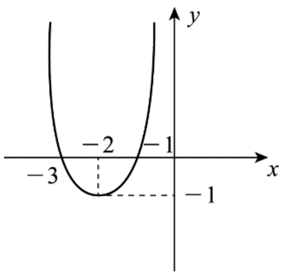
４章　関数とグラフ

157　平行移動は以下の通り。

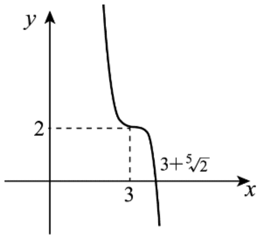
⑴　x軸方向に-2，y軸方向に-1

$y=(x+2)^4-1$



⑵　x軸方向に3，y軸方向に2

$y=-(x-3)^5+2$



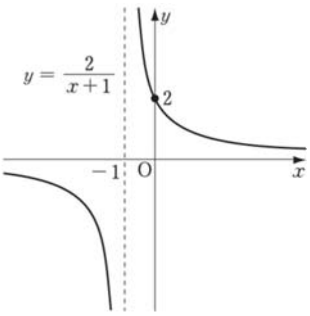
158　⑴　漸近線：$x=-1$，$y=0$

⑵　漸近線：$x=0$，$y=3$

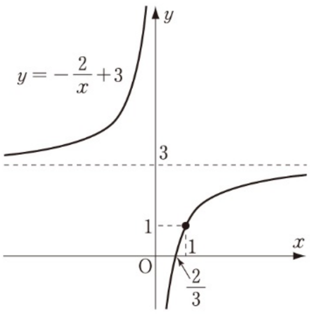
⑶　漸近線：$x=2$，$y=-1$

グラフは下図のとおり

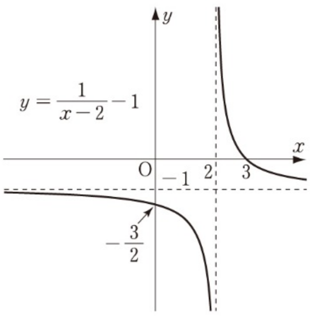
⑴



⑵



⑶

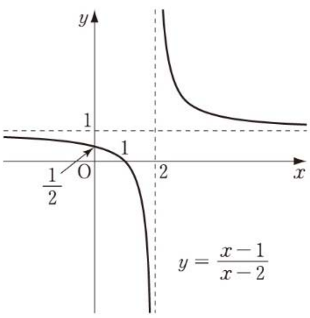


159　⑴　漸近線：$x=2$，$y=1$

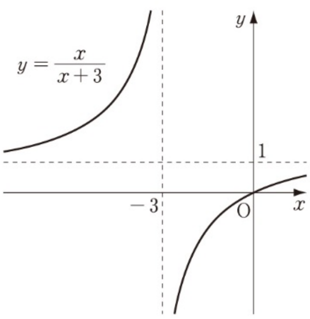
⑵　漸近線：$x=-3$，$y=1$

⑶　漸近線：$x=\frac{3}{2}$，$y=1$

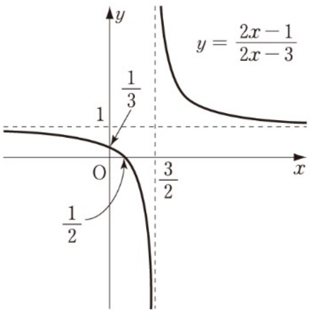
⑴



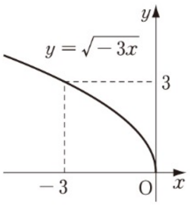
⑵



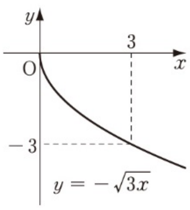
(3)


$y = \frac{2x-1}{2x-3}$
y
x
O
1
$\frac{1}{3}$
$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$

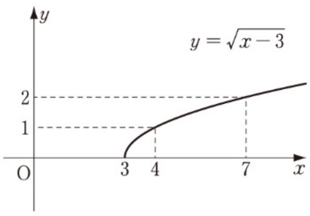
160　(1)


$y = \sqrt{-3x}$
y
x
3
-3
O

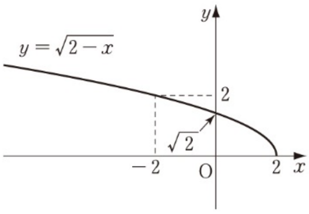
(2)


y
x
3
O
-3
$y = -\sqrt{3x}$

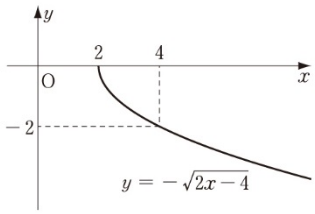
(3)


$y = \sqrt{x-3}$
y
x
2
1
O
3
4
7

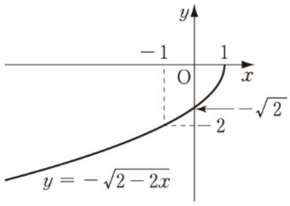
(4)


$y = \sqrt{2-x}$
y
x
2
$\sqrt{2}$
-2
O
2

⑸



⑹

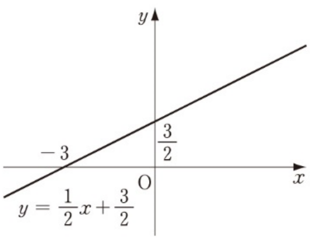


161 ⑴ $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

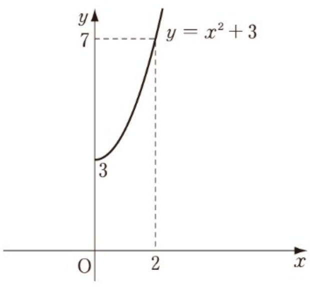
⑵ $f^{-1}(x)=x^2+3\ \ (x\geqq 0)$

⑶ $f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-1}$

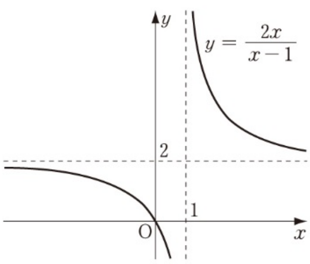
⑴



⑵



⑶



162 ⑴ 求める逆関数は $y=\frac{1}{2}x-2$

定義域は $2 \leqq x \leqq 8$

値域は $-1 \leqq y \leqq 2$

⑵ 求める逆関数は $y=\sqrt{x-3}$

定義域は $3 \leqq x \leqq 4$

値域は $0 \leqq y \leqq 1$

⑶ 求める逆関数は $y=\frac{1}{x}+1$

定義域は $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$

値域は $2 \leqq y \leqq 3$

⑷ 求める逆関数は $y=x^2+2$

定義域は $0 \leqq x \leqq 1$

値域は $2 \leqq y \leqq 3$

163 ⑴ $(g \circ f)(x)=2x+1$

$(f \circ g)(x)=2x$

⑵ $(g \circ f)(x)=9x^2+12x+3$

$(f \circ g)(x)=3x^2-1$

⑶ $(g \circ f)(x)=\frac{2}{2x^2+1}$

$(f \circ g)(x)=\frac{8}{x^2}+1$

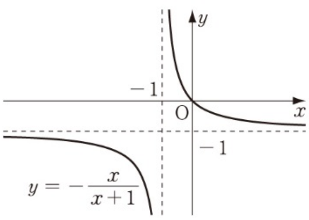
⑷ $(g \circ f)(x)=x+3$

$(f \circ g)(x)=\sqrt{x^2+3}$

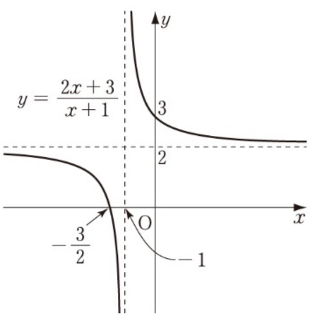
164 ⑴ 偶関数 ⑵ どちらでもない ⑶ 奇関数 ⑷ 奇関数

⑸ どちらでもない ⑹ 偶関数

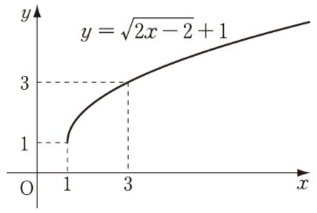
165 ⑴



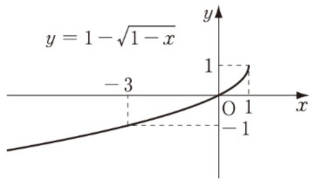
⑵



⑶



⑷



166　⑴　$y=-\frac{2x}{x+2}=\frac{4}{x+2}-2$

グラフの交点は

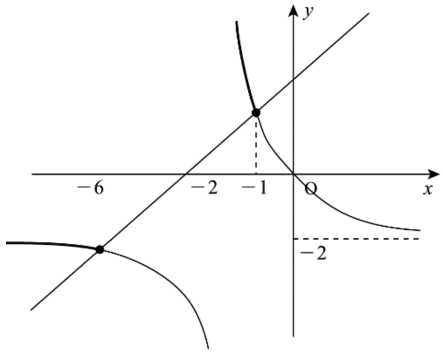
$x+3=-\frac{2x}{x+2}$ より

$x^2+5x+6=-2x$

$(x+1)(x+6)=0$

$x=-1,\ -6$

よって，グラフより　$x \leqq -6,\ -2<x \leqq -1$



⑵　グラフの交点は

$\sqrt{5-x}=x-3$ より

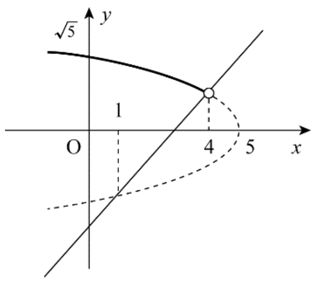
$5-x=x^2-6x+9$

$(x-1)(x-4)=0$

$x=1,\ 4$

よって，グラフより

$x<4$



167　$f(1)=a+b=-1$　…①

$f^{-1}(1)=2$ より $f(2)=1$

∴　$f(2)=2a+b=1$　…②

①，②を解いて $a=2,\quad b=-3$

168　$2p-1=0$　すなわち $p=\frac{1}{2}$ のとき $y=2$

となり不適。　∴　$p \neq \frac{1}{2}$

$y=\frac{2x+1}{x+p}$　より　$x=\frac{1-py}{y-2}$

x，yと入れかえて　$y=\frac{1-px}{x-2}$

これが元の関数と一致するから $p=-2$（$p \neq \frac{1}{2}$ を満たす。）

169　$(f\circ f)(x)=a\big(f(x)\big)+b=a(ax+b)+b$

$$=a^2x+ab+b$$

$a^2x+ab+b \quad \Leftrightarrow \quad 4x-3$ より

$a^2=4$　…①，$ab+b=-3$　…②

①，②を解いて

$a=2$，$b=-1$ または $a=-2$，$b=3$

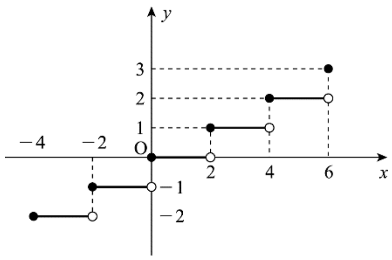
170　(1)　$n \leqq \frac{x}{2} < n+1$ すなわち

$2n \leqq x < 2(n+1)$ のとき

$\left[\frac{x}{2}\right]=n$

（例）　$2 \leqq x < 4$ のとき $\left[\frac{x}{2}\right]=1$

よって，グラフは右図のようになる。



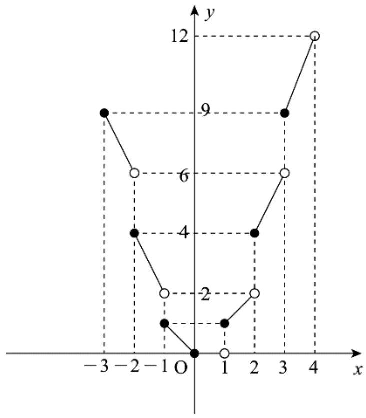
(2)　$n \leqq x < n+1$ のとき

$x[x]=nx$

（例）　$2 \leqq x < 3$ のとき

$x[x]=2x$

と表せるからグラフは右図のようになる。

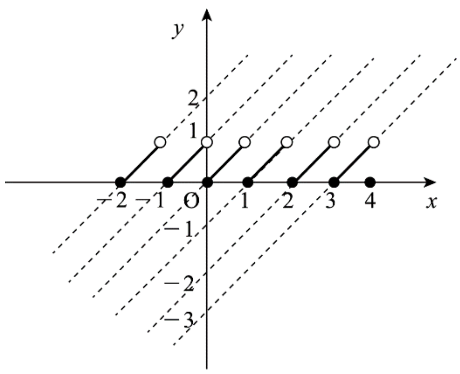


(3)　$n \leqq x < n+1$ のとき $[x]=n$ だから

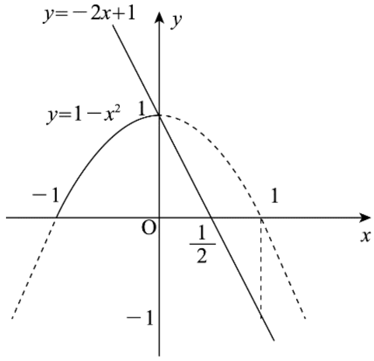
$y=x-n$（$n \leqq x < n+1$）

（例）　$1 \leqq x < 2$ のとき $y=x-1$

と表せるから，グラフは右図のようになる。



171 ⑴



⑵ ⑴のグラフより

$-1 \leqq x \leqq 0$ のとき $0 \leqq f(x) \leqq 1$ …①

$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ のとき $0 \leqq f(x) \leqq 1$ …②

$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ のとき $-1 \leqq f(x) \leqq 0$ …③

①のとき

$$(f \circ f)(x) = -2f(x) + 1 = -2(1 - x^2) + 1 = 2x^2 - 1$$

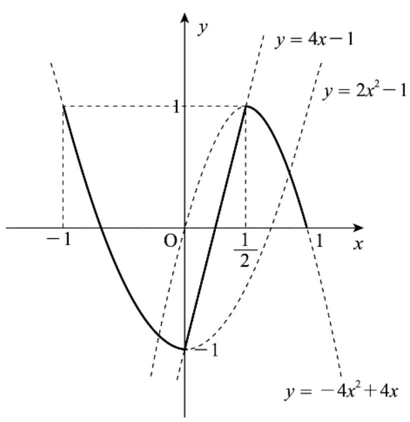
②のとき

$$(f \circ f)(x) = -2f(x) + 1 = -2(-2x + 1) + 1 = 4x - 1$$

③のとき

$$(f \circ f)(x) = 1 - \{f(x)\}^2 = 1 - (-2x + 1)^2 = -4x^2 + 4x$$

よって，グラフは下図のようになる



172　$(f\circ g)(x)=\frac{g(x)+3}{g(x)-2}=\frac{\frac{ax+b}{x+c}+3}{\frac{ax+b}{x+c}-2}=\frac{ax+b+3(x+c)}{ax+b-2(x+c)}$

$=\frac{(a+3)x+b+3c}{(a-2)x+b-2c}=\frac{1}{x}$となればよい。

$(a+3)x^2+(b+3c)x=(a-2)x+b-2c$

$(a+3)x^2+(-a+b+3c+2)x-b+2c=0$

xについての恒等式だから

$a+3=0$　…①，$-a+b+3c+2=0$　…②，$-b+2c=0$　…③

①，②，③を解いて　$a=-3$，$b=-2$，$c=-1$

４章の問題

1　②，⑤

2　⑧

3　$y-1=-\frac{4}{x-2}$ より $y=\frac{x-6}{x-2}$　…$\boxed{①}$

C_2は，①において $x\to -x$，$y\to -y$ として

$-y=\frac{-x-6}{-x-2}$　より　$y=-\frac{x+6}{x+2}$　…$\boxed{②}$

C_3はC_2の逆関数である。

②を x について解くと　$x=\frac{2y-6}{y-1}$,

x と y を入れかえて

$y=\frac{2x-6}{x-1}$　…$\boxed{③}$

②と③の交点は

$-\frac{x+6}{x+2}=\frac{2x-6}{x-1}$　より　$3x^2+3x-18=0$

$(x+3)(x-2)=0$　∴　$x=2$，-3

$x=2$ のとき $y=-2$，$x=-3$ のとき $y=3$

よって，交点は$(2,\ -2)$，$(-3,\ 3)$…$\boxed{④}$ $\boxed{⑤}$

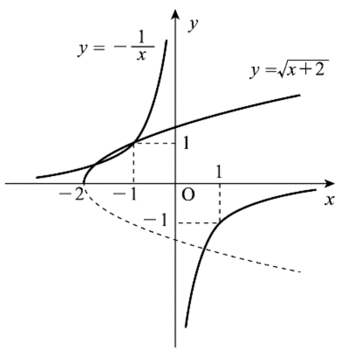
4　グラフの交点は

$-\frac{1}{x}=\sqrt{x+2}$ の両辺を 2 乗して

$\frac{1}{x^2}=x+2$ より $x^3+2x^2-1=0$

$(x+1)(x^2+x-1)=0$

$x=-1$，$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$



交点は$(-1,\ 1)$，$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

5　⑴　$a-2x \geqq 0$　だから　$x \leqq \frac{a}{2}$　これが $x \leqq 4$ と一致するから

$\frac{a}{2}=4$　∴　$a=8$

⑵　$3=\sqrt{-1+a}$　より　$a=10$

⑶　$y=\sqrt{2x-a}+b$ は $x \geqq \frac{a}{2}$ で増加するから

$x=6$ のとき $y=\sqrt{12-a}+b=5$　…①

$x=2$ のとき $y=\sqrt{4-a}+b=3$　…②

①，②より　$\sqrt{12-a}-\sqrt{4-a}=2$　…③

移項して両辺 2 乗する。

$\left(\sqrt{12-a}\right)^2=\left(\sqrt{4-a}+2\right)^2$

$12-a=4-a+4\sqrt{4-a}+4$

$\sqrt{4-a}=1$　∴　$a=3$（③を満たす。），$b=2$

6　⑴　$y=\frac{-2x+3}{x-1}$　　⑵　$y=\frac{-x+3}{2x-4}$

7　⑴　$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$，定義域は　$x \geqq 0$

⑵　$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$，

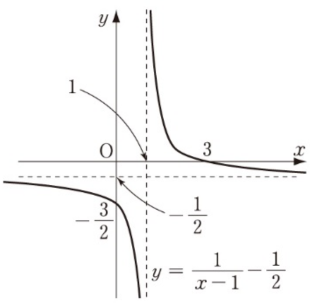
定義域は　$x \geqq -1$

8　⑴　$y=\frac{-x+3}{2x-2}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}$

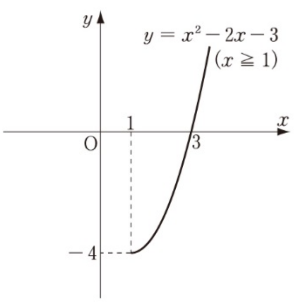
⑵　$y=x^2-2x-3$ $(x \geqq 1)$

グラフは下図のとおり

⑴



⑵



9　$(f \circ g)(x) = \dfrac{2\left(\frac{3x+b}{x+c}\right)+a}{\frac{3x+b}{x+c}+1} = \dfrac{6x+2b+ax+ac}{3x+b+x+c}$

$= \dfrac{(a+6)x+ac+2b}{4x+b+c} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{9x+8}{4x+3}$

$\therefore \quad a+6=9,\ ac+2b=8,\ b+c=3$

よって,

$a=3,\ b=1,\ c=2$

10　$y = \sqrt{ax+b} - c$

$(y-c)^2 = ax+b,\ x = \dfrac{(y-c)^2}{a} - \dfrac{b}{a}$

x と y を入れかえて

$y = \dfrac{1}{a}(x-c)^2 - \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{a}x^2 - \dfrac{2c}{a}x + \dfrac{c^2-b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{2}x^2 - 5x + 11$

$\therefore \quad \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{2c}{a} = -5,\ \dfrac{c^2-b}{a} = 11$

よって,

$a=2,\ b=3,\ c=5$

11　(1)　[証明]

$y=f(x)$ とおくと, $x=f^{-1}(y)$ だから $(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$　[証明終]

(2)　[証明]

$y=f(x)$ とおくと, (1)より

$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x))$

$= f^{-1}(f(-x)) = (f^{-1}\circ f)(-x)$

$= -x = -f^{-1}(y)$　[証明終]