6 章　三角関数

1 節　三角比

228　(1)　$\sin A=\frac{2}{3}$,　$\cos A=\frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\tan A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin B=\frac{\sqrt{5}}{3}$,　$\cos B=\frac{2}{3}$,

$\tan B=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(2)　$\sin A=\frac{12}{13}$,　$\cos A=\frac{5}{13}$,

$\tan A=\frac{12}{5}$

$\sin B=\frac{5}{13}$,　$\cos B=\frac{12}{13}$,

$\tan B=\frac{5}{12}$

(3)　$\sin A=\frac{1}{3}$,　$\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\tan A=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,　$\cos B=\frac{1}{3}$,

$\tan B=2\sqrt{2}$

229　(1)　$\sin A=\frac{3}{5}$,　$\cos A=\frac{4}{5}$,

$\tan A=\frac{3}{4}$

(2)　$\sin A=\frac{5}{6}$,　$\cos A=\frac{\sqrt{11}}{6}$,

$\tan A=\frac{5\sqrt{11}}{11}$

230　(1)　$\frac{\sqrt{3}}{2}+1$　　(2)　$-\frac{1}{4}$

231　82.0 (m)

232　(1)　0　　(2)　1

233　(1)　鈍角　　(2)　鋭角　　(3)　鈍角

234　(1)　$\sin 25°$　　(2)　$-\sin 20°$　　(3)　$-\frac{1}{\tan 15°}$

235　(1)　$-\frac{1}{4}$　　(2)　1　　(3)　$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　(4)　$\sqrt{6}$

236 ⑴ $(\text{左辺}) = \cos\theta\,(1-\sin^2\theta)$
$= \cos\theta \times \cos^2\theta$
$= \cos^3\theta = (\text{右辺})$

⑵ $(\text{左辺}) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$
$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = (\text{右辺})$

⑶ $(\text{左辺}) = \frac{\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)\cos\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta+1-2\sin\theta+\sin^2\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}$

$= \frac{2-2\sin\theta}{(1-\sin\theta)\ \cos\theta} = \frac{2(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)\cos\theta}$

$= \frac{2}{\cos\theta} = (\text{右辺})$

237 ⑴ $\cos\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{6}}{12}$

⑵ $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

⑶ $0° < \theta < 90°$ のとき

$\cos\theta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{15}$

$90° < \theta < 180°$ のとき

$\cos\theta = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$,

$\tan\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{15}$

⑷ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{30}}{6}$

238 ⑴ $b = 6\sqrt{2}$, $R = 6$
⑵ $\sin A = \frac{1}{2}$
⑶ $B = 60°$, $120°$, $R = \sqrt{2}$

239 ⑴ $\sqrt{6}$ ⑵ $2\sqrt{7}$ ⑶ 5

240 ⑴ $\sqrt{7}$ ⑵ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⑶ $120°$

241 ⑴ $7\sqrt{2}$ ⑵ 9 ⑶ $5\sqrt{3}$

242 ⑴ $\frac{1}{8}$ ⑵ $\frac{3\sqrt{7}}{8}$ ⑶ $\frac{15\sqrt{7}}{4}$

243　⑴　$\frac{15\sqrt{3}}{2}$　　⑵　12

244　⑴　$x = 3\sqrt{3}$，$y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

⑵　$z = 5\left(\sqrt{3} + 1\right)$

245　$\frac{\sqrt{30}}{5}$ (km)

246　$25\sqrt{2}$ (m)

247　$\sin(180° - \theta) = \frac{\mathrm{AC}}{6}$

$\therefore \mathrm{AC} = 6\sin\theta = 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{2}$

$\cos\theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos(180° - \theta) = \frac{\mathrm{CD}}{6}$

$\therefore \quad \mathrm{CD} = 6(-\cos\theta) = 6 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$

248　⑴　$-\frac{12}{25}$　　⑵　$\frac{37}{125}$　　⑶　$\frac{7}{5}$

249　⑴　$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　⑵　$\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

250　⑴　$c = 2$，$A = 60°$，$B = 75°$

⑵　$a = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$，$c = \sqrt{3}$，$A = 15°$

2 節　三角関数

251　⑴　$300° + 360° \times 1$，第4象限

⑵　$100° + 360° \times 3$，第2象限

⑶　$240° + 360° \times (-1)$，第3象限

⑷　$20° + 360° \times (-2)$，第1象限

252　⑴　$\frac{\pi}{6}$　　⑵　$\frac{3}{4}\pi$　　⑶　$\frac{3}{2}\pi$　　⑷　$-\frac{5}{3}\pi$　　⑸　$120°$　　⑹　$330°$　　⑺　$12°$　　⑻　$-105°$

253　弧の長さ　4π cm

面積　24π cm^2

254　中心角　3ラジアン

面積　6 cm^2

255　⑴　$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan\frac{\pi}{4} = 1$

⑵ $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{1}{2}$,

$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

⑶ $\sin\frac{3}{2}\pi=-1$，$\cos\frac{3}{2}\pi=0$,

$\tan\frac{3}{2}\pi$ は値なし

256 ⑴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑵ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑶ -1 ⑷ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑸ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑹ 0

257 ⑴ 第2象限 ⑵ 第4象限 ⑶ 第2，第4象限

258 ⑴ $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，$\tan\theta=-\frac{3}{4}$

⑵ $\sin\theta=-\frac{12}{13}$，$\tan\theta=\frac{12}{5}$

⑶ $\sin\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$

259 ⑴ 第1象限または第2象限

⑵ 第2象限または第4象限

260 ⑴ $(左辺)=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\ \sin\theta\cos\theta$

$=(右辺)$ （証明終）

⑵ $(左辺)=(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)$

$=\cos^2\theta\times\frac{1}{\cos^2\theta}$

$=1=(右辺)$ （証明終）

⑶ $(左辺)=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=(右辺)$ （証明終）

⑷ $(左辺)=\frac{\sin^2\theta}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)}$

$=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}$

$=\frac{1}{(1+\tan^2\theta)-1}=\frac{1}{\tan^2\theta}$

$=(右辺)$ （証明終）

261 ⑴ $\frac{2}{3}\pi$ ⑵ $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

262 ⑴ $-\frac{4}{9}$ ⑵ $\frac{13}{27}$ ⑶ $\pm\frac{\sqrt{17}}{3}$ ⑷ $-\frac{9}{4}$

263　⑴　0　　⑵　-1

264　⑴　$\sin\theta=\frac{4}{5}$ のとき $\tan\theta=-\frac{4}{3}$
　　　$\sin\theta=-\frac{4}{5}$ のとき $\tan\theta=\frac{4}{3}$

⑵　$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき $\sin\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$

265　$2\sqrt{5}$

266　$(\sin x+\sin y)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$ より

$\sin^2 x+2\sin x\sin y+\sin^2 y=\frac{4}{9}$　…①

$\cos^2 x\cos^2 y=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$(1-\sin^2 x)(1-\sin^2 y)=\frac{1}{4}$

$1-\sin^2+x-\sin^2 y+\sin^2 x\sin^2 y=\frac{1}{4}$　…②

①+②より

$\sin^2 x\sin^2 y+2\sin x\sin y=-\frac{11}{36}$

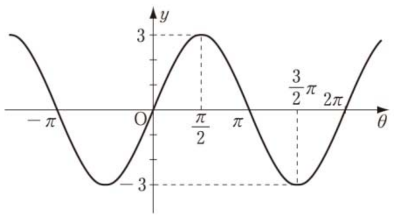
$36(\sin x\sin y)^2+72\sin x\sin y+11=0$

$(6\sin x\sin y+1)(6\sin x\sin y+11)=0$

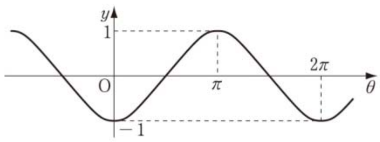
$-1\leqq\sin x\sin y\leqq 1$だから

$\sin x\sin y=-\frac{1}{6}$

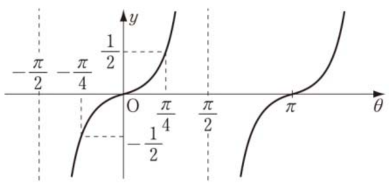
267　⑴　周期：2π，値域：$-3\leqq y\leqq 3$



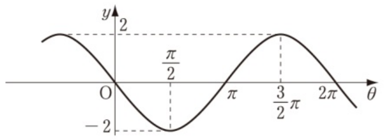
⑵　周期：2π，値域：$-1\leqq y\leqq 1$



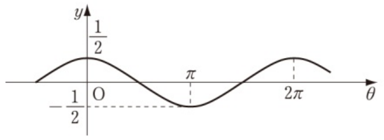
⑶　周期：π，値域：実数全体



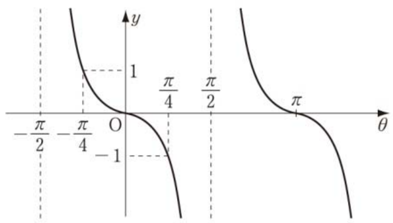
⑷　周期：2π，値域：$-2 \leqq y \leqq 2$



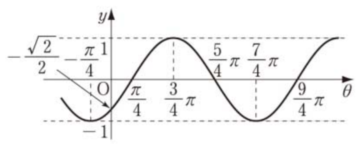
⑸　周期：2π，値域：$-\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2}$



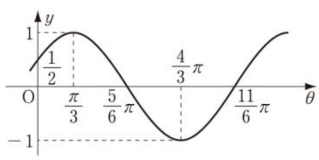
⑹　周期：π，値域：実数全体



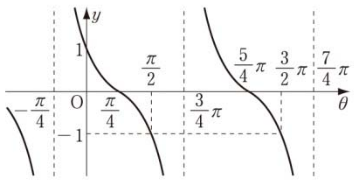
268　⑴



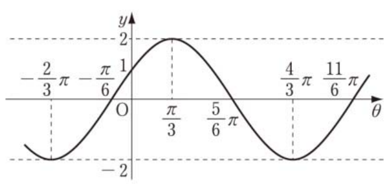
⑵



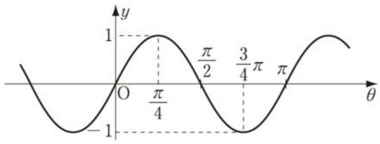
⑶



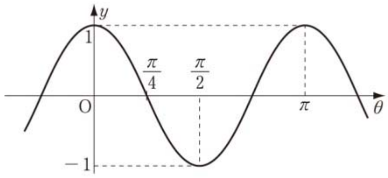
⑷



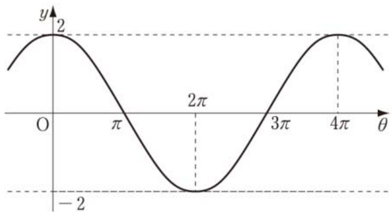
269 ⑴ 周期：π，値域：$-1 \leqq y \leqq 1$



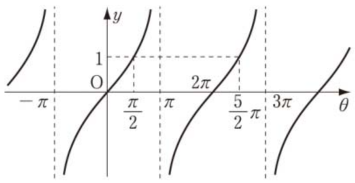
⑵ 周期：π，値域：$-1 \leqq y \leqq 1$



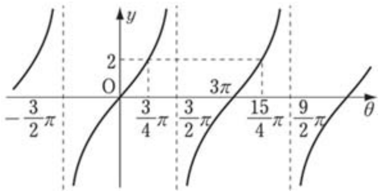
⑶ 周期：4π，値域：$-2 \leqq y \leqq 2$



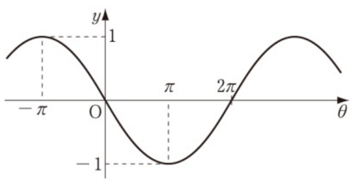
⑷ 周期：2π，値域：実数全体



⑸ 周期：3π，値域：実数全体



⑹ 周期：4π，値域：$-1 \leqq y \leqq 1$



270 $A = 2 \quad B = 3 \quad C = 2 \quad D = \frac{1}{6}\pi$
$E = \frac{1}{3}\pi$

271 ⑴ $\theta = \frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi$

⑵ $\theta = \frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$

⑶ $\theta = \frac{2}{3}\pi$，$\frac{5}{3}\pi$

⑷ $\theta = 0$，π

(5) $\theta = 0$

(6) $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$

(7) $\theta = \frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$

(8) $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{6}\pi$

(9) $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\frac{7}{6}\pi$

272 (1) $\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi$

(2) $\frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{7}{6}\pi$

(3) $\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{4}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi$

(4) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi < \theta < 2\pi$

(5) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$

(6) $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$

(7) $\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$

(8) $0 \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi$

(9) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{4}{3}\pi$, $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

273 (1) $\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $\frac{11}{6}\pi + 2n\pi$

(nはすべての整数)

$\left(\theta = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right.$　でもよい。$\left.\right)$

(2) $\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $\frac{5}{6}\pi + 2n\pi$

(nはすべての整数)

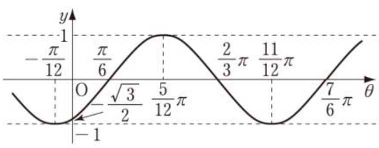
(3) $\theta = \frac{5}{6}\pi + n\pi$　(nはすべての整数)

274 (1) $\frac{\pi}{6}$　(2) $\frac{\pi}{3}$　(3) $-\frac{\pi}{4}$　(4) $\frac{2}{3}\pi$　(5) $\frac{\pi}{4}$　(6) $-\frac{\pi}{2}$　(7) 0　(8) 0

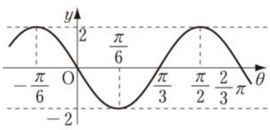
275 (1) 偶関数　(2) 奇関数　(3) 奇関数　(4) 奇関数　(5) どちらでもない

(6) 奇関数

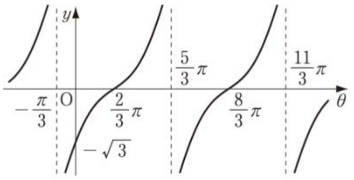
276 (1) 周期π



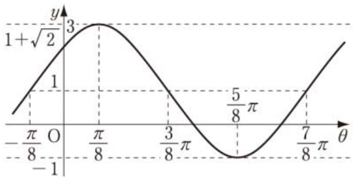
(2) 周期$\frac{2}{3}\pi$



⑶　周期2π



⑷　周期π



277　⑴　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{11}{6}\pi$

⑵　$\theta=0,\ \frac{\pi}{3}$

⑶　$\theta=\frac{7}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$

⑷　$\theta=\frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{6}$

⑸　$\theta=0,\ \frac{5}{6}\pi,\ \pi,\ \frac{11}{6}\pi$

⑹　$\theta=\frac{\pi}{24},\ \frac{13}{24}\pi,\ \frac{25}{24}\pi,\ \frac{37}{24}\pi$

278　⑴　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\leqq\theta<2\pi$

⑵　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{4},\ \frac{11}{12}\pi<\theta<\frac{5}{4}\pi,$
$\frac{23}{12}\pi<\theta<2\pi$

⑶　$\frac{5}{24}\pi<\theta<\frac{11}{24}\pi,\ \frac{29}{24}\pi<\theta<\frac{35}{24}\pi$

⑷　$0\leqq\theta<\frac{19}{24}\pi,\ \frac{23}{24}\pi<\theta<\frac{43}{24}\pi,$
$\frac{47}{24}\pi<\theta<2\pi$

279　⑴　$\theta=0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \pi$

⑵　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

⑶　$0\leqq\theta<\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$

⑷　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$

280　⑴　$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき　最大値 0
$\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき　最小値 -2

⑵　$\theta=0$ のとき　最大値 3
$\theta=\pi$ のとき　最小値 1

⑶　$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき　最大値 $\frac{1}{2}$
$\theta=\pi$ のとき　最小値 -1

⑷　$\theta=\frac{5}{6}\pi$ のとき　最大値 1
$\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき　最小値 $-\frac{1}{2}$

⑸　$\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき　最大値 3
$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$ のとき　最小値 $\frac{3}{4}$

(6)　$\theta = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ のとき　最大値 $\frac{7}{4}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき　最小値 $-\sqrt{3}$

281　$\sin 0 < \sin 3 < \sin 1 < \sin 2$

282　$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{2}{3}\pi$

283　$0 < a < 1$ のとき

最小値 $1 - a^2$ $(\sin\theta = a)$

$a \geqq 1$ のとき

最小値 $2 - 2a$ $(\sin\theta = 1)$

3 節　三角関数の加法定理

284　(1) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　(2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(3) $2-\sqrt{3}$　(4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　(5) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(6) $-2-\sqrt{3}$

285　$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3},\ \sin\beta = -\frac{12}{13}$

$\cos(\alpha+\beta) = \frac{24-5\sqrt{5}}{39}$

286　(1) $-\frac{63}{65}$　(2) $-\frac{16}{65}$

287　$-\frac{192+75\sqrt{7}}{31}$

288　与式$= \cos x + \cos x\cos\frac{2}{3}\pi - \sin x\sin\frac{2}{3}\pi + \cos x\cos\frac{4}{3}\pi - \sin x\sin\frac{4}{3}\pi$

$= \cos x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$= 0$

289　$\cos 2\alpha = \frac{7}{9},\ \tan 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$

290　(1) $-\frac{3}{4}$　(2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

291　(1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$　(2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$　(3) $2-\sqrt{3}$　(4) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$　(5) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$　(6) $\sqrt{2}-1$

292　$\frac{\sqrt{3}}{3}$

293　$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{2}{3}} = 5$

$\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ だから $\tan\frac{\theta}{2} > 0$

$\therefore$　$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{5}$

294 ⑴ $\sqrt{2}\ \sin\left(\theta+\frac{1}{4}\pi\right)$

⑵ $2\ \sin\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)$

⑶ $2\sqrt{3}\ \sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)$

⑷ $2\sqrt{2}\ \sin\left(\theta+\frac{11}{6}\pi\right)$

295 ⑴ $\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき最大値2，$\theta=\frac{5}{3}\pi$ のとき最小値-2

⑵ $\theta=\frac{7}{4}\pi$ のとき最大値$\sqrt{2}$，$\theta=\frac{3}{4}\pi$ のとき最小値$-\sqrt{2}$

296 ⑴ $\sqrt{2}$　⑵ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

297 ⑴ $\frac{1}{2}(\sin 5\theta+\sin 3\theta)$

⑵ $\frac{1}{2}(\sin 5\theta-\sin\theta)$

⑶ $\frac{1}{2}(\cos 5\theta+\cos\theta)$

⑷ $-\frac{1}{2}(\cos 3\theta-\cos\theta)$

298 ⑴ $2\sin 3\theta\cos\theta$

⑵ $2\cos 5\theta\sin 2\theta$

⑶ $2\cos 3\theta\cos 2\theta$

⑷ $-2\sin 3\theta\sin\theta$

299 ⑴ $\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$　⑵ $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$　⑶ $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$　⑷ $-\frac{1}{4}$

300 ⑴ $\frac{\sqrt{6}}{2}$　⑵ $-\frac{\sqrt{6}}{2}$　⑶ $\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑷ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

301 2

302 ⑴ $\theta=0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \pi$

⑵ $\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

⑶ $0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{6}\pi,$
$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

303 ⑴ $\frac{3}{4}$　⑵ $-\frac{\sqrt{7}}{4}$　⑶ $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

304 ⑴ $\frac{1}{2},\ 2$　⑵ $\frac{4}{5}$

305 ⑴ $\frac{\sqrt{3}}{8}$　⑵ 0

306 ⑴ $\theta=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

⑵ $0\leqq\theta\leqq\frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi\leqq\theta<2\pi$

307 ⑴ $-1\leqq f(\theta)\leqq 3$　⑵ $\theta=0,\ \frac{4}{3}\pi$　⑶ $0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},\ \pi<\theta<2\pi$

308　(1)　$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$

$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta$

$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta$

$=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=$(右辺)　（証明終）

(2)　(左辺)$=\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\frac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=$(右辺)　（証明終）

(3)　(左辺)$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

分母，分子を$\cos\alpha\cos\beta$で割ると

(左辺)$=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$

$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=$(右辺)　（証明終）

309　(1)　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

(2)　$5\mathrm{AP}+12\mathrm{BP}=5\cdot 2\cos\theta+12\cdot 2\sin\theta$

$=2\sqrt{5^2+12^2}\sin(\theta+\alpha)$

$=2\cdot 13\sin(\theta+\alpha)$

$=26\sin(\theta+\alpha)$

(ただし，$\cos\alpha=\frac{12}{13}$，$\sin\alpha=\frac{5}{13}$)

$\alpha<\theta+\alpha<\frac{\pi}{2}+\alpha$　だから　$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ のとき

最大値26

310　$y=\frac{1-\cos 2\theta}{2}+2\sin 2\theta-3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=2\sin 2\theta-2\cos 2\theta-1$

$=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$　だから　$-\frac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{7}{4}\pi$

よって，$2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\frac{3}{8}\pi$ のとき最大値$2\sqrt{2}$

$2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$　すなわち　$\theta=\frac{7}{8}\pi$ のとき最大値$-2\sqrt{2}$

311　$y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$　(ただし，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

$\alpha\leqq\theta+\alpha<2\pi+\alpha$　だから　$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ で最大値をとる。

$\therefore$　$\frac{\pi}{6}+\alpha=\frac{\pi}{2}$　より　$\alpha=\frac{\pi}{3}$

また，$\theta+\alpha=\frac{3}{2}\pi$のとき最小値をとるから $-\sqrt{\alpha^2+b^2}=-5$

$\therefore \quad a^2+b^2=25$

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{5}=\frac{1}{2}$ より $a=\frac{5}{2}$，$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{b}{5}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より $b=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

312 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}}$

$=\frac{13\sqrt{3}}{42-3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$0<\alpha+\beta<\pi$ だから $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$,

$\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+2-\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}(2-\sqrt{3})}$

$=\frac{\sqrt{3}+6-3\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}+3}=\frac{6-2\sqrt{3}}{6-2\sqrt{3}}=1$

$0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{2}\pi$ だから $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$

313 ⑴ 与式 $=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin(\pi-C)\cos(\pi-C)+2\sin C\cos C$（$A+B=\pi-C$ より）

$=2\sin C\{\cos(A-B)+\cos(\pi-A-B)\}$（$C=\pi-A-B$ より）

$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=2\sin C\{-2\sin A\sin(-B)\}$

$=4\sin A\sin B\sin C=$ (右辺)（証明終）

⑵ 与式 $=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ $\left(\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right.$ より$\left.\right)$

$=2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)$

$=2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\right)$

$=2\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\left(-\frac{B}{2}\right)$

$=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=$ (右辺)

6 章の問題

1 ⑴ $6\alpha=\alpha+2n\pi$ として，$n=0$，1，2，3，4 を代入

$\alpha=0$，$\frac{2}{5}\pi$，$\frac{4}{5}\pi$，$\frac{6}{5}\pi$，$\frac{8}{5}\pi$

⑵ $4\alpha=\frac{2}{9}\pi+2n\pi$ として，$n=0$，1，2，3

$\alpha=\frac{\pi}{18}$，$\frac{5}{9}\pi$，$\frac{19}{18}\pi$，$\frac{14}{9}\pi$

2 $4<x<6$

3 ⑴ $\mathrm{AC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{AD}=2$，$\mathrm{CD}=\sqrt{3}-1$

⑵ $\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos 15°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4　(1)　$2\sqrt{6}$　　(2)　$2\sqrt{7}$　　(3)　$\frac{\sqrt{105}}{2}$

5　$\mathrm{AP}=x$，$\mathrm{AQ}=y$とする。（$0<x<10$，$0<y<6$）

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 6\cdot\sin A=30\sin A$

$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}xy\sin A$　……①

$(\text{四角形 PBCQ})=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{APQ}=30\sin A-\frac{1}{2}xy\sin A$　……②

①＝②より　$\frac{1}{2}xy\sin A=\left(30-\frac{1}{2}xy\right)\sin A$　∴　$xy=30$　……③

周の長さについて

$x+\mathrm{PQ}+y=\mathrm{PB}+8+\mathrm{CQ}+\mathrm{PQ}$

$\mathrm{PB}=10-x$，$\mathrm{CQ}=6-y$ だから

$x+\mathrm{PQ}+y=(10-x)+8+(6-y)+\mathrm{PQ}$　∴　$x+y=12$　……④

③，④より，x，yは $t^2-12t+30=0$ の2つの解である。

∴　$t=6\pm\sqrt{6}$

$0<x<10$，$0<y<6$　だから

$x=6+\sqrt{6}$，$y=6-\sqrt{6}$

よって，$\mathrm{AP}=6+\sqrt{6}$，$\mathrm{AQ}=6-\sqrt{6}$

6　$\sin A=1-\sin^2 A$　より　$\sin^2 A+\sin A-1=0$

$\sin A=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$0<\sin A<1$　だから　$\sin A=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

7　(1)　$b\cdot\frac{b}{2R}=c\cdot\frac{c}{2R}$　∴　$b=c$

よって，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形

(2)　$b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$a^2+b^2-c^2=c^2+a^2-b^2$　∴　$b=c$

よって，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形

(3)　$a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$

$c^2+a^2-b^2-b^2-c^2+a^2=2c^2$

∴　$a^2=b^2+c^2$

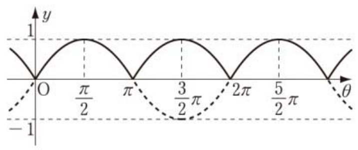
よって，$\angle\mathrm{A}=90°$ の直角三角形

⑷　$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \cdot \frac{b}{2R} = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \cdot \frac{a}{2R}$

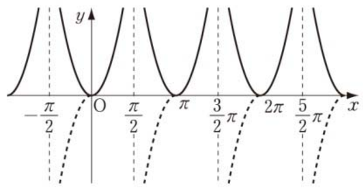
$b^2+c^2-a^2 = c^2+a^2-b^2 \quad \therefore \quad a=b$

よって，$\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ の二等辺三角形

8　⑴　周期π



⑵　周期π



9　⑴　$\theta = \frac{5}{18}\pi,\ \frac{7}{18}\pi,\ \frac{17}{18}\pi,\ \frac{19}{17}\pi,\ \frac{29}{18}\pi,\ \frac{31}{18}\pi$

⑵　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5}{6}\pi,$

$\frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

10　$\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = a$より

$1-\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = a$

$\sin\theta = t$　とおくと　$0 \leqq t \leqq 1$

$1-t^2+\frac{1}{2}t = a$

$y=-t^2+\frac{1}{2}t+1$ と $y=a$ のグラフで考える。

$y = -\left(t-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{16}$

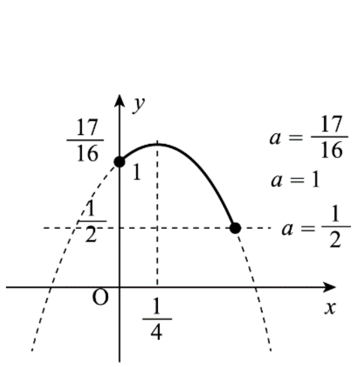
$0 \leqq t \leqq 1$ のtの

1つの値に対して

1つのθが対応する。

⑴　右のグラフより

$\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{17}{16}$



⑵　異なる2つの実数解をもつのは

$1 \leqq a \leqq \frac{17}{16}$

11　$\frac{\pi}{3}$

12　解と係数の関係より

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,　$\sin\theta\cos\theta=\frac{a}{2}$

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$　∴　$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$は $t^2-\frac{\sqrt{3}+1}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$ の2つの解

だから　$\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)=0$　より　$t=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,　$\sin\theta=\frac{1}{2}$ のとき $\theta=\frac{\pi}{6}$,

$\cos\theta=\frac{1}{2}$,　$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $\theta=\frac{\pi}{3}$

13　$\sin(2x+y)=\frac{3\sqrt{5}}{7}$

$\sin(x+y)=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos x=\frac{19}{21}$,　$\cos y=\frac{58}{63}$

14　$2(2\cos^2\theta-1)+2a\sin\theta\cos\theta=1$

$4\cos^2\theta+2a\sin\theta\cos\theta-3=0$

両辺を$\cos^2\theta$で割ると

$4+2a\tan\theta-\frac{3}{\cos^2\theta}=0$

$4+2a\tan\theta-3(1+\tan^2\theta)=0$

$3\tan^2\theta-2a\tan\theta-1=0$

∴　$\tan\theta=\frac{a\pm\sqrt{a^2+3}}{3}$

15　⑴　$3\alpha=5\alpha-2\alpha=90°-2\alpha$

$\sin 3\alpha=\sin(90°-2\alpha)=\cos 2\alpha$

⑵　$3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$4\sin^3\alpha-2\sin^2\alpha-3\sin\alpha+1=0$

$(\sin\alpha-1)(4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1)=0$

$\sin\alpha=\sin 18°$　だから　$0<\sin\alpha<1$

∴　$4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0$

$\sin\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

よって，$\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$