq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{9}{a+1}}-1=6-1=5$$

等号成立条件は　$a+1=\frac{9}{a+1}$　すなわち　$(a+1)^2=9$

$a+1=\pm3$，$a>0$　だから　$a=2$

148 ⑴ ［証明］

条件より $c=-a-b$ だから

$\left(\text{左辺}\right)=\frac{b-a-b}{a}+\frac{-a-b+a}{b}+\frac{a+b}{-a-b}$

$=-1-1-1=-3=\left(\text{右辺}\right)$ ［証明終］

⑵ ［証明］

条件 $abc=1$ より

$\frac{b}{bc+b+1}=\frac{b}{bc+b+abc}$

$=\frac{1}{c+1+ac}$

$=\frac{abc}{c+abc+ac}=\frac{ab}{1+ab+a}$

$\frac{c}{ca+c+1}=\frac{c}{ca+c+abc}$

$=\frac{1}{a+1+ab}$

よって $\left(\text{左辺}\right)$

$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$

$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}$

$=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}=1=\left(\text{右辺}\right)$ ［証明終］

⑶ ［証明］

条件 $x+\frac{1}{y}=1,\ y+\frac{1}{z}=1$ より

$x=\frac{y-1}{y},\ z=-\frac{1}{y-1}$ だから

$z+\frac{1}{x}=-\frac{1}{y-1}+\frac{y}{y-1}=\frac{y-1}{y-1}=1$ ［証明終］

⑷ ［証明］

条件 $3x+y=3z$ …①

$x+z=3y$ …② からyを消去すると

$x=\frac{4}{5}z$ …③

③を①に代入すると $y=\frac{3}{5}z$ …④

③，④より

$\left(\text{左辺}\right)=x^2+y^2=\frac{16}{25}z^2+\frac{9}{25}z^2=z^2$

$=\left(\text{右辺}\right)$ ［証明終］

149 ［証明］

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=k$とおくと

$x=ka,\ y=kb$ だから

$\left(\text{左辺}\right)=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

$=(a^2+b^2)(k^2a^2+k^2b^2)=k^2(a^2+b^2)^2$

$\left(\text{右辺}\right)=(ax+by)^2=(ka^2+kb^2)^2$

$=k^2(a^2+b^2)^2$

よって $\left(\text{左辺}\right)=\left(\text{右辺}\right)$ ［証明終］

150　［証明］

$\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}=k$　とおくと

$x=k(b+c)$，$y=k(c+a)$,

$z=k(a+b)$　だから

$(\text{左辺})=(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$

$=(b-c)\cdot k(b+c)+(c-a)\cdot k(c+a)+(a-b)\cdot k(a+b)$

$=k(b^2-c^2)+k(c^2-a^2)+k(a^2-b^2)$

$=0=(\text{右辺})$　［証明終］

151　［証明］

$\frac{y+2z}{x}=\frac{z+2x}{y}=\frac{x+2y}{z}=k$　とおくと

$y+2z=kx$ …①　$z+2x=ky$ …②

$x+2y=kz$ …③

①，②，③を辺々加えて

$3(x+y+z)=k(x+y+z)$

つまり $(x+y+z)(k-3)=0$

よって　$x+y+z=0$ または $k=3$ となる。

ここで $k=3$ のとき，①，②，③は

$3x-y-2z=0$ …①′

$2x-3y+z=0$ …②′

$x+2y-3z=0$ …③′　だから

①′＋②′×2 より $x=y$ が得られ，

これを③′に代入すると $x=z$ が得られる。

以上より，$\frac{y+2z}{x}=\frac{z+2x}{y}=\frac{x+2y}{z}$ ならば，

$x+y+z=0$ または $x=y=z$ である。　［証明終］

152　［証明］

左辺を展開すると

$(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}+5$ …①

ここで $\frac{2a}{b}>0$，$\frac{2b}{a}>0$ より

相加平均・相乗平均の関係より

$\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{a}}=4$ …②

①，②より

$(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq 9$

等号成立条件は $\frac{2a}{b}=\frac{2b}{a}$

すなわち　$a=b$　［証明終］

153　⑴　［証明］

両辺が正より

$\left(右辺\right)^2-\left(左辺\right)^2$

$=\left(\sqrt{a}+2\right)^2-\left(\sqrt{a+4}\right)^2$

$=a+4\sqrt{a}+4-(a+4)=4\sqrt{a}>0$

よって　$\left(\sqrt{a}+2\right)^2>\left(\sqrt{a+4}\right)^2$

$\sqrt{a+4}>0$，$\sqrt{a}+2>0$ より

$\sqrt{a+4}<\sqrt{a}+2$　［証明終］

⑵　［証明］

両辺が正より

$\left(左辺\right)^2-\left(右辺\right)^2$

$=\left(2\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{4a+9b}\right)^2$

$=4a+12\sqrt{ab}+9b-(4a+9b)$

$=12\sqrt{ab}>0$

よって　$\left(2\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)^2>\left(\sqrt{4a+9b}\right)^2$

$2\sqrt{a}+3\sqrt{b}>0$，$\sqrt{4a+9b}>0$ より

$2\sqrt{a}+3\sqrt{b}>\sqrt{4a+9b}$　［証明終］

154　［証明］

$\left(右辺\right)^2-\left(左辺\right)^2$

$=\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$

$=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$

$=\frac{(a-b)^2}{4}\geqq 0$　　よって　$\left(右辺\right)^2\geqq\left(左辺\right)^2$

両辺が正より　$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqq\frac{a+b}{2}$

等号成立条件は　$a=b$　［証明終］

155　［証明］

両辺が正より

$\left(左辺\right)^2-\left(右辺\right)^2$

$=\left(\sqrt{ax+by}\sqrt{x+y}\right)^2-\left(\sqrt{a}x+\sqrt{b}y\right)^2$

$=ax^2+(a+b)xy+by^2-\left(ax^2+2\sqrt{ab}xy+by^2\right)$

$=\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)xy$

$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2xy\geqq 0$

等号成立条件は　$a=b$　［証明終］

156　［証明］

$|a+b| \leqq |a|+|b|$　において

⑴　$b \to -b$に置き替えると

$|a-b| \leqq |a|+|-b| = |a|+|b|$

⑵　$b \to b+c$に置き替えると

$|a+b+c| \leqq |a|+|b+c|$

$|b+c| \leqq |b|+|c|$が成り立つから

$|a+b+c| \leqq |a|+|b+c| \leqq |a|+|b|+|c|$

が成り立つ。　［証明終］

3 章の問題

1　条件より$P(x)$は

$P(x) = (x^2-x-1)(ax+b)+5x-9$　……①

$P(x) = (2x^2+3)(cx+d)+2x-1$　……②

と表せるから① = ②より

$ax^3-(a-b)x^2-(a+b-5)x-b-9 = 2cx^3+2dx^2+(3c+2)x+3d-1$

両辺の係数を比較して

$a=2c$　……①，$-a+b=2d$　……②，$-a-b+5=3c+2$　……③

$-b-9=3d-1$　……④

①を②，③に代入して

$b-2c-2d=0$　……②′　$b+5c=3$　……③′

②′ − ④より　$2c+5d=-8$　……⑤

③′ + ④より　$5c-3d=11$　……⑥

⑤，⑥を解いて　$c=1$，$d=-2$　（$a=2$，$b=-2$）

よって，$P(x)=2x^3-4x^2+5x-7$

2　条件より$P(x)$は

$P(x)=(x+1)^2(x+a)+x+1$　……①

$P(x)=(x-1)^2(x+b)+x+c$　……②

と表せる。

$x=1$，-1，0　①，②に代入して

$P(1)=4+4a+2=1+c$　∴　$4a-c=-5$　……③

$P(-1)=0=-4+4b-1+c$　∴　$4b+c=5$　……④

$P(0)=a+1=b+c$　∴　$a-b-c=-1$　……⑤

③，④，⑤を解いて　$a=-2$，$b=2$，$c=-3$

よって，$c=-3$，$P(x)=x^3-2x-1$

3　条件より　$f(-1)=9$　…①

$f(x)=(x-1)(x-2)g(x)+8x-1$　…②

⑴　$f(x)$を$(x+1)(x-2)$で割ったときの商を$Q(x)$，

余りを$ax+b$とすると

$f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$ とおける。

$f(-1)=-a+b=9$　…③　（①より）

②より$f(2)=8\cdot 2-1=15$ だから

$f(2)=2a+b=15$　…④

③，④を解いて　$a=2$，$b=11$

よって，余りは$2x+11$

⑵　$g(x)$を$x+1$で割った余りは$g(-1)$だから

②に$x=-1$を代入して

$f(-1)=(-2)\cdot(-3)g(-1)-9=9$　（①より）

$6g(-1)=18$　∴　$g(-1)=3$

よって，余りは 3

⑶　$f(x)$を $(x^2-1)(x-2)=(x+1)(x-1)(x-2)$ で割ったときの

商を$Q(x)$，余りをax^2+bx+cとすると

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ とおける。

①より $f(-1)=a-b+c=9$　…⑤

②より $f(1)=a+b+c=7$　…⑥

④より $f(2)=4a+2b+c=15$ …⑦

⑤，⑥，⑦を解いて

$a=3$，$b=-1$，$c=5$　よって，余りは$3x^2-x+5$

4　$P(x)$を $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ で割ったときの

商を$Q(x)$，余りを$ax+b$とすると

$P(x)=x^n-x=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$P(1)=0=a+b$　…①

$P(2)=2^n-2=2a+b$　…②

①，②を解いて　$a=2^n-2$　$b=-2^n+2$

よって，余りは$(2^n-2)x-(2^n-2)$

5　$y=1-x$を与式に代入すると

$ax^2+bx(1-x)+c(1-x)^2=1$

$(a-b+c)x^2+(b-2c)x+c-1=0$

xについての恒等式だから

$a-b+c=0$　…①，$b-2c=0$　…②，$c-1=0$　…③

①，②，③を解いて　$a=1$，$b=2$，$c=1$

6　両辺に$(x-1)(x^2+x+1)$を掛けて分母を払うと

$1=a(x^2+x+1)+(x-1)(bx+c)$

$1=(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c$

これが恒等式になる条件は

$a+b=0$ …①，$a-b+c=0$ …②，$a-c=1$ …③

①，②，③を解いて　$a=\frac{1}{3}$，$b=-\frac{1}{3}$，$c=-\frac{2}{3}$

7　$\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}=k$ とおく。

$b+c=ak$ …①，$c+a=bk$ …②，$a+b=ck$ …③

①，②，③を辺々加えると

$2(a+b+c)=k(a+b+c)$

$(a+b+c)(k-2)=0$

$a+b+c=0$ または $k=2$

$a+b+c=0$ のとき，与式は

$\frac{-a}{a}=\frac{-b}{b}=\frac{-c}{c}=-1$　　∴　$k=-1$

$k=2$ のとき，①，②，③に代入すると

$b+c=2a$，$c+a=2b$，$a+b=2c$

これは，$a=b=c$ のとき成り立つ。

よって，この式の値は-1，2

8　⑴　$\frac{x^2-2x+3}{x}=x-2+\frac{3}{x}$

$x>0$ だから相加平均と相乗平均の関係より

$x+\frac{3}{x}-2\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{3}{x}}-2=2\sqrt{3}-2$

等号成立は $x=\frac{3}{x}$ より $x=\sqrt{3}$

よって，最小値は $x=\sqrt{3}$ のとき$2\sqrt{3}-2$

⑵　最大値は $a=1$，$b=\frac{4}{3}$ のとき$\frac{4}{3}$

9　$x^3+3x^2+5x+6=0$

$(x+2)(x^2+x+3)=0$

$x+2=0$ …①，$x^2+x+3=0$ …②

2 つの解を共有するのは②のときだから $k=3$

ただ 1 つの解を共有するのは$x=-2$を解にもつときだから

$(-2)^2-2+k=0$ より $k=-2$

10　⑴　3 次方程式の解と係数の関係より（問題 138 参照）

$\alpha+\beta+\gamma=3$，　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$，　$\alpha\beta\gamma=-1$

⑵　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=3^2-2\cdot 2=5$

⑶　因数分解の公式 $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ より

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3(5-2)+3\cdot(-1)=6$

$\boxed{\text{別解}}$　$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ が成り立つから

$\alpha^3 = 3\alpha^2 - 2\alpha - 1$

同様に，$\beta^3 = 3\beta^2 - 2\beta - 1$，$\gamma^3 = 3\gamma^2 - 2\gamma - 1$ だから

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha + \beta + \gamma) - 3$

$= 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 - 3 = 6$

⑷　$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)$

$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2\{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)\}$

$= 5^2 - 2\{2^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 3\} = 5$

11　［証明］

条件 $a + b + c = 0$ より，$a + c = -b$，$b + c = -a$ だから

$(\text{左辺}) = -\frac{a^2}{b(a+b)} - \frac{b^2}{a(b+a)} + \frac{(a+b)^2}{ab}$

$= \frac{-a^3 - b^3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{ab(a+b)}$

$= \frac{3ab(a+b)}{ab(a+b)} = 3 = (\text{右辺})$　［証明終］

12　⑴　［証明］

条件 $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ より

$a + b + c = 1$ …①　および

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ca + ab}{abc} = 1$

よって　$abc = ab + bc + ca$ …②

また，$a + b + c = 1$ より $a + b = 1 - c$，$b + c = 1 - a$，$c + a = 1 - b$　だから，①，②より

$(\text{左辺}) = (1 - c)(1 - a)(1 - b)$

$= 1 - (a + b + c) + (ab + bc + ca) - abc = 0$　［証明終］

⑵　［証明］

⑴より　$a + b = 0$　または　$b + c = 0$　または　$c + a = 0$

（ⅰ）$a + b = 0$のとき

$b = -a$　であり，また，$a + b + c = 1$ より $c = 1$　だから

$(\text{左辺}) = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{(-a)^n} + \frac{1}{1^n}$，

$= \frac{1}{a^n} - \frac{1}{a^n} + 1$　　(nは奇数より)

$= 1$

（ⅱ）$b + c = 0$，（ⅲ）$c + a = 0$ の場合も同様　［証明終］

13　［証明］

条件 $a+b=c+d$ より　$d=a+b-c$ …①

①を条件 $a^2+b^2=c^2+d^2$ に代入すると

$$a^2+b^2=c^2+(a+b-c)^2$$
$$=a^2+b^2+2c^2+2ab-2bc-2ca$$

つまり　$2(c^2+ab-bc-ca)=0$

したがって　$(c-a)(c-b)=0$

よって　$a=c$ または $b=c$

（ｉ）$a=c$ のとき，①より $b=d$

（ⅱ）$b=c$ のとき，①より $a=d$

よって　$a=c$，$b=d$　または　$a=d$，$b=c$　［証明終］

14　⑴　［証明］

$$P(x)=\left(\text{左辺}\right)-\left(\text{右辺}\right)$$
$$=x^4-x^3-x+1$$
$$=x^3(x-1)-(x-1)$$
$$=(x-1)(x^3-1)$$
$$=(x-1)^2(x^2+x+1)$$
$$=(x-1)^2\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}\geqq 0$$

よって　$\left(\text{左辺}\right)\geqq\left(\text{右辺}\right)$

等号成立条件は　$x=1$　［証明終］

⑵　［証明］

$$\left(\text{左辺}\right)-\left(\text{右辺}\right)$$
$$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)-(x^3+y^3)^2$$
$$=(x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6)-(x^6+2x^3y^3+y^6)$$
$$=x^2y^2(x^2-2xy+y^2)$$
$$=x^2y^2(x-y)^2\geqq 0$$

よって　$\left(\text{左辺}\right)\geqq\left(\text{右辺}\right)$

等号成立条件は　$x=y$，または $x=0$，または $y=0$　［証明終］

15　$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$ として与式に代入すると

$2ab=\frac{4}{9}$，$a^2+b^2=\frac{5}{9}$ だから

$2ab<\frac{1}{2}<a^2+b^2$ と予想される。

$a^2+b^2-\frac{1}{2}=a^2+(1-a)^2-\frac{1}{2}=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2>0$

∴　$a^2+b^2>\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}-2ab=\frac{1}{2}-2a(1-a)=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2>0$

∴　$\frac{1}{2}>2ab$

よって，a^2+b^2，$\frac{1}{2}$，$2ab$

16　⑴　［証明］

$(\text{左辺})-(\text{右辺})$

$=(a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2)$

$-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx)$

$=(b^2x^2-2abxy+a^2y^2)+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(a^2z^2-2cazx+c^2x^2)$

$=(bx-ay)^2+(bz-cy)^2+(az-cx)^2$

$\geqq 0$

よって　$(\text{左辺})\geqq(\text{右辺})$

等号成立条件は

$bx=ay$，$bz=cy$，$az=cx$　［証明終］

⑵　［証明］

⑴において，a，b，c，x，y，zをそれぞれ$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{2}a$，$\sqrt{3}b$，$\sqrt{5}c$とおけばよい。

等号成立条件は　$a=b=c$　［証明終］

17　［証明］　$a-\sqrt{2}>0$

$\frac{a+2}{a+1}-\sqrt{2}=\frac{a+2-\sqrt{2}a-\sqrt{2}}{a+1}$

$=\frac{-(\sqrt{2}-1)a+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{a+1}$

$=-\frac{(\sqrt{2}-1)(a-\sqrt{2})}{a+1}<0$

よって　$\frac{a+2}{a+1}<\sqrt{2}$

$\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{a}\right)-\sqrt{2}=\frac{a^2+2-2\sqrt{2}a}{2a}$

$=\frac{(a-\sqrt{2})^2}{2a}>0$

よって　$\sqrt{2}<\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$

以上より，小さい順に並べると

$\frac{a+2}{a+1}$，$\sqrt{2}$，$\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$　［証明終］

18　⑴　$ab+1-a-b=(a-1)(b-1)$

$|a|<1$，$|b|<1$　より　$a-1<0$，$b-1<0$ だから

$(a-1)(b-1)>0$

$\therefore \quad ab+1>a+b$

⑵　⑴の不等式に$b \to bc$を代入（$|bc|<1$）すると

$abc+1>a+bc$　…①

ここで，$bc+1>b+c$ だから①に $bc>b+c-1$ を代入すると

$abc+1>a+bc>a+b+c-1$

$\therefore \quad abc+2>a+b+c$