5 章　指数関数・対数関数

1 節　指数関数

173　(1)　1　(2)　$\frac{1}{64}$　(3)　$\frac{1}{9}$　(4)　8

174　(1)　a　(2)　$\frac{1}{a^6}$　(3)　$\frac{b^9}{a^6}$　(4)　a　(5)　$\frac{1}{a^4}$　(6)　$\frac{1}{ab^8}$　(7)　27　(8)　1　(9)　100

175　(1)　2　(2)　± 2　(3)　4　(4)　-3　(5)　-2　(6)　5　(7)　$\frac{2}{3}$　(8)　0.3　(9)　-1

176　(1)　3　(2)　-6　(3)　4　(4)　9　(5)　2　(6)　3

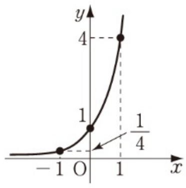
177　(1)　2　(2)　8　(3)　$\frac{1}{3}$　(4)　10　(5)　4

178　(1)　$a^{\frac{1}{5}}$　(2)　$a^{\frac{1}{2}}$　(3)　$a^{\frac{3}{4}}$　(4)　$a^{-\frac{1}{3}}$　(5)　$a^{-\frac{1}{2}}$　(6)　$a^{-\frac{2}{5}}$

179　(1)　16　(2)　3　(3)　$\frac{1}{8}$　(4)　$\sqrt[6]{a}$　(5)　$\frac{b}{a}$　(6)　$\frac{b}{a}$

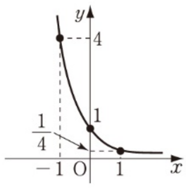
180　(1)　$\sqrt[3]{9}$　(2)　2　(3)　$\sqrt[3]{2}$　(4)　$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$　(5)　$a\sqrt[4]{a}$　(6)　$\sqrt{ab}$

181　(1)



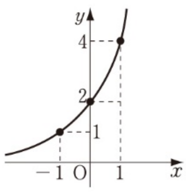
漸近線　$y = 0$

(2)



漸近線　$y = 0$

(3)



漸近線　$y = 0$

182　(1)　$3^{-1} < 3^0 < 3^{\frac{1}{2}} < 3^2$

(2)　$0.9^2 < 1 < 0.9^{-1} < 0.9^{-2}$

(3)　$\sqrt[6]{8} < \sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{8}$

(4)　$\sqrt[7]{8} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$

183　(1)　$x = 4$　(2)　$x = 5$　(3)　$x = -5$　(4)　$x = \frac{3}{2}$　(5)　$x = 6$　(6)　$x = \frac{1}{3}$

184　(1)　$x > 4$　(2)　$x < -3$　(3)　$x < 3$　(4)　$x \leqq -4$　(5)　$x \leqq \frac{3}{2}$　(6)　$x \geqq \frac{1}{4}$

185　(1)　$x = 0$，2　(2)　$x = 2$　(3)　$x = 3$　(4)　$x = -2$

186 ⑴ 24 ⑵ $\frac{1}{6}$ ⑶ $4\sqrt[3]{2}$ ⑷ $\sqrt[3]{3}$

187 ⑴ $a-b$ ⑵ $a+b$

188 ⑴ $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^3-3\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)$

$=\left(2\sqrt{2}\right)^3-3\cdot 2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

⑵ 与式$=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}$

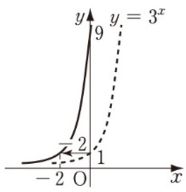
$=\left(2-1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$

189 ⑴ 2^{n+1} ⑵ $3^{n+1}-3^n=3^n(3-1)=2\cdot 3^n$

⑶ $18\times 3^n+3^{n+2}=18\times 3^n+9\times 3^n$

$=27\times 3^n=3^{n+3}$

190 ⑴



$y=9\cdot 3^x$

$=3^2\cdot 3^x$

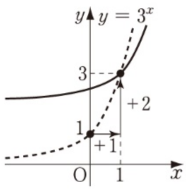
$=3^{x+2}$ は

$y=3^x$ のグラフを

x 軸方向に-2だけ

平行移動したもの。

⑵



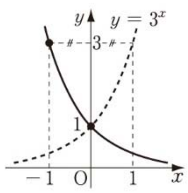
$y=3^x$ のグラフを

x 軸方向に$+1$

y 軸方向に$+2$

平行移動したもの。

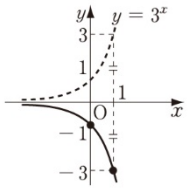
⑶



$y=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$y=3^x$ をy軸に関して対称移動したもの。

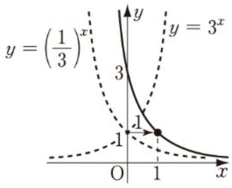
⑷



$y=3^x$ を

x軸に関して対称移動したもの。

⑸



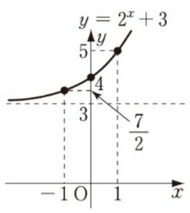
$y=3\cdot 3^{-x}$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$

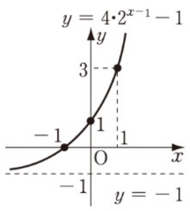
$=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ は

$y=3^x$ を y 軸に関して対称移動。さらにx軸方向に$+1$平行移動したもの。

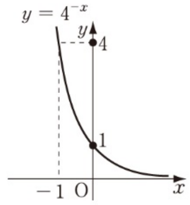
191 ⑴



⑵



⑶



192 ⑴ $\frac{1}{\sqrt[8]{243}} < 81^{-\frac{1}{7}} < \sqrt{3} < \sqrt[5]{27} < 9^{\frac{1}{3}}$

⑵ $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3} < \sqrt[6]{30} < \sqrt[4]{10}$

193 ⑴ $3^x = t$（$t \geqq 0$）とおくと

$y = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$

$t = 1$ すなわち $x = 0$ のとき最小値1，最大値はない。

⑵ $2^x = t$（$t \geqq 0$）とおくと

$y = -t^2 + 4t - 1 = -(t-2)^2 + 3$

$t = 2$，すなわち$x = 1$ のとき最大値3，最小値はない。

194 $1 + x^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(3^{\frac{2}{5}} - 2 + 3^{-\frac{2}{5}}\right)$

$= \frac{3^{\frac{2}{5}}+2+3^{-\frac{2}{5}}}{4}$

$= \left(\frac{3^{\frac{1}{5}}+3^{-\frac{1}{5}}}{2}\right)^2$

与式$= \left\{\frac{1}{2}\left(3^{\frac{1}{5}} - 3^{-\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{2}\left(3^{\frac{1}{5}} + 3^{-\frac{1}{5}}\right)\right\}^5$

$= \left\{\frac{1}{2}\left(3^{\frac{1}{5}} - 3^{-\frac{1}{5}} + 3^{\frac{1}{5}} + 3^{-\frac{1}{5}}\right)\right\}^5$

$= \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 3$

195 ⑴ $\{g(x)\}^2 - \{f(x)\}^2$

$= \left(\frac{a^x+a^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^x-a^{-x}}{2}\right)^2$

$= \frac{a^{2x}+2a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x}}{4} - \frac{a^{2x}-2a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x}}{4}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

⑵ $f(x)g(y) + g(x)f(y)$

$= \frac{a^x-a^{-x}}{2}\cdot\frac{a^y+a^{-y}}{2} + \frac{a^x+a^{-x}}{2}\cdot\frac{a^y-a^{-y}}{2}$

$= \frac{1}{4}(a^{x+y} + a^{x-y} - a^{-x+y} - a^{-x-y}) + \frac{1}{4}(a^{x+y} - a^{x-y} + a^{-x+y} - a^{-x-y})$

$= \frac{1}{2}\left\{a^{x+y} - a^{-(x+y)}\right\} = f(x+y)$

2 節　対数関数

196　⑴　$4 = \log_3 81$

⑵　$-\frac{4}{3} = \log_8 \frac{1}{16}$

⑶　$0 = \log_3 1$

197　⑴　$3^5 = 243$

⑵　$\left(\sqrt{2}\right)^6 = 8$

⑶　$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

198　⑴　3　⑵　0　⑶　-2　⑷　-2　⑸　$\frac{1}{3}$　⑹　-6　⑺　-4　⑻　-3　⑼　$\frac{3}{4}$

199　⑴　$\frac{5}{2}$　⑵　$\frac{1}{27}$　⑶　4　⑷　3

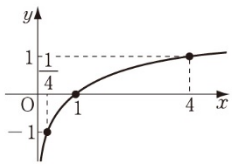
200　⑴　$\log_2 15$　⑵　2　⑶　1　⑷　-3

201　⑴　2　⑵　0　⑶　$-\frac{1}{2}$　⑷　2　⑸　2　⑹　3

202　⑴　$a + b$　⑵　$3a + b$　⑶　$3a + 2b$　⑷　$a - 2b$　⑸　$a + \frac{1}{2}b$　⑹　$-a + 2b + 1$

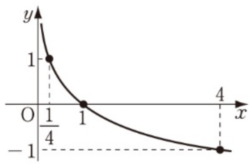
203　⑴　$\frac{3}{2}$　⑵　-4　⑶　-4

204　⑴



定義域は $x > 0$

⑵

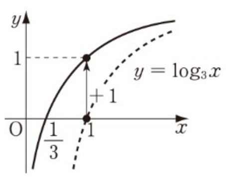


定義域は $x > 0$

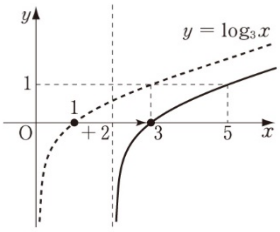
205　⑴　$y = \log_3 3x = \log_3 3 + \log_3 x$

$= \log_3 x + 1$　より

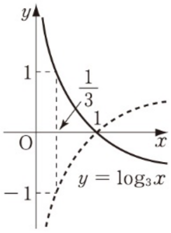
このグラフは，$y = \log_3 x$ のグラフを y 軸方向に$+1$ だけ平行移動



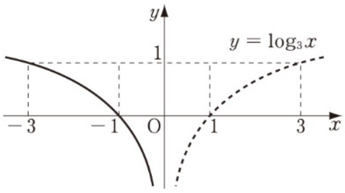
⑵　$y = \log_3(x - 2)$ は $y = \log_3 x$ のグラフを x 軸方向に$+2$ だけ平行移動



(3)　$y=\log_{\frac{1}{3}} x$ のグラフは $y=\log_3 x$ のグラフと x 軸に関して対称

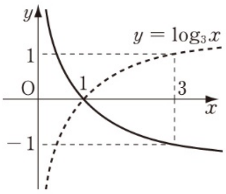


(4)　$y=\log_3(-x)$ のグラフは $y=\log_3 x$ のグラフと y 軸に関して対称



(5)　$y=\log_3 \frac{1}{x}=\log_3 x^{-1}=-\log_3 x$ より

$y=\log_3 x$ と x 軸に関して対称



206　(1)　$\log_2 \frac{1}{2}<\log_2 3<\log_2 5$

(2)　$\log_{0.3} 5<\log_{0.3} 3<\log_{0.3} \frac{1}{2}$

(3)　$\log_{\frac{1}{3}} 4<\log_3 4<\log_2 4$

(4)　$\log_2 \frac{1}{2}<\log_3 \frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$

207　(1)　$x=32$　(2)　$x=\frac{1}{8}$　(3)　$x=16$　(4)　$x=17$　(5)　$x=1$

208　(1)　$x=3$　(2)　$x=\pm 3$　(3)　$x=4$　(4)　$x=2$

209　(1)　$x>32$　(2)　$x>\frac{1}{36}$　(3)　$x \geqq \frac{\sqrt{3}}{3}$　(4)　$0<x \leqq 8$　(5)　$0<x<\frac{1}{8}$　(6)　$x>-\frac{17}{9}$

210　(1)　0.1959　(2)　0.9547　(3)　0.8451

211　(1)　2.0899　(2)　4.0899　(3)　-1.9101

212　(1)　1.0791　(2)　0.1761　(3)　0.6990　(4)　0.0970　(5)　0.6309　(6)　3.1701

213　(1)　2　(2)　3　(3)　1　(4)　4　(5)　4　(6)　$\frac{3}{2}$

214　(1)　1　(2)　6　(3)　0

215　⑴　真数は正だから　$0<x<2$　……①

$\log_{10}(x+1)(2-x)=\log_{10}x$

$(x+1)(2-x)=x$

$-x^2+x+2=x$　∴　$x=\pm\sqrt{2}$

①より$x=\sqrt{2}$

⑵　真数は正だから

$x^2-3x-4>0$ かつ $7-x>0$

$(x+1)(x-4)>0$　より　$x<-1,\ 4<x$

$7-x>0$　より　$x<7$

∴　$x<-1,\ 4<x<7$　……①

$\log_3(x^2-3x-4)=\log_3 3(7-x)$

$x^2-3x-4=3(7-x)$

$x^2=25$　∴　$x=\pm 5$　(①を満たす。)

⑶　真数は正だから　$x>1$　……①

$\log_2(x-1)+\frac{\log_2(x+4)}{\log_2 4}=1$

$2\log_2(x-1)+\log_2(x+4)=2$

$\log_2(x-1)^2(x+4)=\log_2 4$

$(x-1)^2(x+4)=4$

$x^3+2x^2-7x=0$

$x(x^2+2x-7)=0$

∴　$x=0,\ -1\pm 2\sqrt{2}$

①より　$x=-1+2\sqrt{2}$

⑷　真数は正だから　$x>0$　……①

$\log_3 x=\frac{\log_3(x+3)}{\log_3 9}+\log_3 2$

$2\log_3 x=\log_3(x+3)+2\log_3 2$

$\log_3 x^2=\log_3 4(x+3)$

$x^2=4(x+3)$

$(x-6)(x+2)=0$　∴　$x=6,\ -2$

①より$x=6$

216　⑴　真数は正だから　$x>3$　……①

$\log_2(x-2)(x-3)<\log_2 2$

底 2 は 1 より大きいから

$(x-2)(x-3)<2,\ (x-1)(x-4)<0$

∴　$1<x<4$　①より　$3<x<4$

⑵　真数は正だから　$0<x<3$　……①

$\log_2(3-x) \leqq \log_2 2x$

底 2 は 1 より大きいから

$3-x \leqq 2x$　∴　$x \geqq 1$

①より　$1 \leqq x < 3$

⑶　真数は正だから　$x>-1$　……①

$\log_3(x+1) < \frac{\log_3(x+3)}{\log_3 9}$

$\log_3(x+1)^2 < \log_3(x+3)$

底3は1より大きいから

$(x+1)^2 < x+3$，$(x+2)(x-1)<0$

∴　$-2<x<1$，①より　$-1<x<1$

⑷　真数は正だから　$x>1$　……①

$\log_{\frac{1}{2}} x(x-1) \leqq \log_{\frac{1}{2}} 2$

底$\frac{1}{2}$は1より小さいから

$x(x-1) \geqq 2$，$(x-2)(x+1) \geqq 0$

∴　$x \leqq -1$，$2 \leqq x$　①より　$x \geqq 2$

217　⑴　$(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$

$(\log_3 x + 1)(\log_3 x - 3) = 0$

∴　$\log_3 x = -1$，3

よって，$x = \frac{1}{3}$，27

⑵　真数は正だから$x>0$

$(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 8 > 0$

$(\log_2 x + 2)(\log_2 x - 4) > 0$

$\log_2 x < -2$，$4 < \log_2 x$

$\log_2 x < \log_2 \frac{1}{4}$，$\log_2 16 < \log_2 x$

底 2 は 1 より大きいから

$0 < x < \frac{1}{4}$，$16 < x$

218　⑴　$\log_2 x = t$　とおくと，$1 \leqq x \leqq 8$より　$0 \leqq t \leqq 3$

$y = -t^2 + 2t + 3 = -(t-1)^2 + 4$

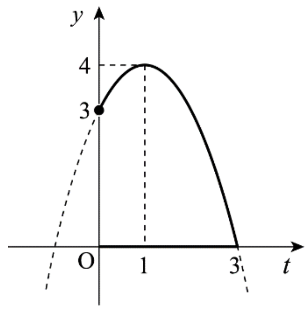
右のグラフより

$t=1$，すなわち$x=2$

のとき　最大値4

$t=3$，すなわち$x=8$

のとき　最小値0



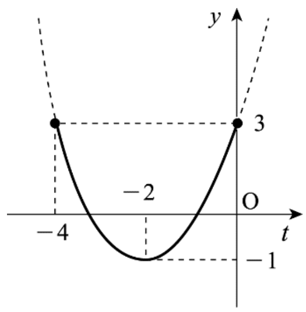
(2) $y=(\log_2 2x)(\log_2 8x)=(\log_2 x+\log_2 2)(\log_2 x+\log_2 8)$

$=(\log_2 x+1)(\log_2 x+3)$

$\log_2 x=t$とおくと，$\frac{1}{16}\leqq x\leqq 1$より$-4\leqq t\leqq 0$

$y=(t+1)(t+3)=(t+2)^2-1$

右のグラフより



$t=0$，-4 すなわち $x=1$，$\frac{1}{16}$ のとき　最大値3

$t=-2$ すなわち $x=\frac{1}{4}$のとき　最小値-1

219 (1) $\log_{10} 3^{50}=50\log_{10} 3=50\times 0.4771=23.855$

$\therefore\quad 10^{23}<3^{50}<10^{24}$　　よって，24桁

$3^{50}=10^{23.855}=10^{0.8550}\times 10^{23}$

$\log_{10} 7=0.8451$，$\log_{10} 8=3\log_{10} 2=0.9030$

$\therefore\quad 10^{0.8451}<10^{0.855}<10^{0.9030}$

ゆえに　$7<10^{0.855}<8$

よって，最高位の数は7

(2) $\log_{10} 7^{100}=100\log_{10} 7=100\times 0.8451=84.51$

$\therefore\quad 10^{84}<7^{100}<10^{85}$　よって，85桁

$7^{100}=10^{84.51}=10^{0.51}\times 10^{84}$

$\log_{10} 3=0.4771$，$\log_{10} 4=2\log_{10} 2=0.6020$

$\therefore\quad 10^{0.4771}<10^{0.51}<10^{0.6020}$

ゆえに　$3<10^{0.51}<4$

よって，最高位の数は3

220 (1) $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}=-30\log_{10} 2=-30\times 0.3010=-9.03$

$\therefore\quad 10^{-10}<\left(\frac{1}{2}\right)^{30}<10^{-9}$　よって，小数第10位

(2) $\log_{10} 0.6^{15}=\log_{10}\left(\frac{6}{10}\right)^{15}=15(\log_{10} 6-1)$

$=15(\log_{10} 2+\log_{10} 3-1)=15(0.3010+0.4771-1)$

$=-3.3285$

$\therefore\quad 10^{-4}<10^{-3.3285}<10^{-3}$　よって，小数第 4 位

221 $90\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n<10$　より両辺の常用対数をとると

$\log_{10}\left(\frac{9}{10}\right)^n<\log_{10}\frac{1}{9}$　$n(\log_{10} 9-1)<-\log_{10} 9$

$n(2\log_{10} 3-1)<-2\log_{10} 3$

$0.0458n>0.9542$　$\therefore\quad n>20.83\cdots\cdots$

よって，21回

222　$0.98^n < 0.5$　より両辺の常用対数をとると

$n\log_{10}0.98 < \log_{10}0.5$

$\log_{10}0.98 = \log_{10}(2\times 7^2\times 10^{-2}) = \log_{10}2 + 2\log_{10}7 - 2 = -0.0088$

$\log_{10}0.5 = \log_{10}\frac{1}{2} = -\log_{10}2 = -0.3010$

$-0.0088n < -0.3010$　$\therefore$　$n > 34.20\cdots\cdots$

よって，35年後

223　$3^x = 5^y = 15^5$　の各辺15を底とする対数をとると

$\log_{15}3^x = \log_{15}5^y = \log_{15}15^5 = 5$　より

$x = \frac{5}{\log_{15}3}$，$y = \frac{5}{\log_{15}5}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\log_{15}3}{5} + \frac{\log_{15}5}{5} = \frac{\log_{15}15}{5} = \frac{1}{5}$

224　$(\log_{10}a)(\log_{10}b) - \left(\log_{10}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(\log_{10}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$

$= \log_{10}a\log_{10}b - \frac{1}{2}\left(\log_{10}\frac{b}{a}\right)\frac{1}{2}\left(\log_{10}\frac{a}{b}\right)$

$= \log_{10}a\log_{10}b - \frac{1}{4}(\log_{10}b - \log_{10}a)(\log_{10}a - \log_{10}b)$

$= \frac{1}{4}\{(\log_{10}a)^2 + 2\log_{10}a\log_{10}b + (\log_{10}b)^2\}$

$= \frac{1}{4}(\log_{10}a + \log_{10}b)^2 \geqq 0$

等号成立条件は$\log_{10}ab = 0$　より　$ab = 1$

225　$a - 1 = 5^{\log_{25}3} = 5^{\frac{\log_5 3}{\log_5 25}} = 5^{\frac{1}{2}\log_5 3} = 5^{\log_5\sqrt{3}}$

$\therefore$　$a - 1 = \sqrt{3}$　$a = \sqrt{3} + 1$

$4^{\log_2 a} = 2^{2\log_2 a} = 2^{\log_2 a^2} = a^2 = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

226　$1 - 5\log_6 2 = -m + n\log_6 3$　より

$1 + m = n\log_6 3 + 5\log_6 2 = \log_6 3^n\cdot 2^5$

$\therefore$　$6^{1+m} = 3^n\cdot 2^5$，$(2\cdot 3)^{1+m} = 3^n\cdot 2^5$

$2^{1+m}\cdot 3^{1+m} = 2^5\cdot 3^n$

2と3は互いに素であるから

$1 + m = 5$，$1 + m = n$　$\therefore$　$m = 4$，$n = 5$

227　$\log_{10}50 = \log_{10}10 + \log_{10}5 = 1 + \log_{10}5$

$0 < \log_{10}5 < 1$　だから小数部分xは

$x = \log_{10}5$　このとき

$10^{1-x} = 10^{1-\log_{10}5} = 10^{\log_{10}2} = 2$

5 章の問題

1　⑴　与式$=\left\{\left(\frac{15}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2=\frac{15}{2}-2\left(\frac{15}{2}\cdot\frac{10}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{10}{3}$

$=\frac{15}{2}-2\cdot 5+\frac{10}{3}=\frac{5}{6}$

⑵　$\left(6^{\frac{2}{3}}+6^{-\frac{2}{3}}+1\right)\left(6^{\frac{1}{3}}-6^{-\frac{1}{3}}\right)=6-6^{-1}=\frac{35}{6}$

⑶　与式$=5^{\frac{1}{4}}\times 5^{\frac{1}{3}}\times 5^{-\frac{1}{12}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

⑷　与式$=\log_3\frac{1}{4}+\frac{2\log_3 12}{\log_3 9}=\log_3\frac{1}{4}\cdot 12=1$

⑸　与式$=\left(\log_2 3+\frac{\log_2 9}{\log_2 16}\right)\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3}+\frac{\log_2 16}{\log_2 9}\right)$

$=\left(\log_2 3+\frac{2\log_2 3}{4}\right)\left(\frac{2}{\log_2 3}+\frac{4}{2\log_2 3}\right)$

$=\left(\frac{3}{2}\log_2 3\right)\left(\frac{4}{\log_2 3}\right)=6$

2　$2^{2x}+2^{-2x}=5$より$(2^{2x})^2+1=5\cdot 2^{2x}$

$(2^{2x})^2-5\cdot 2^{2x}+1=0$　∴　$2^{2x}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

$2^x>0$だから

$2^x=\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}}=\sqrt{\frac{10\pm 2\sqrt{21}}{4}}=\frac{\sqrt{7}\pm\sqrt{3}}{2}$

3　⑴　$\log_3 7=\frac{\log_2 7}{\log_2 3}=\frac{\log_2 7}{a}=b$

∴　$\log_2 7=ab$

⑵　$\log_{14} 28=\frac{\log_2 28}{\log_2 14}=\frac{\log_2 4+\log_2 7}{\log_2 2+\log_2 7}=\frac{2+ab}{1+ab}$

4　⑴　$\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

∴　与式$=\log_4\sqrt{2}=\frac{\log_2\sqrt{2}}{\log_2 4}=\frac{1}{4}$

⑵　与式$=(\log_{10}2+\log_{10}5)^3-3\log_{10}2\cdot\log_{10}5\,(\log_{10}2+\log_{10}5)+3\log_{10}2\cdot\log_{10}5$

$=(\log_{10}10)^3=1$

5　⑴　7　　⑵　$3^{-2\log_3 2}=3^{\log_3 2^{-2}}=3^{\log_3\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$　　⑶　$4^{\log_2 3}=2^{2\log_2 3}=2^{\log_2 9}=9$

6　$2^x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$

$2^{-x}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$　∴　$2^x+2^{-x}=2\sqrt{2}$

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=\left(2\sqrt{2}\right)^2-2=6$

7　⑴　$2^{40}=(2^4)^{10}=16^{10}$，$3^{30}=(3^3)^{10}=27^{10}$，$5^{20}=(5^2)^{10}=25^{10}$

∴　$16^{10}<25^{10}<27^{10}$　だから　2^{40}，5^{20}，3^{30}

⑵　$\left(\sqrt{3}\right)^{12}=3^6=729$，$\left(\sqrt[3]{6}\right)^{12}=6^4=1296$，$\left(\sqrt[4]{12}\right)^{12}=12^3=1724$

∴　$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{6}$，$\sqrt[4]{12}$

⑶　$1.5=\log_4 4^{\frac{3}{2}}=\log_4 8<\log_4 9$

$1.5=\log_9 9^{\frac{3}{2}}=\log_9 27>\log_9 25$

∴　$\log_9 25$，1.5，$\log_4 9$

⑷　$\log_3 2<1$　　$\log_4 8>\log_4 4=1$

$\log_4 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 4}=\log_2\sqrt{8}<\log_2 3$

∴　$\log_3 2$，$\log_4 8$，$\log_2 3$

8　$1<a<b<a^2$ の各辺の a を底とする対数をとると $a>1$ だから

$\log_a 1<\log_a a<\log_a b<\log_a a^2$

$1<\log_a b<2$　……①

$1<a<b<a^2$の各辺の b を底とする対数をとると$b>1$だから

$\log_b 1<\log_b a<\log_b b<\log_b a^2$

$0<\log_b a<1<2\log_b a$

∴　$\frac{1}{2}<\log_b a<1$　……②

また，$\log_a\frac{a}{b}=1-\log_a b$　①より $-1<\log_a\frac{a}{b}<0$……③

$\log_b\frac{b}{a}=1-\log_b a$

②より $0<\log_b\frac{b}{a}<\frac{1}{2}$　……④

①，②，③，④より

$\log_a\frac{a}{b}<\log_b\frac{b}{a}<\frac{1}{2}<\log_b a<\log_a b$

9　⑴　$f(x)=(2^x+2^{-x})^2-2-4(2^x+2^{-x})+2$

$=t^2-4t$

⑵　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ だから相加平均と相乗平均の関係より $t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

∴　$t\geqq 2$　（等号成立条件は $2^x=2^{-x}$ より $x=0$）

⑶　$y=(t-2)^2-4$ より $t=2$，すなわち $x=0$ のとき最小値 -4

10　⑴　$y=\log_2\frac{x}{4}=\log_2 x-\log_2 4$

より　$y=\log_2 x-2$

よって，C_1を y 軸方向に -2 だけ平行移動したものである。

⑵　$y=\log_2(2x-p)$ が点 $(7,\ 3)$ を通るから

$3=\log_2(14-p)$

ゆえに　$14-p=2^3$　より　$14-p=8$

よって　$p=6$

$y=\log_2(2x-6)=\log_2 2(x-3)$

$=\log_2(x-3)+\log_2 2$

$=\log_2(x-3)+1$

よって，C_1を x 軸方向に3，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

⑶　$y=\log_2\left(\frac{x}{2}+3\right)=\log_2\frac{1}{2}(x+6)$

$=\log_2\ (x+6)+\log_2\ \frac{1}{2}$

$=\log_2(x+6)-1$

よって，C_1を x 軸方向に -6，y軸方向に -1 だけ平行移動したものである。

また，C_1とC_2の共有点では

$\log_2 x=\log_2\left(\frac{x}{2}+3\right)$　より　$x=\frac{x}{2}+3$

ゆえに　$x=6$　($x>0$，$\frac{x}{2}+3>0$ をみたす)

このとき　$y=\log_2 6$

$=\log_2 2+\log_2 3=1+\log_2 3$

よって，共有点の座標は　$\left(6,\ 1+\log_2 3\right)$

11　⑴　$y=(\log_2 x-\log_2 4)(\log_4 x-\log_4 2)$

$=(\log_2 x-2)\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}-\frac{\log_2 2}{\log_2 4}\right)$

$=(\log_2 x-2)\left(\frac{1}{2}\log_2 x-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}(\log_2 x)^2-\frac{3}{2}\log_2 x+1$

$\log_2 x=t$ とおくと

$y=\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+1=\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$

よって，$t=\frac{3}{2}$ すなわち $\log_2 x=\frac{3}{2}$ より $x=2\sqrt{2}$ のとき

最小値$-\frac{1}{8}$，最大値はない。

⑵　$y=\log_2\left\{-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}$ より

$x=\frac{3}{2}$ のとき最大値 $\log_2\frac{1}{4}=-2$，最小値はない。

⑶　$y=\log_{\frac{1}{2}}\{-(x-4)^2+16\}$ より

$x=4$ のとき最小値 $\log_{\frac{1}{2}}16=-4$，最大値はない。

12　⑴　$4^{\frac{1}{2}}\cdot 4^x-2^x-6=0$

$2\cdot(2^x)^2-2^x-6=0$

$2^x=t$（$t>0$）とおくと

$2t^2-t-6=0$

$(2t+3)(t-2)=0$

$t>0$ だから $t=2$

$\therefore\quad 2^x=2$ より $x=1$

⑵　$2^x=t$（$t>0$）とおくと

$t-\frac{24}{t}=5$

$t^2-5t-24=0$

$(t-8)(t+3)=0$

$t>0$ だから $t=8$

$\therefore\quad 2^x=8$ より $x=3$

⑶　$(\log_2 x+\log_2 8)(\log_2 x+\log_2 2)=3$

$\log_2 x=t$ とおくと

$(t+3)(t+1)=3$

$t^2+4t=0$

$t(t+4)=0$

$t=0,\ -4$

$\log_2 x=0$ より $x=1,$

$\log_2 x=-4$より$x=\frac{1}{16}$　よって，$x=1,\ \frac{1}{16}$

⑷　$2^x=3^{x-1}$の両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 2^x=\log_2 3^{x-1}$

$x=(x-1)\log_2 3$

$x(\log_2 3-1)=\log_2 3$

$\therefore\quad x=\frac{\log_2 3}{\log_2 3-1}$

$\left(\begin{array}{c}\text{両辺の 10 を底とする対数をとると}\\ x=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}3-\log_{10}2}\ \text{となる。}\end{array}\right)$

⑸　$\log_x 2+\frac{\log_x 4}{\log_x x^2}=8$

$\log_x 2+\frac{2\log_x 2}{2}=8$

$2\log_x 2=8\quad\therefore\quad \log_x 2=4=\log_x x^4$

$\therefore\quad x^4=2$ より $x=\sqrt[4]{2}$

⑹　$x^{2\log_3 x}=\frac{x^7}{27}$ の両辺の底を 3 とする対数をとると

$\log_3 x^{2\log_3 x}=\log_3\frac{x^7}{27}$

$2\log_3 x\cdot\log_3 x=7\log_3 x-\log_3 27$

$2(\log_3 x)^2-7\log_3 x+3=0$

$(\log_3 x-3)(2\log_3 x-1)=0$

$\therefore\quad \log_3 x=3,\ \frac{1}{2}$　よって，$x=27,\ \sqrt{3}$

13　⑴　$9^x<3^{2x}\cdot 27^{x-1}$ より $9^x<9^x\cdot 27^{x-1}$

$\therefore\quad 27^{x-1} > 1 = 27^0$

底27は1より大きいから　$x-1>0$ より $x>1$

⑵ $\frac{1}{4} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq 1$ より $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^0$

底$\frac{1}{2}$は 1 より小さいから　$0 \leqq x \leqq 2$

⑶ $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^x - 6 \geqq 0$より$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2\right\}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3\right\} \geqq 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2 > 0$ だから $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqq 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

底$\frac{1}{3}$は 1 より小さいから　$x \leqq -1$

⑷ 真数は正だから　$x>0$　$\log_3 x - 3\cdot\frac{\log_3 9}{\log_3 x} < -1$　より　$\frac{(\log_3 x)^2 + \log_3 x - 6}{\log_3 x} < 0$

$\frac{(\log_3 x+3)(\log_3 x-2)}{\log_3 x} < 0$　$\therefore$　$\log_3 x < -3$，$0 < \log_3 x < 2$

よって，$0 < x < \frac{1}{27}$，$1 < x < 9$

⑸ 真数は正だから $x>0$　$2^{\log_2 x} = t$（$t>0$）とおくと

$t^2 - t - 2 < 0$，　$(t+1)(t-2) < 0$

$t+1>0$ だから $t<2$　$\therefore$　$2^{\log_2 x} < 2$

底2は1より大きいから　$\log_2 x < 1 = \log_2 2$

よって，$0 < x < 2$

14 ⑴ $2^x + 2^y = 12$，$2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = 32$ だから解と係数の関係から

$2^x, 2^y$は $t^2 - 12t + 32 = 0$ の 2 つの解

$(t-4)(t-8) = 0$　$\therefore t = 4$，8

$2^2 = 4$，$2^3 = 8$　より　$x=2$，$y=3$，または $x=3$，$y=2$

⑵ 真数は正だから $x>0$，$y>0$

$\log_2 x = \frac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}$　より　$\log_2 x^2 = \log_2(y+3)$　$\therefore$　$x^2 = y+3$…①

$\log_2 \frac{y}{x} = -1 = \log_2 \frac{1}{2}$　$\therefore$　$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$　より　$x = 2y$…②

①，②を解いて　$y = 1$，$-\frac{3}{4}$ $\left(-\frac{3}{4}\text{は不適}\right)$

$y=1$ のとき$x=2$　　よって，$x=2$，$y=1$